Régression linéaire multiple

Prédire les valeurs d'une variable continue

Ricco Rakotomalala
Université Lumière Lyon 2

Tableau de données et Statut des variables

Cigarette	TAR (mg)	NICOTINE (m	WEIGHT (g)	CO (mg)
Alpine	14.1	0.86	0.9853	13.6
Benson&Hedges	16	1.06	1.0938	16.6
CamelLights	8	0.67	0.928	10.2
Carlton	4.1	0.4	0.9462	5.4
Chesterfield	15	1.04	0.8885	15
GoldenLights	8.8	0.76	1.0267	9
Kent	12.4	0.95	0.9225	12.3
Kool	16.6	1.12	0.9372	16.3
L&M	14.9	1.02	0.8858	15.4
LarkLights	13.7	1.01	0.9643	13
Marlboro	15.1	0.9	0.9316	14.4
Merit	7.8	0.57	0.9705	10
MultiFilter	11.4	0.78	1.124	10.2
NewportLights	9	0.74	0.8517	9.5
Now	1	0.13	0.7851	1.5
OldGold	17	1.26	0.9186	18.5
PallMallLight	12.8	1.08	1.0395	12.6
Raleigh	15.8	0.96	0.9573	17.5
SalemUltra	4.5	0.42	0.9106	4.9
Tareyton	14.5	1.01	1.007	15.9
TrueLight	7.3	0.61	0.9806	8.5
ViceroyRichLight	8.6	0.69	0.9693	10.6
VirginiaSlims	15.2	1.02	0.9496	13.9
WinstonLights	12	0.82	1.1184	14.9

Identifiant
(Pas utilisé pour les calculs, mais peut être utilisé pour les commentaires : points atypiques, etc.)

Variables prédictives
Descripteurs
Variables exogènes

Quantitative ou qualitative

Variable à prédire
Attribut classe
Variable endogène

Quantitative

1. Le modèle linéaire général

Régression linéaire multiple

- **Se restreindre à une famille de fonction de prédiction linéaire**
- **Et à des exogènes quantitatives (éventuellement des qualitatives recodées)**

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i,1} + a_2 x_{i,2} + \cdots + a_p x_{i,p} + \varepsilon_i \; ; \; i = 1, \ldots, n$$

Le terme aléatoire ε cristallise toutes les « insuffisances » du modèle :

→ le modèle n 'est qu'une caricature de la réalité, la spécification (linéaire notamment) n 'est pas toujours rigoureusement exacte
→ les variables qui ne sont pas prises en compte dans le modèle
→ les fluctuations liées à l 'échantillonnage (si on change d 'échantillon, on peut obtenir un résultat différent)

ε quantifie les écarts entre les valeurs réellement observées et les valeurs prédites par le modèle

$(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ Sont les paramètres/coefficients du modèle que l'on veut estimer à l'aide des données

Lecture des coefficients

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = a_j$$

→ Le coefficient se lit comme une « propension marginale »

→ Toutes choses égales par ailleurs c.-à-d. l'impact de x_j sur y ne tient pas compte de l'influence des autres

→ L'effet des variables est additif c.-à-d. les autres variables étant constantes, si $\Delta x_j = 1 \; et \; \Delta x_{j'} = 1 \Rightarrow \Delta y = (a_j + a_{j'})$

→ Si on veut analyser les interactions, il faut donc construire des variables synthétiques ex. $y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + a_3 (x_{i1} * x_{i2}) + \varepsilon_i$

Ex. Impact de « fumer » ET « boire » sur l'hypertension

Régression linéaire multiple

Démarche de modélisation

La démarche de modélisation est toujours la même

- estimer les paramètres « a » en exploitant les données
- évaluer la précision de ces estimateurs (biais, variance, convergence)
- mesurer le pouvoir explicatif global du modèle
- évaluer l'influence des variables dans le modèle
    - globalement (toutes les *p* variables)
    - individuellement (chaque variable)
    - un bloc de variables (q variables, q ≤ p) [c'est une généralisation]
- sélectionner les variables les plus « pertinentes »
- évaluer la qualité du modèle lors de la prédiction (intervalle de prédiction)
- détecter les observations qui peuvent fausser ou influencer exagérément les résultats (points atypiques).

Régression linéaire multiple

Écriture matricielle

Pour une meilleure concision …

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_i \\ \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & & x_{1p} \\ 1 & & & \\ 1 & x_{i1} & x_{ij} & x_{ip} \\ 1 & & & \\ 1 & x_{n1} & & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ \\ a_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_i \\ \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

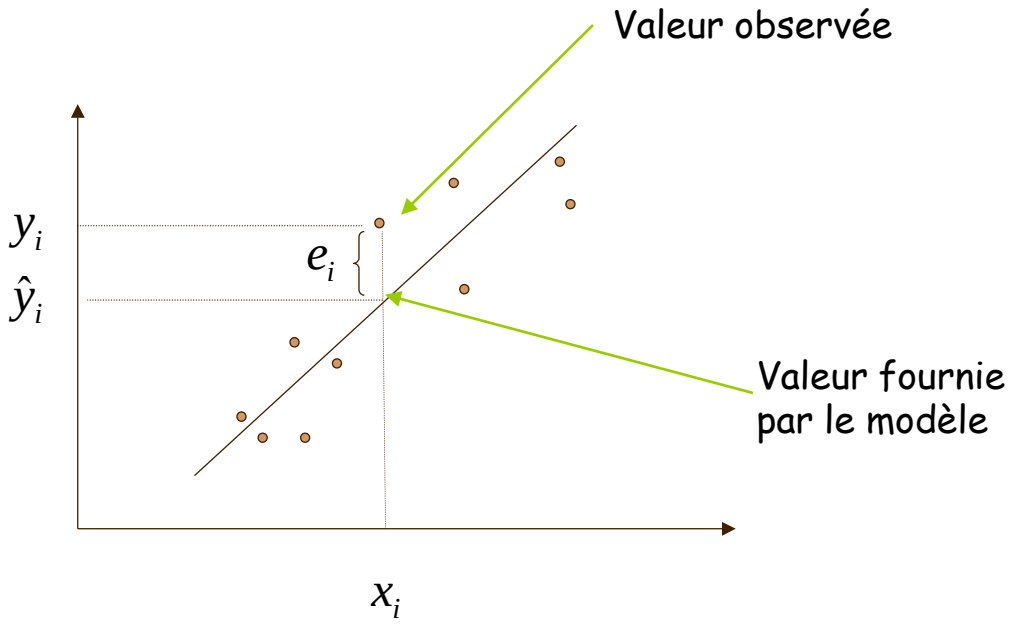
N.B. Noter la colonne représentant la constante

$$Y = Xa + \varepsilon$$

$$(n,1) = (n, p+1) \times (p+1,1) + (n,1)$$

Bien noter les dimensions des matrices

La méthode des moindres carrés



La méthode des moindres carrés cherche la meilleure estimation des paramètres « a » en minimisant la quantité

$$S = \sum_i e_i^2$$

$$avec\ e_i = Y - X\hat{a}$$

« e », l'erreur observée (le résidu) est une évaluation du terme d'erreur ε

Les hypothèses de la méthode des MCO

« â » deviennent les EMCO (estimateurs des moindres carrés ordinaires)

Hypothèses probabilistes (hypothèses stochastiques)

- *les X sont observés sans erreur (non aléatoires)*
- *$E(\varepsilon) = 0$, en moyenne le modèle est bien spécifié*
- *$E(\varepsilon^2) = \sigma^2_\varepsilon$ la variance de l 'erreur est constante (homoscédasticité)*
- *$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$, les erreurs sont non-corrélées (non-autocorrélation des erreurs)*
- *$Cov(\varepsilon,x)=0$, l 'erreur est indépendante des variables explicatives*
- *$\varepsilon \equiv Normale(0, \sigma_\varepsilon)$*

Hypothèses structurelles

- *$Rang(X'X) = p+1$ c.-à-d. $(X'X)^{-1}$ existe, ou encore $det(X'X) \neq 0$*
- *$(X'X)/n$ tend vers une matrice finie non singulière quand $n \rightarrow +\infty$*
- *$n > p+1$, le nombre d 'observations est supérieur au nombre de paramètres du modèle (variables explicatives + constante)*

Ces hypothèses pèsent sur les propriétés des estimateurs et sur les lois de distribution

EMCO (Estimateur des moindres carrés ordinaires)

Principe de calcul - Estimateur

Pour trouver les paramètres « a » qui minimise S :

$$S = \varepsilon' \varepsilon$$

$$= \sum_i \varepsilon_i^{\,2} = \sum_i [y_i - (a_0 + a_{i,1} x_1 + \ldots + a_{i,p} x_p)]^2$$

On doit résoudre

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$$

Il y a (p+1) équations dites « équations normales » à résoudre

Les bonnes pistes...

$$S = \varepsilon' \varepsilon = (Y - Xa)'(Y - Xa)$$

$$= Y'Y - 2a' X'Y + a' X' Xa$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2(X'Y) + 2(X' X)a = 0$$

$$\hat{a} = (X' X)^{-1} X'Y$$

EMCO (Estimateur des moindres carrés ordinaires)

Commentaires

$$\hat{a} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} n & \sum_i x_{i,1} & \cdots & \sum_i x_{i,p} \\ \sum_i x_{i,1} & \sum_i x_{i,1}^2 & & \sum_i x_{i,1} \times x_{i,p} \\ & & & \\ & & & \sum_i x_{i,p}^2 \end{pmatrix}$$

(p+1,p+1)

Matrice des sommes des produits croisés entre les variables exogènes – Symétrique (son inverse aussi est symétrique)

Si les variables sont centrées
→ 1/n (X'X) = matrice de variance covariance

Si les variables sont centrées et réduites
→ 1/n (X'X) = matrice de corrélation

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i y_i x_{i,1} \\ \vdots \\ \sum_i y_i x_{i,p} \end{pmatrix}$$

(p+1, 1)

Vecteur des sommes des produits croisés entre l'endogène et les variables exogènes

Si les variables sont centrées
→ 1/n (X'Y) = vecteur des covariances entre Y et X

Si les variables sont centrées et réduites
→ 1/n (X'Y) = vecteur des corrélations entre Y et X

Un premier exemple – Cigarettes

Dans le tableur EXCEL

constante	TAR (mg)	NICOTINE (mg	WEIGHT (g)	CO (mg)
1	14.1	0.86	0.9853	13.6
1	16	1.06	1.0938	16.6
1	8	0.67	0.928	10.2
1	4.1	0.4	0.9462	5.4
1	15	1.04	0.8885	15
1	8.8	0.76	1.0267	9
1	12.4	0.95	0.9225	12.3
1	16.6	1.12	0.9372	16.3
1	14.9	1.02	0.8858	15.4
1	13.7	1.01	0.9643	13
1	15.1	0.9	0.9316	14.4
1	7.8	0.57	0.9705	10
1	11.4	0.78	1.124	10.2
1	9	0.74	0.8517	9.5
1	1	0.13	0.7851	1.5
1	17	1.26	0.9186	18.5
1	12.8	1.08	1.0395	12.6
1	15.8	0.96	0.9573	17.5
1	4.5	0.42	0.9106	4.9
1	14.5	1.01	1.007	15.9
1	7.3	0.61	0.9806	8.5
1	8.6	0.69	0.9693	10.6
1	15.2	1.02	0.9496	13.9
1	12	0.82	1.1184	14.9

(X'X)

24	275.6	19.88	23.0921
275.6	3613.16	254.177	267.46174
19.88	254.177	18.0896	19.266811
23.0921	267.46174	19.266811	22.3637325

(X'X)^-1

6.56299	0.06290	-0.93908	-6.71991
0.06290	0.02841	-0.45200	-0.01528
-0.93908	-0.45200	7.86328	-0.39900
-6.71991	-0.01528	-0.39900	7.50993

X'Y

289.7
3742.85
264.076
281.14508

a^

-0.55170	constante
0.88758	tar
0.51847	nicotine
2.07934	weight

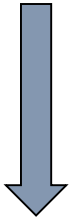
$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

2. Propriétés des estimateurs

Biais de « â »

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$= (X'X)^{-1}X'[Xa + \varepsilon]$$
$$\hat{a} = a + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Etape 1. Exprimer « â » en fonction de « a »



Etape 2. Voir sous quelles conditions E[â] = a

$$E[\hat{a}] = a + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon]$$
$$= a + (X'X)^{-1}X'E[\varepsilon]$$
$$= a$$

← Parce que X non aléatoire

← Parce que E[ε] = 0 par hypothèse

Matrice de variance covariance de « â »

$$\Omega_{\hat{a}} = E\left[(\hat{a}-a)(\hat{a}-a)'\right] = \begin{pmatrix} V(\hat{a}_0) & COV(\hat{a}_0,\hat{a}_1) & \cdots \\ & V(\hat{a}_1) & \\ & & \ddots \\ & & V(\hat{a}_p) \end{pmatrix}$$

Sur la diagonale, nous disposons de la variance de l'estimation de chaque coefficient. Très utile dans la partie inférentielle.

Puisque

$$\hat{a}-a = (X'X)^{-1}X'\varepsilon \quad \Rightarrow \quad E\left[(\hat{a}-a)(\hat{a}-a)'\right] = (X'X)^{-1}X'E\left[\varepsilon\varepsilon'\right]X(X'X)^{-1}$$

Or, par hypothèse :

- $E(\varepsilon^2)=\sigma^2_\varepsilon$ la variance de l 'erreur est constante (homoscédasticité)
- $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$, les erreurs sont non-corrélées (non-autocorrélation des erreurs)

$$E\left[\varepsilon\varepsilon'\right] = \begin{pmatrix} E\left[\varepsilon_1^2\right] & E\left[\varepsilon_1\varepsilon_2\right] & \cdots & E\left[\varepsilon_1\varepsilon_n\right] \\ & E\left[\varepsilon_2^2\right] & & \\ & & \ddots & \\ & & & E\left[\varepsilon_n^2\right] \end{pmatrix}$$

(n, n)

$$E\left[\varepsilon\varepsilon'\right] = \sigma^2_\varepsilon I_n \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\hat{a}} = \sigma^2_\varepsilon (X'X)^{-1}$$

On montre que cette matrice tend vers la matrice nulle (toutes les cellules à 0) lorsque n→+oo : EMCO est convergent.

On montre de plus que l'EMCO est BLUE (best linear unbiased estimator).

Variance de l'erreur

$$\Omega_{\hat{a}} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$$

Pour estimer la variance covariance des coefficients, il faut produire une estimation de la variance de l'erreur.

Développons le résidu

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= Y - \hat{Y} \\ &= (Xa + \varepsilon) - X\hat{a} \\ &= (Xa + \varepsilon) - X\left[a + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] \\ \hat{\varepsilon} &= \left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]\varepsilon\end{aligned}$$

Appelée matrice Γ , elle est symétrique ($\Gamma' = \Gamma$) et idempotente ($\Gamma^2 = \Gamma$), de taille (n, n)

$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \varepsilon'\Gamma\varepsilon$$

On montre alors que :

$$E\left[\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}\right] = \sigma_\varepsilon^2 \times Tr(\Gamma)$$

Variance de l'erreur

Degrés de liberté = n – (p+1) = n – p – 1

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{Tr(\Gamma)} \\ &= \frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-p-1} = \frac{SCR}{n-p-1} \\ &= \frac{Y'\Gamma Y}{n-p-1}\end{aligned}$$

Estimateur sans biais de la variance de l'erreur

Remarque : voir l'analogie avec la régression linéaire simple !!!

Calculs sous Excel

onstant	TAR (mg)	OTINE (	EIGHT (	CO (mg)	Y^	Résidus	Résidus^2
1	14.1	0.86	0.9853	13.6	14.458	-0.858	0.7359
1	16	1.06	1.0938	16.6	16.474	0.1264	0.016
1	8	0.67	0.928	10.2	8.826	1.374	1.888
1	4.1	0.4	0.9462	5.4	5.2622	0.1378	0.019
1	15	1.04	0.8885	15	15.149	-0.149	0.0221
1	8.8	0.76	1.0267	9	9.7879	-0.788	0.6208
1	12.4	0.95	0.9225	12.3	12.865	-0.565	0.3193
1	16.6	1.12	0.9372	16.3	16.712	-0.412	0.1694
1	14.9	1.02	0.8858	15.4	15.044	0.356	0.1268
1	13.7	1.01	0.9643	13	14.137	-1.137	1.2926
1	15.1	0.9	0.9316	14.4	15.255	-0.855	0.7302
1	7.8	0.57	0.9705	10	8.685	1.315	1.7293
1	11.4	0.78	1.124	10.2	12.308	-2.108	4.445
1	9	0.74	0.8517	9.5	9.5912	-0.091	0.0083
1	1	0.13	0.7851	1.5	2.0358	-0.536	0.2871
1	17	1.26	0.9186	18.5	17.101	1.3995	1.9585
1	12.8	1.08	1.0395	12.6	13.531	-0.931	0.8663
1	15.8	0.96	0.9573	17.5	15.96	1.5396	2.3705
1	4.5	0.42	0.9106	4.9	5.5536	-0.654	0.4272
1	14.5	1.01	1.007	15.9	14.936	0.9642	0.9297
1	7.3	0.61	0.9806	8.5	8.2829	0.2171	0.0471
1	8.6	0.69	0.9693	10.6	9.4547	1.1453	1.3116
1	15.2	1.02	0.9496	13.9	15.443	-1.543	2.3806
1	12	0.82	1.1184	14.9	12.85	2.05	4.2027
						SCR	26.904

a^

-0.55169763	constante
0.887580347	tar
0.518469559	nicotine
2.079344216	weight

n	24
p	3

ddl	20

sigma²(epsilon)	1.345197

sigma(epsilon)
1.159826222

(X'X)^-1

6.56299	0.06290	-0.93908	-6.71991
0.06290	0.02841	-0.45200	-0.01528
-0.93908	-0.45200	7.86328	-0.39900
-6.71991	-0.01528	-0.39900	7.50993

Mat. Var-covar des coefficients

8.82851	0.08461	-1.26324	-9.03960
0.08461	0.03821	-0.60803	-0.02055
-1.26324	-0.60803	10.57766	-0.53673
-9.03960	-0.02055	-0.53673	10.10234

Ecart-types des coefficients

constante	tar	nicotine	weight
2.97128	0.19548	3.25233	3.17842

Calcul matriciel sous EXCEL

DROITEREG

	weight	nicotine	tar	constante
coef.	2.07934422	0.51846956	0.88758035	-0.55169763
ecart-type	3.17841712	3.25233113	0.19548169	2.97128094
	0.93497531	1.15982622	#N/A	#N/A
	95.8584963	20	#N/A	#N/A
	386.845646	26.9039373	#N/A	#N/A

Calcul avec la fonction DROITEREG d'EXCEL

3. Inférence statistique sur les coefficients

Distribution de â

Par hypothèse, $\varepsilon \equiv N(0, \sigma_\varepsilon)$

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{a}_j - a_j}{\sigma_{\hat{a}_j}} \equiv N(0,1) \\ (n-p-1)\dfrac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} \equiv \chi^2(n-p-1) \end{cases}$$

Cf. le cours de Régression simple

Toujours par analogie avec la régression simple, on peut montrer que

$$(n-p-1)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} = (n-p-1)\frac{\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2}{\sigma_{\hat{a}_j}^2}$$

$$\frac{\hat{a}_j - a_j}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}} \equiv \Im(n-p-1)$$

Loi de Student à (n – p – 1) degrés de liberté.

On peut la mettre en œuvre dans différents schémas.

Test de conformité à un standard c.-à-d. H0 : $a_j = c$ vs. H1: $a_j \neq c$
Bilatéral ou unilatéral

Test de significativité c.-à-d. H0 : $a_j = 0$ vs. H1: $a_j \neq 0$
Permet de déterminer si la variable X_j a un impact sur Y !!!

Intervalle de confiance au niveau (1 - α)

Exemple des cigarettes

$\hat{a}_j$

$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}$

DROITEREG

	weight	nicotine	tar	constante
coef.	2.07934422	0.51846956	0.88758035	-0.55169763
ecart-type	3.17841712	3.25233113	0.19548169	2.97128094
	0.93497531	1.15982622	#N/A	#N/A
	95.8584963	20	#N/A	#N/A
	386.845646	26.9039373	#N/A	#N/A

Test de significativité à 5%

t calculé	0.65421	0.15941	4.54048	-0.18568
abs.t-.calculé	0.65421	0.15941	4.54048	0.18568
t théorique (5%)	2.08596	2.08596	2.08596	2.08596
Décision	H0	H0	H1	H0

Intervalles de confiance à 95%

borne.basse	-4.55072	-6.26577	0.47981	-6.74968
borne.haute	8.70941	7.30271	1.29535	5.64629

$$t = \frac{\hat{a}_j - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}}$$

$$t_{1-\alpha/2}(20) = 2.08596$$

$$\text{Rejet de H0 si } |t| \geq t_{1-\alpha/2}(20)$$

$$\hat{a}_{j\pm} t_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{\hat{a}_j}$$

4. Evaluation globale de la régression

Évaluation globale de la régression

Tableau d'analyse de variance et Coefficient de détermination

Équation d'analyse de variance – Décomposition de la variance

$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

SCT
Variabilité totale

SCE
Variabilité expliquée par le modèle

SCR
Variabilité non-expliquée (Variabilité résiduelle)

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carrés moyens
Modèle	SCE	p	SCE/p
Résiduel	SCR	n-p-1	SCR/(n-p-1)
Total	SCT	n-1	

Tableau d'analyse de variance

Un indicateur de qualité du modèle : le coefficient de détermination. Il exprime la proportion de variabilité de Y qui est retranscrite par le modèle

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

R^2#1, le modèle est parfait
R^2#0, le modèle est mauvais

Exemple des cigarettes

DROITEREG

	weight	nicotine	tar	constante
coef.	2.07934	0.51847	0.88758	-0.55170
ecart-type	3.17842	3.25233	0.19548	2.97128
	0.93498	1.15983	#N/A	#N/A
	95.85850	20	#N/A	#N/A
	386.84565	26.90394	#N/A	#N/A

R^2

SCR

Tableau d'analyse de variance

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carrés moyens
Modèle	386.84565	3	128.94855
Résiduelle	26.90394	20	1.34520
Totale	413.74958	23	

SCE

$CME = \frac{SCE}{p}$

$CMR = \frac{SCR}{n-p-1}$

R^2	**0.93498**

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCE}{SCE+SCR} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

R² corrigé pour contrecarrer le sur-ajustement

Problème : Le R² augmente mécaniquement avec le nombre de variables. Même si les variables additionnelles ne sont absolument pas pertinentes.

➔ On ne peut pas comparer des modèles de complexité différente (avec un nombre d'exogènes différent) sur la base du R²

➔ Il faut utiliser le R² ajusté qui est un R² corrigé par les degrés de liberté.

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{SCR / n-p-1}{SCT / n-1}$$

TAR (mg	OTINE (	EIGHT (	ALEA	CO (mg)
14.1	0.86	0.9853	0.2678	13.6
16	1.06	1.0938	0.3578	16.6
8	0.67	0.928	0.1269	10.2
4.1	0.4	0.9462	0.228	5.4
15	1.04	0.8885	0.109	15
8.8	0.76	1.0267	0.0388	9
12.4	0.95	0.9225	0.3959	12.3
16.6	1.12	0.9372	0.275	16.3
14.9	1.02	0.8858	0.8524	15.4
13.7	1.01	0.9643	0.1624	13
15.1	0.9	0.9316	0.673	14.4
7.8	0.57	0.9705	0.6751	10
11.4	0.78	1.124	0.8474	10.2
9	0.74	0.8517	0.5497	9.5
1	0.13	0.7851	0.4322	1.5
17	1.26	0.9186	0.9799	18.5
12.8	1.08	1.0395	0.3964	12.6
15.8	0.96	0.9573	0.4354	17.5
4.5	0.42	0.9106	0.5534	4.9
14.5	1.01	1.007	0.6546	15.9
7.3	0.61	0.9806	0.5156	8.5
8.6	0.69	0.9693	0.5019	10.6
15.2	1.02	0.9496	0.7209	13.9
12	0.82	1.1184	0.8171	14.9

DROITEREG (TAR, NICOTINE, WEIGHT) - 1

	weight	nicotine	tar	constante
	2.07934	0.51847	0.88758	-0.55170
	3.17842	3.25233	0.19548	2.97128
R²	**0.93498**	1.15983	#N/A	#N/A
	95.85850	20	#N/A	#N/A
	386.85	26.90	#N/A	#N/A

DROITEREG (TAR, NICOTINE, WEIGHT, ALEA) - 2

	alea	weight	nicotine	tar	constante
	0.81653	1.87048	0.93450	0.85569	-0.72260
	0.96657	3.21095	3.31268	0.20048	2.99961
R²	**0.93733**	1.16822	#N/A	#N/A	#N/A
	71.04289	19	#N/A	#N/A	#N/A
	387.82	25.93	#N/A	#N/A	#N/A

R² ajusté (1)	0.92522
R² ajusté (2)	0.92414

Le modèle (1) est le plus intéressant finalement !!!

$$\overline{R}^2(1) = 1 - \frac{26.90 / (24-3-1)}{(386.85+26.90) / (24-1)} = 1 - \frac{26.90/20}{413.75/23} = 0.92522$$

$$\overline{R}^2(2) = 1 - \frac{25.93 / (24-4-1)}{(387.82+25.93) / (24-1)} = 1 - \frac{25.93/19}{413.75/23} = 0.92414$$

La réduction du SCR est contrecarrée par la réduction des DDL.

Test de significativité globale de la régression

Les X emmènent-elles de l'information sur Y ?

Statistiquement, le test s'écrit.

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0 \\ H_1 : \exists j / a_j \neq 0 \end{cases}$$

← Aucune variable exogène n'est pertinente pour expliquer Y

← Une des exogènes au moins est porteuse d'information

Statistique de test

$$F = \frac{CME}{CMR} = \frac{SCE/p}{SCR/(n-p-1)} = \frac{R^2/p}{(1-R^2)/(n-p-1)}$$

Distribution sous H0

$$F \equiv Fisher(p, n-p-1)$$

Région critique au risque α

$$F \geq F_{1-\alpha}(p, n-p-1)$$

DROITEREG

	weight	nicotine	tar	constante
coef.	2.07934	0.51847	0.88758	-0.55170
-type	3.17842	3.25233	0.19548	2.97128
	0.93498	1.15983	#N/A	#N/A
	95.85850	20	#N/A	#N/A
	386.84565	26.90394	#N/A	#N/A

Tableau d'analyse de variance

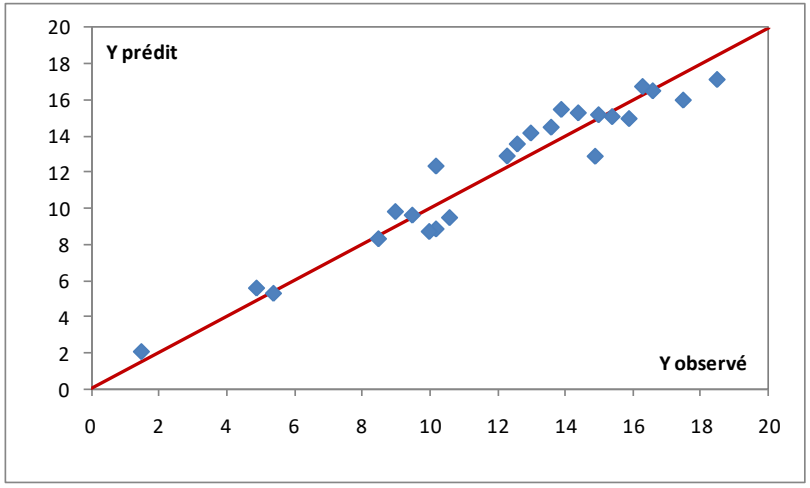
Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carrés moyens
Modèle	386.84565	3	128.94855
Résiduelle	26.90394	20	1.34520
Totale	413.74958	23	

R²	0.93498
F	**95.85850**
ddl1	3
ddl2	20
F-théorique (95%)	3.09839
Conclusion	Rejet de H0

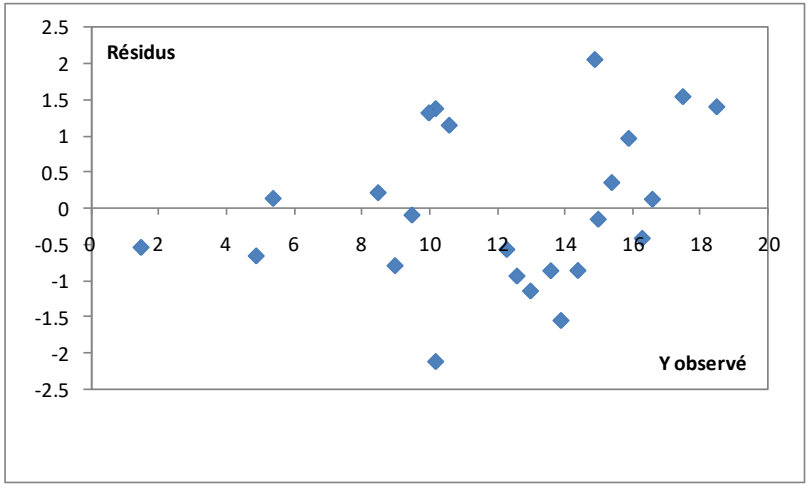
$$F = \frac{386.84565/3}{26.90934/20} = 95.85850$$

Diagnostic graphique

Evaluer la qualité de la prédiction – Détecter les cas pathologiques



Y observé vs. Y prédit



Y observé vs. résidu

➔ L'analyse des résidus fera l'objet d'un chapitre à part. Elle est très importante pour diagnostiquer la régression.

5. Tests généralisés des coefficients

Test de conformité

Peut être utilisé pour tester la nullité simultanée de plusieurs coefficients

Tester la conformité d'un sous ensemble q de coefficients à un standard (q ≤ p).

$$\begin{cases} H_0 : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{(q)} = c_{(q)} \\ H_1 : \exists j / a_j \neq c_j \end{cases}$$

Attention, la notation ne doit pas nous induire en erreur : on teste bien q paramètres quelconques parmi les p.

Un des coefficients au moins est conforme au standard.

Statistique de test

$$F = \frac{1}{q}\left[\hat{a}_{(q)} - c_{(q)}\right]' \hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}_{(q)}} \left[\hat{a}_{(q)} - c_{(q)}\right]$$

Distribution sous H0

$$F \equiv Fisher(q, n-p-1)$$

Région critique au risque α

$$F \geq F_{1-\alpha}(q, n-p-1)$$

Est l'inverse de la matrice de variance covariance réduite aux coefficients testés.

Les tests de significativité individuelle des coefficients et le test de significativité globale de la régression sont des cas particuliers.

Exemple « Cigarettes »

Tester la nullité simultanée des coefficients de WEIGHT et NICOTINE

(qui individuellement ne sont pas significatives…)

$$\begin{cases} H_0 : \begin{pmatrix} a_{\text{nicotine}} \\ a_{\text{weight}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ H_1 : \exists j / a_j \neq c_j \end{cases}$$

Coefficients estimés.

a^	
-0.55170	constante
0.88758	tar
0.51847	nicotine
2.07934	weight

Coefficients à tester.

$$\hat{a}_{(q)} = \begin{pmatrix} 0.51847 \\ 2.07934 \end{pmatrix}$$

Mat. Var-covar des coefficients

constante	tar	nicotine	weight
8.82851	0.08461	-1.26324	-9.03960
0.08461	0.03821	-0.60803	-0.02055
-1.26324	-0.60803	10.57766	-0.53673
-9.03960	-0.02055	-0.53673	10.10234

$$\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}_{(q)}} = \begin{pmatrix} 10.57766 & -0.53673 \\ -0.53673 & 10.10234 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.09479 & 0.00504 \\ 0.00504 & 0.09925 \end{pmatrix}$$

Statistique de test

$$F = \frac{1}{q}\left[\hat{a}_{(q)} - c_{(q)}\right]\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}_{(q)}}\left[\hat{a}_{(q)} - c_{(q)}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0.51847 \\ 2.07934 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]'\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}_{(q)}}\left[\begin{pmatrix} 0.51847 \\ 2.07934 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0.23274$$

F théorique au risque α = 5%

$$F_{1-\alpha}(q, n-p-1) = F_{0.95}(2,20) = 3.49283$$

$F_{observé} < F_{théorique}$ ⇨ L'hypothèse nulle ne peut pas être rejetée au risque α = 5%

Test de « q » contraintes linéaires sur les coefficients

Peut être utilisé pour comparer des coefficients

Tester q contraintes linéaires sur les coefficients : R est une matrice de dimension (q , p+1) ; r un vecteur de taille (q, 1)

$$\begin{cases} H_0 : Ra = r \\ H_1 : Ra \neq r \end{cases}$$

Statistique de test

$$F = \frac{\frac{1}{q}(R\hat{a} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{a} - r)}{SCR / n - p - 1}$$

Distribution sous H0

$$F \equiv Fisher(q, n - p - 1)$$

Région critique au risque α

$$F \geq F_{1-\alpha}(q, n - p - 1)$$

Le test de significativité individuelle en est un cas particulier (ex. a1 = 0) → R (1, p+1)

$$\begin{cases} R = (0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0) \\ r = (0) \end{cases}$$

Le test de significativité globale est un cas particulier R (p, p+1)

$$\begin{cases} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}; r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exemple « Cigarettes »

Tester l'égalité des coefficients de TAR et NICOTINE

$$\begin{cases} H_0 : a_{\text{tar}} = a_{\text{nicotine}} \\ H_1 : a_{\text{tar}} \neq a_{\text{nicotine}} \end{cases} \Leftrightarrow \{H_0 : 0 \times a_{\text{constante}} + 1 \times a_{\text{tar}} - 1 \times a_{\text{nicotine}} + 0 \times a_{\text{weight}} = 0$$

$$\begin{cases} R = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0) \\ r = (0) \end{cases}$$

Statistique de test

$$F = \frac{\frac{1}{q}(R\hat{a} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{a} - r)}{SCR / n - p - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{1}(0.3691 - 0)'\left[8.7957\right]^{-1}(0.3691 - 0)}{26.904 / 20}$$

$$= \frac{0.0155}{1.3452} = 0.0115$$

a^

-0.55170	constante
0.88758	tar
0.51847	nicotine
2.07934	weight

(X'X)^-1

6.56299	0.06290	-0.93908	-6.71991
0.06290	0.02841	-0.45200	-0.01528
-0.93908	-0.45200	7.86328	-0.39900
-6.71991	-0.01528	-0.39900	7.50993

F théorique au risque α = 5%

$$F_{1-\alpha}(q, n - p - 1) = F_{0.95}(1,20) = 4.3512$$

$F_{observé} < F_{théorique}$ ⇨ L'hypothèse nulle ne peut pas être rejetée au risque α = 5%

6. Prédiction et intervalle de prédiction

Prédiction

Prédiction ponctuelle et intervalle de prédiction

Ne pas oublier la constante en notation matricielle

$$X_{i*} = \begin{pmatrix} 1 & x_{i*,1} & \cdots & x_{i*,p} \end{pmatrix}$$

Prédiction ponctuelle

$$\hat{y}_{i*} = \hat{y}(x_{i*}) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{i*,1} + \cdots + \hat{a}_p x_{i*,p} = X_{i*}\hat{a}$$

Prédiction sans biais

$$E(\hat{y}_{i*}) = y_{i*}$$
$$\Leftrightarrow E(\hat{\varepsilon}_{i*}) = E(\hat{y}_{i*} - y_{i*}) = 0$$

Estimation de la variance de l'erreur de prédiction

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}_{i*}} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\left[1 + X_{i*}(X'X)^{-1}X_{i*}'\right]$$

Dépend de la qualité du modèle (variance de l'erreur) et de l'éloignement du point par rapport au barycentre (*cf. lorsque variables centrées*)

Distribution

$$\frac{\hat{\varepsilon}_{i*}}{\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{i*}}} = \frac{\hat{y}_{i*} - y_{i*}}{\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{i*}}} \equiv \Im(n - p - 1)$$

Au niveau de confiance (1 - α)

$$\hat{y}_{i*} \pm t_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{i*}}$$

Prédiction – Exemple « cigarettes »

Prédiction ponctuelle et intervalle de prédiction

constante	TAR (mg)	NICOTINE (mg)	WEIGHT (g)	CO (mg)
1	14.1	0.86	0.9853	13.6
1	16	1.06	1.0938	16.6
1	8	0.67	0.928	10.2
1	4.1	0.4	0.9462	5.4
1	15	1.04	0.8885	15
1	8.8	0.76	1.0267	9
1	12.4	0.95	0.9225	12.3
1	16.6	1.12	0.9372	16.3
1	14.9	1.02	0.8858	15.4
1	13.7	1.01	0.9643	13
1	15.1	0.9	0.9316	14.4
1	7.8	0.57	0.9705	10
1	11.4	0.78	1.124	10.2
1	9	0.74	0.8517	9.5
1	1	0.13	0.7851	1.5
1	17	1.26	0.9186	18.5
1	12.8	1.08	1.0395	12.6
1	15.8	0.96	0.9573	17.5
1	4.5	0.42	0.9106	4.9
1	14.5	1.01	1.007	15.9
1	7.3	0.61	0.9806	8.5
1	8.6	0.69	0.9693	10.6
1	15.2	1.02	0.9496	13.9
1	12	0.82	1.1184	14.9

a^

-0.55170	constante
0.88758	tar
0.51847	nicotine
2.07934	weight

n	24
p	3
ddl	20
sigma²(epsilon)	1.34520

sigma(epsilon)
1.15983

(X'X)^-1

6.56299	0.06290	-0.93908	-6.71991
0.06290	0.02841	-0.45200	-0.01528
-0.93908	-0.45200	7.86328	-0.39900
-6.71991	-0.01528	-0.39900	7.50993

$X_{i*} = (1 \quad 11.5 \quad 0.8 \quad 0.95)$

	constante	TAR (mg)	NICOTINE (mg)	WEIGHT (g)
X (à prédire)	1	11.5	0.8	0.95

Pred. Ponctuelle **12.04563**

$\hat{y}_{i*} = -0.55170 + 0.88758 \times 11.5 + 0.51847 \times 0.8 + 2.07934 \times 0.95$

Var.Erreur 1.34520 $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$

Var.Erreur.Prediction 1.41146 $\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{i*}}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \left[1 + X_{i*} \left(X'X\right)^{-1} X_{i*}'\right]$

t de Student 2.08596 $t_{1-\alpha/2}(n-p-1) = t_{0.975}(20)$

borne.basse **9.56740**
borne.haute **14.52385**

$\hat{y}_{i*} \pm t_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_{i*}}$

Bibliographie

- https://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours_econometrie.html
- Y.Dodge, V.Rousson, « Analyse de régression appliquée », Dunod, 2004.
- R. Bourbonnais, « Économétrie », Dunod, 1998.
- M. Tenenhaus, « Statistique : Méthodes pour décrire, expliquer et prévoir », Dunod, 2007.