EXAMEN DU 21/11/14

Ex1

1. $\bar{X}$ estimateur sans biais de variance minimale de μ

2. $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ car $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

3. $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ car σ^2 inconnu

4. $T \sim t_{n-1}$

5. $P(T \in [t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}]) = 1 - \alpha$

pour $\alpha = 10\%$ $\quad t_{119, 0{,}05} \simeq t_{120, 0.05} = -1{,}658$

6. $P\left(-1{,}658 \leq \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq 1{,}658\right) = 0{,}9$

7. $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - 1{,}658 \dfrac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1{,}658 \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.9$

ici on obtient

$$IC_{0,9}(\mu) = \left[12 - 1{,}658 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{120}}, 12 + 1{,}658 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{120}}\right] = [11.786, 12{,}214]$$

Ex 2

1. λ nombre moyen de commandes hebdomadaires

2. $L(X_1, \dots, X_5, \lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{5} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$

3. $L(2,4,1,0,3,\lambda) = e^{-5\lambda} \dfrac{\lambda^{10}}{288}$ $\qquad \ln L(2,4,1,0,3,\lambda) = -5\lambda + 10 \ln \lambda - \ln 288$

4. $\dfrac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(2,4,1,0,3,\hat{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow -5 + \dfrac{10}{\hat{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda} = 2$

Rq : on peut vérifier $\dfrac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L = -\dfrac{10}{\lambda^2} < 0$ donc $\hat{\lambda} = 2$ est bien un maximum.

5. $L(X_1, \dots, X_n, \lambda) = e^{-n\lambda} \dfrac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} X_i}}{\prod_{i=1}^{n} X_i!}$

$\dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -n + \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$

6. $E[\bar{X}] = E[X_i] = \lambda \qquad V(\bar{X}) = \dfrac{1}{n} V(X_i) = \dfrac{\lambda}{n}$

7. Estimateur du max. de vrais. asymptotiquement sans biais de variance minimale

On pourrait en calculant l'information de Fisher montrer qu'il est efficace (sans biais de variance minimale) pour tout n.

Ex 3

On doit supposer la normalité des données pour calculer les intervalles de confiances

1. $\bar{x}_1 = 10,94$ $\quad \bar{x}_2 = 11.44$ $\quad s_1^2 = 4.173$ $\quad s_2^2 = 2.967$

$$IC_{0,95}(\mu_1) = \left[\bar{x}_1 - \underbrace{t_{17,0,975}}_{2,11} \sqrt{\frac{s_1^2}{18}} \, , \, \bar{x}_1 + 2.11 \sqrt{\frac{s_1^2}{18}} \right]$$

$$= [9.928 \, , \, 11,960]$$

$$IC_{0,95}(\mu_2) = [10,588 \, , \, 12,301]$$

2. $$IC_{0,95}(\sigma_1^2) = \left[\frac{(n-1) S_1^2}{\chi^2_{n-1,\,0.975}} \, , \, \frac{(n-1) S_1^2}{\chi^2_{n-1,\,0.025}} \right]$$

$$= [2,350 \, , \, 9,379]$$

$$IC_{0,95}(\sigma_2^2) = [1,671 \, , \, 6,669]$$

3. Tous les intervalles se chevauchent, non [illegible] on ne peut conclure à aucune différence.