UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2
LICENCE MIASHS 3ÈME ANNÉE

Statistique Inférentielle - TD0 - Variables aléatoires

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes, d'espérances respectives μ_X et μ_Y, et de variance respective σ_X^2 et σ_Y^2. Calculer :

1. $E[2X+3]$ et $V(2X+3)$.
2. $E[X+Y]$ et $V(X+Y)$.
3. $cov(X,Y)$.
4. $E[XY]$.

Exercice 2

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 3

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 4

On cherche à dépister une maladie détectable à l'aide d'un examen sanguin. On suppose que dans notre population, il y a une proportion p de personnes qui n'ont pas cette maladie. On analyse le sang de r personnes de la population, avec r entier au moins égal à 2. On suppose que l'effectif de la population est suffisamment grand pour que le choix de ces r personnes s'apparente à un tirage avec remise.

1. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes ne soit atteinte de la maladie ?
2. On regroupe le sang de ces r personnes, puis on procède à l'analyse de sang. Si l'analyse est négative, aucune de ces personnes n'est malade et on arrête. Si l'analyse est positive, on fait toutes les analyses individuelles (on avait pris soin de conserver une partie du sang recueilli avant l'analyse groupée). On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses de sang effectuées. Donner la loi de probabilité de Y et calculer son espérance en fonction de r et de p.
3. On s'intéresse à une population de n personnes, et on effectue des analyses collectives après avoir mélangé les prélèvements par groupe de r personnes, où r est un diviseur de n. Montrer que le nombre d'analyses que l'on peut espérer économiser, par rapport à la démarche consistant à tester immédiatement toutes les personnes, est égal à $np^r - n/r$

Exercice 5

Mon opérateur de téléphonie mobile m'assure que 95% des SMS que j'envoie seront transmis en moins d'une minute.

1. Quelle est la probabilité qu'un SMS envoyé arrive en moins d'une minute ?
2. J'envoie chaque jour 2 SMS. Quelle est la probabilité que le nombre de SMS arrivés en moins d'une minute soit : 0, 1, 2 ?
3. Le week-end, j'envoie cette fois 20 SMS par jour. Proposez une modélisation pour le nombre de SMS arrivés en moins d'une minute.
4. Quelle est la probabilité pour que le dimanche, au moins la moitié de mes SMS arrive en moins d'une minute ?

Exercice 6

En 2011 en France, la durée moyenne des périodes de chômage était de 14 mois. En supposant que la durée d'une période de chômage peut-être modélisée par une loi normale, de moyenne 14 et de variance 36, répondez aux questions suivantes :

1. quelles sont les limites de cette modélisation ?
2. quelle est la probabilité qu'une période de chômage dure plus de 2 ans ?
3. quelle est la probabilité qu'une période de chômage dure moins de 6 mois ?
4. quelle est la probabilité qu'une période de chômage dure entre 6 mois et 1 an ?

Exercice 7

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot lancé par un athlète A suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que exactement 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres et exactement 25% des javelots atteignent moins de 50 mètres. Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.