UNIVERSITE PARIS VI PIERRE ET MARIE CURIE
UFR INFORMATIQUE

THESE DE DOCTORAT

Spécialité
Informatique - aide à la décision

Présentée par

M. Antoine ROLLAND

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Procédures d'agrégation ordinale de préférences avec points de référence pour l'aide à la décision

Soutenance: 25 septembre 2008

JURY

Directeur de thèse :	Patrice PERNY Professeur au LIP6, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Rapporteurs :	Hélène FARGIER Chargée de recherche CNRS à l'IRIT Université Paul Sabatier (Toulouse)
	Marc PIRLOT Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique)
Examinateurs :	Jean-Yves JAFFRAY Professeur au LIP6, l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
	Vincent MOUSSEAU Professeur à l'Ecole Centrale de Paris

Remerciements

Lorsqu'en septembre 2000 je me suis inscrit en DEA "Informatique et Recherche Opérationnelle" à l'université Paris VI, je n'avais comme objectif que d'entretenir un peu mes compétences scientifiques tout en développant ma culture générale. A aucun moment l'idée d'une thèse n'était présente dans mon esprit, et, je l'avoue, je m'étais surtout inscrit dans ce DEA pour le module "Théorie des jeux" à l'énoncé assez attrayant. J'ai eu alors la chance de participer au cours de décision multicritère de Patrice Perny, cours que j'ai trouvé passionnant. Et quand il m'a proposé de poursuivre mon DEA par une thèse dans le domaine de la décision multicritère, j'ai accepté ne sachant alors jusqu'où cela m'emmènerait. Au bout de 6 ans de travail, je mesure la chance qui m'a été donné de pouvoir collaborer avec lui. Son amabilité, ses qualités de pédagogue et sa capacité de travail ont fait que cette thèse me fut non seulement profitable intellectuellement mais aussi humainement. Ce fut un grand plaisir de travailler Avec lui. Je tiens donc à le remercier particulièrement de l'opportunité qu'il m'a donnéee de découvrir le champ de la recherche informatique de haut niveau. En particulier, cela m'a permis, à travers ma participation à des conférences et rencontres internationales, de pouvoir échanger avec des enseignants et chercheurs sur des sujets passionnants.

Le professeur Marc Pirlot est une de ces personnes dont la rencontre m'a marqué. Avec gentillesse, il a accepté d'être un des rapporteurs de cette thèse comme il avait accepté de jeter un regard bienveillant sur mes travaux précedents. Pour tout cela, qu'il recoive ici l'expression de toute ma gratitude.

L'idée sous-tendant les travaux de cette thèse avait été suggéré il y a quelques temps comme piste de recherche entre autres par Hélène Fargier. Je suis honoré qu'elle soit aujourd'hui rapporteuse de cette thèse, et je tiens à l'en remercier.

Je remercie sincèrement le professeur Jean-Yves Jaffray de sa participation au jury. Sa parfaite connaissance de la théorie de la décision m'a été plusieurs fois très profitable pour comprendre les problématiques particulières de ce domaines.

Ma collaboration avec Vincent Mousseau m'a permis de mieux appréhender le fait qu'au delà des résultats théoriques, la science de la décision sert avant tout à produire des résultats concrets utilisables par le décideur. je tiens à le remercier d'avoir accepté de participer au jury de thèse.

Parmi les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de travailler, je souhaite remercier Christophe Gonzales, Olivier Spanjaard et Paul Weng pour avoir pris le temps de se pencher sur mes travaux et de les enrichir de leur apport. Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe DESIR du laboratoire d'informatique de Paris VI pour la très bonne ambiance amicale qui y règne, en particulier Lucie et Nicolas mes collègues de bureau. Les mots croisés et autres Sudoku participent aussi à la vie intellectuelle d'un chercheur !

A Monique Brylinski
La première à m'avoir dit
"quand tu feras ta thèse..."

Et à Marion
maintenant mariée à un docteur

Table des matières

Introduction

La prise de décision, tant par une personne seule, une organisation, que par un système automatisé, est un problème difficile. Le choix de la meilleure décision possible, c'est à dire la décision qui permettra une optimisation des résultats souhaités, fait intervenir de nombreux facteurs et est la plupart du temps délicat à effectuer. L'informatique décisionnelle est l'ensemble des moyens, outils et méthodes informatiques mis à la disposition des personnes en charge de la prise de décision. Depuis une soixantaine d'années, l'informatique décisionnelle a connu des développements conséquents, qui peuvent être structurés suivant deux axes : la conception de systèmes décisionnels autonomes, capables de décisions automatiques, et les systèmes d'aide à la décision humaine. Le premier axe a enregistré des progrès notables dans la compréhension et la modélisation des processus de prise de décisions humains, et a produit de nombreux systèmes et modèles permettant à un agent autonome de prendre une décision rationnelle. C'est le domaine de l'intelligence artificielle, et de ses nombreuses applications en automatique, robotique, traitement du langage... Le deuxième axe a permis le développement d'algorithmes de calcul afin d'optimiser des fonctions modélisant les situations concrètes menant à des prises de décisions. C'est le domaine de la recherche opérationnelle, et de l'aide à la décision. Cependant, dans un cas comme dans l'autre, le développement de mécanismes décisionnels capables de prendre en compte des préférences multiples et potentiellement conflictuelles devient une préoccupation primordiale. En effet, dans de nombreux cas, la modélisation de la décision ne se ramène pas à une unique fonction à optimiser : la présence de plusieurs critères sur lesquels évaluer la situation, l'implication de plusieurs personnes dans le processus de décision, l'incertitude existante sur les événements futurs sont autant de cas où la prise de décision devient un processus très complexe. La nécessité d'une analyse théorique pour conceptualiser l'élaboration de modèles décisionnels est alors d'autant plus importante que de nombreuses méthodes naïves (apparemment naturelles mais recelant de très mauvaises propriétés) sont couramment employées en aide à la décision. Tant dans les problèmes de choix, où il importe d'obtenir à la fin une unique solution à recommander au décideur, que dans les problèmes de classement, dont le but est d'obtenir un ordre de préférence sur les solutions possibles, l'utilisation des méthodes considérées comme "naturelle" peuvent amener à des décisions peu souhaitables.

Exemple : L'utilisation de la moyenne pondérée, méthode parmi les plus diffusées, en est un exemple : imaginons que l'on souhaite faire l'acquisition d'un vélo pour se déplacer en ville comme à la campagne. On note trois vélos v_1, v_2 ,v_3 sur leur capacité à rouler en ville (V), et à la campagne (C), les notes pouvant aller de 0 (plus mauvaise note) à 10 (meilleure note). Les notes obtenues par v_1, un vélo hollandais, sont $(10; 3)$; celles obtenues par v_2, vélo tout terrain, $(3, 10)$; et celles obtenues par v_3, vélo de randonnée, $(6, 6)$. Si l'on se pose la question de n'acheter qu'un seul vélo, le vélo préféré sera bien évidemment v_3, qui se comporte de manière correcte à la ville comme à la campagne. Et pourtant, quels que soient les coefficients attribués à chaque critère, la moyenne pondérée de v_3 sera toujours inférieure à celle de v_1 ou v_2 !

L'étude des méthodes formelles d'aide à la décision permet de préciser les options possibles, les préférences à prendre en compte et les propriétés des résultats obtenus. Une méthode formelle consiste à identifier les informations pertinentes dans le cas considéré, puis à proposer une méthode d'agrégation de ces informations, en vue de la production d'un modèle décisionnel. On peut alors exploiter ce modèle pour prendre une décision "optimale", dans le cadre de la décision automatique, ou recommander une décision pertinente à un utilisateur. On peut distinguer deux principales catégories de méthodes formelles étudiées jusqu'à présent : les méthodes numériques et les méthodes basées sur les graphes de préférences. Elles se différencient par la manière dont on choisit de représenter les préférences, et par leur approche du traitement du problème de l'agrégation des préférences. En effet, la situation est simple si tous les indicateurs (critères, votants...) indiquent qu'il faut préférer telle solution à telle autre. Mais comme l'a montré l'exemple ci-dessus, la difficulté apparaît quand il s'agit de comparer deux solutions aux profils contrastés : faut-il privilégier la solution "faible, mais équilibrée", à celle certes meilleure en moyenne, mais déséquilibrée ? Les méthodes numériques (voir Debreu (1954), Fishburn (1970), Keeney et Raiffa (1976)) consistent à obtenir une valeur unique pour chaque alternative, par agrégation des valeurs numériques qui lui sont attachées, permettant ainsi la comparaison directe de chaque élément du corpus des alternatives. Ces méthodes nécessitent une information riche et complète sur les différentes solutions considérées dans le processus décisionnel, ce qui n'est pas toujours possible en pratique. Elles permettent en contrepartie d'obtenir un classement général des alternatives en présence. D'un autre coté, les méthodes basées sur les graphes de préférences (voir Roy (1985), Schärlig (1985), Vincke (1992)) sont plus particulièrement utilisées quand l'information disponible sur les critères est partielle, incomplète, ou simplement difficilement quantifiable. Le problème est alors d'agréger des ordres de préférence. Un certain nombre de travaux, particulièrement développés en théorie du choix social, montrent l'intérêt, mais aussi les difficultés et limites d'une telle approche. En effet, le résultat obtenu n'est plus un classement général, mais des comparaisons par paires d'alternatives, pouvant inclure des incomparabilités ou des cycles de préférence empêchant l'identification d'une "meilleure" solution. De nombreuses applications potentielles existent, dans le contexte du commerce électronique et des systèmes de recommandation, mais aussi dans les mécanismes de décision par vote au sein des organisations et dans les systèmes de vote électronique.

De manière générale, l'approche par les graphes de préférence a été moins étudiée que l'approche numérique. Nous proposons dans cette thèse d'explorer certaines pistes non encore étudiées de cette approche, et poursuivons un double objectif :

- nous proposons de nouvelles méthodes de comparaison et d'agrégation de préférence prenant en compte un ou plusieurs points de référence,
- nous analysons théoriquement ces méthodes, et proposons des exemples applicatifs pour étudier leur pouvoir descriptif et prescriptif.

Problématique de la thèse

En théorie de la décision, de nombreux travaux axiomatiques montrent les difficultés théoriques et pratiques que pose l'agrégation de relations de préférences partiellement conflictuelles. Les théorèmes d'impossibilité existants expliquent d'une part les difficultés rencontrées par les concepteurs de méthodes multicritères reposant sur une modélisation ordinale des préférences mais aussi la difficulté de concevoir des modèles purement qualitatifs pour la décision dans l'incertain. Il faut cependant remarquer que ces résultats reposent, pour la plupart, sur une hypothèse d'indépendance qui n'autorise à définir la préférence entre deux solutions potentielles que par comparaison directe de ces deux solutions. Pourtant, une alternative intéressante existe : il s'agit de comparer les solutions de manière indirecte en examinant leurs mérites respectifs du point de vue de plusieurs points de référence (par exemple, des profils types spécifiant des desiderata, des niveaux d'exigences, des exemples de cas typiques auxquels il convient de se référer). Si ce type de règles de décision (qui rappelle certaines méthodes de classification supervisées développés en Intelligence Artificielle) est déjà fréquemment utilisé en aide à la décision pour certains problèmes de tri multicritère, ou pour la décision à partir de cas, il n'a encore fait l'objet d'études systématiques sur le plan théorique et les fondements axiomatiques de ces méthodes méritent encore d'être développés. Dans cette perspective, l'objet de cette thèse est d'étudier le potentiel descriptif et prescriptif des modèles de comparaison indirecte utilisant des points de référence. Il s'agit donc d'étudier les propriétés formelles des règles d'agrégation associées, de proposer des théorèmes de représentation caractérisant les préférences représentables par ces modèles et enfin de montrer leur apport potentiel en aide à la décision.

Organisation de la thèse

Le premier chapitre présente la théorie de la décision et les principaux apports dans divers domaines, en particulier en informatique. Nous introduisons ensuite les concepts nécessaires à la compréhension de la notion de relation de préférence. Puis nous présentons le cadre axiomatique de nos travaux, en nous appuyant particulièrement sur les domaines de la décision multicritère et la décision dans l'incertain. Enfin, dans la dernière partie du chapitre, nous introduisons la notion de point de référence et voyons de quelle manière elle est présente en psychologie, économie, théorie du choix social, théorie de la décision multicritère ou décision dans l'incertain. Le deuxième chapitre montre comment l'introduction de points de référence dans les relations de préférence en aide à la décision multicritère permet d'obtenir des règles d'agrégation de préférences originales et variées. La présentation d'un modèle général et de ses variantes, ainsi que l'étude axiomatique systématique des modèles proposés mène à la caractérisation de chacune des règles d'agrégation présentées. Dans le troisième chapitre, nous présentons un modèle qualitatif à base de niveaux de référence en décision dans l'incertain. Ce modèle possède certaines caractéristiques particulières : d'une part, le modèle proposé et ses variantes sont purement ordinaux, ce qui différencie nos modèles de la grande majorité des modèles de décision dans l'incertain, qui sont basés sur des critères numériques (qualitatifs ou quantitatifs) ; d'autre part, même si nos méthodes sont purement ordinales, elles permettent, d'un point de vue descriptif, de rendre compte de préférences transitives et/ou de préférences variant suivant le niveau. L'utilisation de niveaux de référence permet alors de dépasser les limites usuelles des méthodes d'agrégation ordinales. Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, nous nous attachons à présenter une procédure d'élicitation des paramètres des méthodes développées précédemment, ainsi que trois applications concrètes de nos modèles en décision multicritères, afin de bien percevoir l'intérêt et les mécanismes mis en oeuvre par ces méthodes.

Chapitre 1

Décision multicritère, décision dans l'incertain

Résumé. Dans ce chapitre, nous présentons le domaine de l'aide à la décision et les apports dans ce domaine en provenance de divers champs universitaires. Après avoir montré le lien étroit unissant l'informatique et l'aide à la décision, nous introduisons les concepts nécessaires à la compréhension de la notion de relation de préférence. Puis nous présentons le cadre axiomatique des deux domaines de l'aide à la décision que nous explorerons lors des prochains chapitres : la décision multicritère et la décision dans l'incertain. Dans le cadre de la décision multicritère, après un panorama rapide des différents types de méthodes existants, nous présentons particulièrement la décision multicritère ordinale et le cadre axiomatique de la règle d'agrégation nommée règle de concordance. Dans le cadre de la décision dans l'incertain, nous nous attachons à présenter le cadre axiomatique proposé par Savage (1954). Enfin, dans la dernière partie du chapitre, nous introduisons la notion de point de référence et voyons de quelle manière elle est présente en psychologie, économie, théorie du choix social, théorie de la décision multicritère ou décision dans l'incertain.

1.1 Théories de la décision

1.1.1 Science(s) de la décision

Prendre une décision, c'est trancher entre plusieurs possibilités et choisir celle qui sera effectivement mise en oeuvre. De la prise de décision simple et quotidienne (fromage ou dessert ? Cravate bleue ou cravate rose ?) à la prise de décision complexe et exceptionnelle (quel site retenir pour le barrage des Trois Gorges ?), chacun a pu faire l'expérience de cette action et donc se retrouver à un moment donné dans la peau d'un *décideur*. C'est souvent sans y réfléchir que nous prenons nos décisions. Mais les hommes de sciences veillent, et un tel acte ne pouvait rester anodin et délaissé par la communauté scientifique ! C'est d'ailleurs en réalité plusieurs communautés qui se sont intéressées à la prise de décision :

- **les économistes** : en micro-économie, il est indispensable de comprendre pourquoi le consommateur décide d'acquérir tel bien plutôt que tel autre, et quelles sont les raisons de son choix, afin de pouvoir l'anticiper et ainsi mieux répondre à sa demande d'une part, et gagner des parts de marché d'autre part. La compréhension de la notion de décision individuelle est donc essentielle pour les économistes, et a été étudiée par nombre d'entre eux. Dans un autre domaine, la prise de décisions stratégiques au sein d'une organisation dépend de nombreux paramètres et a souvent des conséquences importantes sur le développement des activités de cette organisation. Un champ important d'études a été consacré à la rationalisation de la prise de décisions stratégiques, domaine développé également dans le cadre militaire.
- **les psychologues** : la compréhension psychologique et physiologique du processus de prise de décision est un des champs de recherche de la psychologie, et en particulier de la psychologie expérimentale. De nombreux travaux de mises en situation ont permis de valider ou d'infirmer certaines théories de la prise de décision, en mettant en avant des décisions conformes ou non aux résultats attendus.
- **les sociologues** : en sociologie des organisations, l'étude de la prise de décision concerne particulièrement le processus de décision collective : par quel processus un groupe de personnes ayant chacune un avis sur une question va-t-il pouvoir prendre une décision. En particulier, le problème se pose à chaque élection : la grande variété des processus électifs existants montre bien qu'aucune solution entièrement satisfaisante n'a été trouvée. Au sein des organisations, la sociologie de la décision amène à décrire les processus décisionnels mis en place, mais aussi à comprendre sur quel système de croyances les comportements des individus sont basés afin de pouvoir les décrire rationnellement.

- **les mathématiciens** : les statisticiens et probabilistes ont depuis longtemps utilisé leurs résultats pour éclairer la prise de décision en contexte incertain. S'appuyant sur les événements passés pour inférer l'avenir, ils ont pu développer des théories basées sur l'espérance d'une situation donnée pour prendre des décisions. Par ailleurs, en programmation mathématique et en recherche opérationnelle, l'aide à la décision est vue comme la recherche de l'optimum d'une fonction. La plupart des travaux en mathématique de la décision concernent donc la modélisation de préférence et la production d'algorithmes performants de recherche d'un optimum.
- **les informaticiens** : les systèmes informatiques sont de plus en plus amenés à prendre des décisions de manière autonome ou en lien avec un utilisateur. Il peut s'agir d'aider à une décision humaine extrêmement importante, nécessitant une préparation rationnelle des décisions, ou il peut s'agir d'une décision automatique, où un agent autonome est amené à prendre de nombreuses décisions que l'on souhaite efficaces dans la majorité des cas. Le développement du domaine de l'intelligence artificielle a mis en lumière de nouveaux besoins de modélisation de la prise de décision, et de nouvelles solutions permettant des prises de décisions effectives dans le cas de systèmes autonomes par exemple.

Le prix d'économie décerné par la banque de Suède en l'honneur d'Alfred Nobel a souvent permis d'honorer des travaux particulièrement intéressants en théorie de la décision, et ce même si les auteurs distingués n'étaient pas considérés comme des économistes. Parmi les récipiendaires du prix ayant particulièrement enrichi par leurs apports la théorie de la décision, on peut noter K.J Arrow (en 1972), M. Allais (en 1988), A. Sen (en 1998), économistes, mais aussi J. Nash (en 1994) et R. Aumann (en 2005), mathématiciens, H. Simon (en 1978), sociologue ou D. Kahnemann (en 2002), psychologue. La grande variété des parcours des chercheurs et praticiens de la science de la décision permet d'avoir des éclairages très variés sur les types de problèmes rencontrés, et nourrit la richesse des différentes approches. C'est ainsi que l'on peut trouver des articles liés à la théorie de la décision dans des journaux d'horizons divers tels que, sans exhaustivité : Econometrica, European Journal of Operationnal Research, 4'OR, Journal of Artifical Intelligence, Journal of Mathematical Psychology, Journal of Political Economy, Mathematic and Social Science, Operation Research, Public Choice, Social Choice and Welfare, Theory and Decision, Management Sciences...

1.1.2 Aide à la décision et intelligence artificielle

La modélisation de la prise de décision est donc au coeur des préoccupations d'une importante communauté scientifique, ce qui a permis l'émergence de nombreux modèles théoriques. Prendre une décision est un acte simple quand toutes les alternatives sont connues, qu'elles sont peu nombreuses, qu'elles peuvent être évaluées de manière unique, et qu'il n'y a qu'une seule personne qui décide. Cependant, si les alternatives ou leurs conséquences sont imparfaitement connues, si leur nombre est trop important pour qu'une approche systématique puisse être envisagée, si elles doivent être évaluées selon plusieurs critères partiellement conflictuels, ou si plusieurs personnes sont amenées à se prononcer, alors la prise de décision devient un acte complexe (et passionnant à étudier). Chacune de ces difficultés a donné naissance à un champ particulier de recherche. On distingue donc souvent, sans exhaustivité, les domaines suivants :

1. **La décision en environnement incertain.** On parle d'environnement incertain quand les futurs états du monde sont inconnus. Le décideur ne connaît donc pas avec exactitude les conséquences de ses actes, qui peuvent varier suivant l'état de l'environnement extérieur au moment de la réalisation. Il est donc a priori difficile de choisir une action qui pourra s'avérer très pertinente dans un cas particulier, mais peut être moins dans d'autres cas.

   Exemple 1 *Lors d'un pari sur une course de chevaux, le résultat de la course n'est pas connu (sauf en cas de tricherie !) au moment où le parieur choisit le cheval sur lequel il va miser. Les conséquences de la décision, gain ou perte d'argent, dépendent de l'état de la nature après la course (quel cheval a gagné).*

   Depuis Knight (1921), on distingue la décision dans le risque de la décision dans l'incertain. La décision est dite dans le risque si on suppose qu'il existe une fonction de probabilité sur les états de la nature, et que cette fonction de probabilité est parfaitement connue du décideur au moment où il prend sa décision. La décision est dite dans l'incertain dans les autres cas. De nombreux outils formels ont été développés dans le cadre de la décision dans le risque et l'incertain : en particulier, le modèle d'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern (1947) et celui de l'utilité espérée subjective de Savage (1954) sont considérés comme étant les bases d'une théorie classique de la décision dans le risque ou l'incertain. L'un comme l'autre aide à la prise de décision par l'affectation à chaque alternative d'une valeur calculée comme étant l'espérance d'une fonction d'utilité sur les résultats, obtenue par rapport à une mesure de probabilité sur les états futurs de la nature : mesure de probabilité unique et objective dans le cas de la décision dans le risque (Von Neumann et Morgenstern), ou mesure subjective et dépendant du décideur dans le cas de la décision dans l'incertain (Savage). Les ouvrages collectifs de Bouyssou et al. (2000) et Bouyssou et al. (2006) présentent un panorama très complet de la décision dans le risque et l'incertain.

2. **L'optimisation combinatoire** : dans le cas où les alternatives sont trop nombreuses pour pouvoir être dénombrées, il est nécessaire de faire appel à des algorithmes spécifiques permettant de détecter les solutions optimales en un sens précisé à l'avance.

Exemple 2 *Le problème du voyageur de commerce (introduit par Hamilton, popularisé par Menger) consiste à trouver le plus court chemin passant par chacune des villes d'un ensemble déterminé à l'avance. Le nombre de circuits possibles étant égal à la factorielle du nombre des villes, ce problème devient très vite d'une taille trop importante pour pouvoir faire l'objet d'une comparaison exhaustive de tous les circuits possibles afin d'en retenir le meilleur. Il faut alors utiliser des algorithmes spécifiques permettant d'obtenir des solutions approximatives dans un temps raisonnable, ou des solutions optimales exactes dans des temps parfois très longs.*

Depuis Euler (1736) ou Hamilton (1856), les avancées techniques dans le domaine informatique, accroissant d'année en année la vitesse de calcul des ordinateurs, de même que les progrès algorithmiques ont permis à de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire de trouver une solution. Les travaux des pionniers de la recherche opérationnelle ont été suivis par une multitude de chercheurs au cours de ces cinquante dernières années (voir par exemple Gondran et Minoux (1995) pour un ouvrage de référence).

3. **la théorie du choix social** : cette théorie étudie la problématique du passage de préférences individuelles à une préférence collective. La prise de décision collective induit un certain nombre de problèmes ayant trait à la cohérence de la décision en présence d'avis divergents de la part des individus. En particulier, en théorie des élections, l'étude des procédures de vote amène à considérer de manière systématique les propriétés inhérentes à telle ou telle procédure en terme d'effets sur le résultat final à partir des préférences initiales.

   Exemple 3 *En démocratie, le choix de représentants du peuple amenés à légiférer se fait sur la base d'élections. Cependant, le résultat de ces élections peut être totalement différent suivant le mode de scrutin : scrutin majoritaire à un tour, scrutin majoritaire à deux tours, scrutin proportionnel...*

   On fait généralement remonter l'origine de la théorie du choix social aux travaux fondateurs sur les processus électoraux proposés par Borda (1781) et Condorcet (1785). Plus récemment, la théorie du choix social s'est développée particulièrement à la suite des travaux de Arrow (1951) montrant l'impossibilité d'obtenir une procédure de vote respectant des propriétés considérées comme naturelles en démocratie. De nombreux articles sur les mécanismes d'agrégation de préférences individuelles, les mécanismes de votes ou les mécanismes de partage équitable ont été publiés depuis tant dans des revues de sciences politiques ou économiques que dans des revues de mathématiques ou de psychologie. Parmi les ouvrages de référence en ce domaine, nous pouvons citer ceux de Arrow (1974) et Arrow et al. (2002), et parmi les travaux de référence ceux de Aizerman et Aleskerov (1995), Batteau et al. (1981), Fishburn (1973), Kelly (1987), ou Pattanaik et Salles (1983).

4. **la décision multicritère** : en décision multicritère, on suppose que les différentes alternatives se présentant au décideur peuvent être décrites sur un certain nombre de critères. Les valeurs des alternatives sur ces critères représentent la prise en compte de points de vue diversifiés , en général non réductibles à un seul critère. Par exemple, lors du choix d'un projet industriel, nous pouvons considérer les points de vues économiques, sociaux, environnementaux, etc : un projet relativement bon suivant un critère le sera souvent beaucoup moins suivant un autre critère. Ces critères sont souvent La difficulté est d'arriver à obtenir une comparaison relative des alternatives, afin de guider le choix du décideur vers la solution qui lui paraîtra optimale. En effet, la notion d'optimisation "dans l'absolu" est vide de sens en décision multicritère, car il n'existe généralement pas d'alternative optimisant tous les critères simultanément. Il est donc nécessaire de prendre en compte de l'information supplémentaire, en particulier l'importance relative de chaque critère et les relations existantes entre les différents critères.

   Exemple 4 *Choisir un logement n'est pas une affaire aisée. Il est nécessaire de prendre en compte différents critères parfois contradictoires : le prix que l'on cherche à minimiser, la surface que l'on cherche à optimiser suivant ses besoins (ni trop petite, ni trop grande), la situation géographique, l'aménagement intérieur, l'état général du logement au moment de l'aménagement... Ces critères ne sont pas réductibles à un seul, tel une moyenne, car des interactions entre critères peuvent apparaître : l'état général du logement ne servira qu'à départager deux logements qui satisfont déjà la condition de surface par exemple.*

   Différents types de modèles ont été développés en théorie de la décision multicritère : d'un côté, les approches liées de manière générale à une utilité multi-attribut, en particulier une utilité additive (voir Leontief (1947), Debreu (1954, 1960), Fishburn (1970), Keeney et Raiffa (1976)) ; d'un autre côté, les approches basées sur l'utilisation de graphes de préférence, aboutissant non pas à un critère unique de synthèse mais simplement à une relation de préférence de synthèse (voir Roy (1985), Schärlig (1985), Vincke (1992), Roy et Bouyssou (1993), Pomerol et Barba-Romero (1993), Perny et Roubens (1998)).

Récemment, certains travaux ont exploré des problèmes se situant à l'intersection de deux (ou plus) de ces domaines, comme par exemple l'optimisation combinatoire multicritère : on trouvera des états de l'art récents de ce domaine dans Ulungu et Teghem (1994), Ehrgott et Gandibleux (2000), Colette et Siary (2002), Spanjaard (2003).

Les quatre domaines que sont la décision dans l'incertain, l'optimisation combinatoire, le choix social et la théorie de la décision multicritère ont chacun développé des liens étroits avec l'informatique. En effet, en optimisation combinatoire, la puissance de calcul des ordinateurs et la recherche théorique d'algorithmes de plus en plus performants permettent de résoudre en un temps raisonnable, de manière exacte ou approchée, des problèmes apparaissant comme trop complexes il y a quelques années encore. En aide à la décision, la multiplicité des systèmes informatiques (logiciels) destinés à assister une décision humaine permet d'exploiter la richesse des modèles existants en décision dans l'incertain ou en décision multicritère. Dans le domaine de l'intelligence artificielle enfin, les systèmes intelligents s'acquittant de manière autonome de tâches décisionnelles diverses nécessitent l'exploitation des résultats tant dans le domaine de la décision collective que dans ceux de la décision dans l'incertain et de la décision multicritère :

- dans un environnement complexe, un agent autonome reçoit de nombreuses informations complémentaires, correspondant à autant de points de vue parfois contradictoires. L'analyse de ces informations grâce à **l'analyse multicritère** lui permet de confronter, hiérarchiser et agréger ces différentes informations sur son environnement afin de pouvoir prendre une décision optimale en fonction de son objectif.
- l'environnement dans lequel évolue un agent intelligent, et plus encore l'évolution de cet environnement n'est que très rarement connu avec précision. Il est alors nécessaire de se fonder sur des modèles de **décision dans l'incertain** pour pouvoir prendre une bonne décision de manière rationnelle.
- dans le cas où plusieurs agents autonomes s'acquittent ensemble d'une tâche collective, il est essentiel de bien réfléchir à la manière dont chacun pèsera sur la décision finale. Les résultats théoriques en matière de **décision collective** sont alors essentiels pour assurer la participation effective des différents agents au processus décisionnel.

Nos travaux se situent particulièrement dans les domaines de la décision multicritère et de la décision dans l'incertain. Nous allons donc détailler ces deux domaines dans les parties suivantes.

1.1.3 Approche axiomatique et approche pragmatique

L'activité des chercheurs en aide à la décision est généralement tournée vers l'un des deux aspects suivants :

- L'approche "pragmatique" : elle consiste à proposer une ou plusieurs méthodes d'aide à la décision à la communauté des décideurs et des experts. Il s'agit de trouver une manière pertinente d'agréger les informations disponibles dans un cas précis afin de pouvoir répondre à la question que se pose le décideur. Il faut ensuite décrire cette méthode à l'aide de certains paramètres, et proposer un processus d'utilisation de cette méthode. La production d'un outil informatique (logiciel) spécifique permet enfin l'utilisation concrète de cette méthode. On consultera avec profit la bibliographie d'applications concrètes commentées dans l'ouvrage de Roy et Bouyssou (1993) pour des exemples d'articles exposant l'utilisation de telle ou telle méthode d'aide à la décision multicritère.

– L'approche "axiomatique" : cette approche s'intéresse à la caractérisation des méthodes d'aide à la décision. Proposer une axiomatique pour une règle de décision, c'est répondre à la question : quelles propriétés de la relation de préférence obtenue à partir d'une certaine méthode sont caractéristiques de cette méthode ? Sur quelles hypothèses implicites ou explicites s'appuient-elles, et possèdent-elles d'éventuels biais de résultat ? Dans une vision prescriptive, l'approche axiomatique permet ainsi de proposer l'utilisation de telle ou telle méthode suivant les propriétés voulues sur la relation de préférence résultante. Elle permet aussi, par l'intermédiaire des théorèmes d'impossibilité (voir par exemple Arrow (1951)) de montrer que certaines propriétés souhaitables sur une relation de préférence ne sont pas compatibles entre elles. Pour une analyse détaillée des problèmes de l'analyse axiomatique, on consultera utilement les ouvrages de bases tel que Sen (1986) pour la théorie du choix social, Krantz et al. (1971), Roberts (1979), Fishburn (1970) pour les procédures d'agrégation multicritère ou, plus récemment, Bouyssou et al. (2006) pour la décision dans l'incertain. La caractérisation des méthodes existantes, ainsi que l'étude des fondements théoriques de ces méthodes doit par ailleurs permettre de trouver des méthodes nouvelles, possédant un corpus de propriétés souhaitables, et d'obtenir des logiciels utilisables d'aide à la décision. Enfin, les chercheurs adoptant une approche axiomatique en aide à la décision essaient aussi d'engendrer une théorie unificatrice des différentes méthodes (voir par exemple, en plus des ouvrages cités précédemment, Fishburn (1976b) ou Bouyssou et Pirlot (2002b)).

Les travaux présentés ici se situent très clairement dans le cadre de l'approche axiomatique, et participent d'une double préoccupation. D'une part, nous avons le souci de proposer de nouvelles méthodes d'agrégation de préférences, basées sur la prise en compte de points de référence, et d'élargir ainsi la capacité descriptive et prescriptive des modèles existants. D'autre part, nous visons à la production de théorèmes de représentation, permettant une meilleure compréhension de ces nouvelles méthodes d'agrégation. Les théorèmes de représentation constituent des outils essentiels pour la modélisation axiomatique des préférences : il s'agit de caractériser par un ensemble de propriétés nécessaires et suffisantes un modèle de préférence donné. Nous allons nous attacher ici à établir des théorèmes de représentation de règles de préférence faisant intervenir un ou plusieurs points de référence. Dans une approche descriptive, nous supposons que la relation de préférence est connue, et nous cherchons les conditions caractéristiques qu'elle doit satisfaire pour pouvoir être représentée par le modèle proposé.

1.1.4 A vos ordres !

Une relation de préférence sur les éléments d'un ensemble $\mathcal{X}$ est une relation binaire sur les éléments de cet ensemble, portant une sémantique particulière. Il est donc fondamental, pour étudier les relations de préférence, de pouvoir effectivement les interpréter comme des relations binaires. C'est pourquoi nous détaillons dans cette partie les propriétés des différentes relations d'ordre existantes. Le lecteur désireux d'approfondir ces notions et les liens avec les relations de préférence pourra utilement consulter Krantz et al. (1971), Roberts (1979), Doignon et al. (1986) ou Pirlot et Vincke (1997).

Relations binaires et relations d'ordre

Rappelons ici quelques propriétés fondamentales des relations binaires.

Définition 1 : propriétés d'une relation binaire
Une relation binaire B dans $\mathcal{X}$ est dite :
- **réflexive** *si* $\forall x \in \mathcal{X}$, xBx
- **irréflexive** *si* $\forall x \in \mathcal{X}$, *non*$(xBx)$
- **symétrique** *si* $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $xBy \Rightarrow yBx$
- **asymétrique** *si aucun couple* $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ *ne vérifie* $(xBy \wedge yBx)$
- **transitive** *si* $(xBy \wedge yBz) \Rightarrow xBz$
- **totale (ou complète)** *si pour tout couple* $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, xBy *ou* yBx. *Sinon, la relation est dite partielle.*

A partir de ces propriétés, nous pouvons définir deux types de relations binaires sur $\mathcal{X}$ permettant de comparer les différents éléments de $\mathcal{X}$.

Définition 2 : ordre strict
On appelle ordre strict toute relation binaire asymétrique et transitive.

Définition 3 : équivalence
On appelle équivalence toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Structure des relations de préférence

Nous détaillons ici les différentes structures de relations manipulées dans le cadre des travaux en décision. Soit $\succsim$ une relation binaire sur $\mathcal{X}$. On peut déduire de $\succsim$ une relation asymétrique et une relation symétrique. La partie asymétrique de la relation $\succsim$ est notée $\succ$ et est définie par $x \succ y \iff (x \succsim y$ et non$(y \succsim x))$. La partie symétrique de la relation $\succsim$ est notée $\sim$ et est définie par $x \sim y \iff (x \succsim y$ et $y \succsim x)$. Si $\succsim$ est transitive, les relations $\succ$ et $\sim$ sont aussi transitives.

Définition 4 : structure de préordre
La relation binaire $\succsim$ est un préordre sur $\mathcal{X}$ si elle est réflexive et transitive. On peut déduire d'un préordre $\succsim$ les relations $\succ$ et $\sim$ telles que :
- *$\succ$ est asymétrique et transitive, i.e. un ordre strict*
- *$\sim$ est réflexive, symétrique et transitive, i.e. une relation d'équivalence*

Un préordre $\succsim$ se décompose donc en une relation d'ordre strict $\succ$ et une relation d'équivalence $\sim$. Si $\succsim$ est total sur $\mathcal{X}$, on parle de préordre total, sinon on parle de préordre partiel.

Définition 5 : structure d'ordre large
On dit que $\succsim$ est un ordre large sur $\mathcal{X}$ si :
- *$\succ$ est asymétrique et transitive, i.e. un ordre strict*
- *$\sim$ est l'égalité, i.e. $x \sim y \Rightarrow x = y$*

Si $\succsim$ est total sur $\mathcal{X}$, on parle d'ordre total. S'il existe des incomparabilités, on parle d'ordre partiel.

Définition 6 : quasi-transitivité
On dit que $\succsim$ est une relation quasi-transitive sur $\mathcal{X}$ si seule sa partie asymétrique $\succ$ est transitive.

En résumé, un ordre large est une relation binaire qui permet de classer sans ex-aequo les éléments de $\mathcal{X}$, et un préordre est une relation binaire qui permet de les classer avec des ex-aequo. Un préordre quasi-transitif est un préordre qui n'est pas transitif sur la partie symétrique (on peut avoir $a \sim b$, $b \sim c$ et $a \succ c$).

Exemple 5 *Prenons trois exemples sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{a, b, c, d, e\}$.*

1. *Exemples d'ordre large :*

	a	b	c	d	e
a	$\sim$	$\prec$	$\succ$	$\prec$	$\succ$
b	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\prec$	$\succ$
c	$\prec$	$\prec$	$\sim$	$\prec$	$\succ$
d	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\sim$	$\succ$
e	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$

Cet ordre peut aussi s'écrire $d \succ b \succ a \succ c \succ e$.

La relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$, le classement final des clubs du championnat de France de football, sont des ordres larges.

2. *Exemples de préordre :*

	a	b	c	d	e
a	$\sim$	$\prec$	$\sim$	$\prec$	$\succ$
b	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\sim$	$\succ$
c	$\sim$	$\prec$	$\sim$	$\prec$	$\succ$
d	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\sim$	$\succ$
e	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$

Ce préordre peut aussi s'écrire $d \sim b \succ a \sim c \succ e$.

Le rang à l'arrivée des cyclistes lors d'une étape du Tour de France, où tous les cyclistes d'un peloton sont crédités du même temps, est un préordre.

3. *Exemples de quasi-ordre :*

	a	b	c	d	e
a	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\prec$	$\succ$
b	$\sim$	$\sim$	$\succ$	$\prec$	$\succ$
c	$\sim$	$\prec$	$\sim$	$\prec$	$\succ$
d	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\sim$	$\succ$
e	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$

On note que $a \sim c$, $a \sim b$ *mais* $b \succ c$.

La relation "est plus lourd que", obtenue à l'aide d'une balance de précision 100g sur trois objets A,B,C de poids respectifs 2.06kg, 2kg, 1.94kg, est un quasi-ordre car la balance ne distingue pas la différence de poids entre A et B, ni entre B et C (différence de poids inférieure à la précision de la balance), mais distingue A de C.

Relations usuelles

Le modèle classique de la modélisation de préférence (voir Roy (1985), Vincke (1989)) définit quatre types de relations : la relation de préférence stricte, la relation d'indifférence, la relation de préférence large, et la relation d'incomparabilité.

Définition 7 : relations de préférences

1. **Préférence stricte :** *cette relation correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur de l'une des deux alternatives. Nous noterons* $a \succ b$ *(ou* aPb*) une situation dans laquelle* a *est significativement préféré à* b*. Cette relation est une relation irréflexive et asymétrique.*
2. **Indifférence :** *cette relation correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre les deux alternatives. Nous noterons* $a \sim b$ *(ou* aIb*) une situation où* a *et* b *apparaissent indifférents aux yeux du décideur. Cette relation est considérée comme réflexive et symétrique.*
3. **Préférence large :** *cette relation correspond à l'existence de raisons claires pour infirmer une préférence stricte de* b *sur* a*, sans pour autant être capable de dire si* a *est strictement préféré à* b *ou s'il lui est indifférent. Nous noterons* $a \succsim b$ *(ou* aSb*)*

cette situation. La relation de préférence stricte $\succ$ apparaît alors comme la partie asymétrique de $\succsim$, l'indifférence $\sim$ étant alors la partie symétrique de la relation de préférence large $\succsim$.

4. **Incomparabilité :** *cette relation sera détaillée ci-après.*

Si la relation $\succsim$ est complète, les deux relations $\succ$ et $\sim$ sont ainsi complémentaires. Lorsque que deux actions sont indifférentes, rien ne permet d'affirmer une préférence dans un sens ou dans l'autre. De même, si il existe une préférence entre a et b, les deux actions ne peuvent être indifférentes.

$$a \sim b \iff \neg(a \succ b \vee b \succ a).$$

Nous utiliserons par la suite le vocable de *relation de préférence* pour désigner une relation $\succsim$ sur un espace d'alternatives, en parlant d'indifférence entre a et b si $a \sim b$, de préférence stricte de a sur b si $a \succ b$ et de préférence large de a sur b si $a \succsim b$.

Transitivité

Les relations $\succsim$ étant sensées représenter des préférences sur des objets, il peut apparaître naturel, dans un premier temps, de considérer ces relations comme étant transitives : si je préfère l'objet a à l'objet b, et l'objet b à l'objet c, il y a toutes les chances pour que je préfère aussi l'objet a à l'objet c. C'est par exemple le cas sur l'ensemble des nombres entiers, si l'on identifie la relation "supérieur à" ($>$) à la préférence et la relation "égal à" à l'indifférence. Il n'en est cependant rien en pratique, et nombreux sont les exemples de relations de préférence non transitives, (cf exemple ci-dessous). Dans le reste de ce document, nous ne supposerons pas $\sim$ et $\succ$ transitives *a priori*.

Exemple 6 *Intransitivité de l'indifférence*
Une alternative a peut être parfaitement indifférente à deux autres b et c, sans que celles-ci soient elles-mêmes indifférentes entre elles. C'est le cas par exemple s'il existe un seuil d'indifférence. L'exemple classique (voir par exemple Luce (1956)) est celui des tasses de café numérotées $t_0, \ldots, t_{100}$, telles que la tasse t_i contiennent i centièmes d'un morceau de sucre. Considérons une relation binaire $\succsim$ signifiant "$x \succ y \iff x$ apparaît comme plus sucrée que y" et "$x \sim y \iff x$ apparaît comme étant aussi sucrée que y". Pour la plupart des dégustateurs, on ne peut faire la différence entre la tasse t_i et t_{i+1} car la différence de taux de sucre est trop ténus.. D'où $t_i \sim t_{i+1}$. Par contre, la tasse non sucrée n'apparaît pas comme indifférente à la tasse sucrée avec un morceau entier : $t_0 \not\sim t_{100}$. Il n'y a donc pas transitivité de l'indifférence.

Exemple 7 *Intransitivité de la préférence*
L'intransitivité de la préférence stricte est connue depuis longtemps, en particulier depuis Condorcet (1785) sur les procédures de vote à la majorité. Considérons trois amis décidant d'aller au cinéma, et ayant le choix entre un film d'amour (a), un film de série B (b) et une comédie (c). Les préférences sont les suivantes :

Personne 1	$a \succ_1 b \succ_1 c$
Personne 2	$b \succ_2 c \succ_2 a$
Personne 3	$c \succ_3 a \succ_3 b$

Une procédure de choix collectif consiste à agréger les trois relations $\succsim_1$, $\succsim_2$, $\succsim_3$ *en une relation de préférence collective* $\succsim$. *Si la procédure d'agrégation consiste à préférer collectivement l'alternative recueillant la majorité des suffrages, nous constatons, en comparant les alternatives deux à deux, que* $a \succ b$, $b \succ c$ *et* $c \succ a$ *: la préférence collective n'est pas transitive.*

Relation d'incomparabilité

Il arrive que le décideur ne puisse (ou ne veuille) exprimer une préférence ou une indifférence entre deux alternatives. Nous parlerons alors d'incomparabilité des deux alternatives, notée aRb si a et b sont incomparables. La relation R est symétrique, irréflexive, et naturellement non transitive. Ce type de situation peut se rencontrer lorsque les informations sur les alternatives sont insuffisantes pour trancher, ou quand les deux alternatives considérées sont très différentes l'une de l'autre, avec un profil très contrasté pour chacune.

Exemple 8 *Incomparabilité*
Prenons le cas où un individu souhaite acheter une nouvelle voiture. Les critères retenus pour son choix sont : le confort, l'espace intérieur, la consommation, la vitesse maximale, l'esthétique, tous notés de 0 (moins bonnes performances) à 10 (meilleures performances). Quatre voitures sont retenues :

Voiture	*type*	*confort*	*espace intérieur*	*consommation*	*vitesse*	*esthétique*
V_1	*familiale*	*7*	*8*	*7*	*4*	*2*
V_2	*familiale*	*8*	*9*	*7*	*4*	*3*
V_3	*sportive*	*2*	*3*	*2*	*8*	*8*
V_4	*sportive*	*3*	*3*	*4*	*9*	*8*

Il est facile d'imaginer que $V_2 \succsim V_1$, *car sur chaque critère la performance de* V_2 *est meilleure que celle de* V_1 *(on dit qu'il y a* dominance *de* V_2 *sur* V_1*). De même, on voit que* $V_4 \succsim V_3$ *car* V_4 *domine* V_3. *Mais que dire de* V_1 *et* V_3, *ou* V_1 *et* V_4 *? Il est difficile de comparer des voitures tellement différentes. En l'absence d'informations supplémentaires on peut être amener à les déclarer incomparables.*

Dans le cadre de la théorie de la décision, il est préférable de limiter le nombre de cas d'incomparabilité, même si le fait de ne pouvoir comparer deux alternatives est déjà une information en soi. C'est pourquoi de nombreuses méthodes permettant une comparaison plus fine que la simple relation de dominance ont été développées tant dans le cadre de la décision multicritère que de la décision dans l'incertain, ainsi que nous allons le présenter dans les sections 1.2 et 1.3.

1.2 Décision multicritère

1.2.1 Cadre de la décision multicritère

Il existe une grande diversité d'approches et de modèles en théorie de la décision multicritère. Cet état de fait est justifié par la grande variété des situations pratiques dans lesquelles le décideur peut se trouver. En particulier, il est nécessaire de déterminer les paramètres suivants :

- la nature de l'ensemble des alternatives (continu ou discret), et la taille de cet ensemble.
- la nature des informations servant de primitives à l'évaluation des alternatives (ordinale, cardinale).
- la méthode d'agrégation des critères à utiliser (critère unique de synthèse ou relation de synthèse).
- la nature des préférences (stable dans le temps ou évolutive), pour évaluer la nécessité d'une approche interactive.

A partir de ces différents paramètres, il est possible de choisir la méthode la plus adaptée au cas étudié :

1. Si l'ensemble des alternatives possibles est continu, défini en compréhension par un ensemble de contraintes, les difficultés sont principalement la recherche de solutions réalisables, dont il existe potentiellement une infinité, et la sélection de la meilleure d'entre elle. Plusieurs méthodes de recherche de la meilleure alternative existent basées sur la construction d'un critère unique et l'optimisation de ce critère :
   (a) "Goal Programming" : cette méthode consiste à fixer un niveau d'aspiration pour chaque critère (la cible à atteindre), puis à chercher la solution dans l'espace des alternatives qui minimise une somme pondérée des déviations à cette cible (Charnes et al. (1955)). Généralement, comme les critères sont conflictuels, la cible ne peut pas être atteinte par une alternative réalisable. La solution se rapprochant le plus de la cible est alors obtenue par un algorithme d'optimisation. Cependant, si la cible a été sous-estimée, il peut arriver que certaines alternatives soient meilleures que la cible. La méthode donne alors une bonne solution, satisfaisant les niveaux requis, mais pas une solution meilleure

que la cible même si celle-ci existe. De plus, la somme pondérée fait qu'un très mauvais score sur un critère peut être totalement compensé par un très bon score sur un autre critère : le "goal programming" ne favorise pas les solutions de compromis face aux solutions très déséquilibrées.

(b) Programmation multi-objectifs : comme pour la méthode du "goal programming", la programmation multi-objectifs consiste à fixer un point de référence dans l'espace des alternatives et à trouver une alternative la plus proche possible de ce point. La différence porte sur la norme utilisée pour calculer la distance entre l'alternative de référence et l'alternative solution. La norme de Tchebycheff apparaît aujourd'hui comme le meilleur choix pour favoriser des solutions de compromis (Benayoun et al. (1971), Roy (1976), Wierzbicki (1980, 1999)). Il est possible aussi de rechercher, de la même manière, non pas la meilleure solution, mais un sous-ensemble d'alternatives efficaces représentant un bon compromis (Steuer et Choo (1983), Steuer (1986), Lévine et Pomerol (1986), Vanderpooten et Vincke (1989)).

(c) Exploration interactive de la frontière de Pareto : basées sur les techniques d'optimisation précédentes, les méthodes interactives permettent au décideur d'interagir avec l'ordinateur pour préciser ses préférences. Le processus de décision consiste alors en une alternance de phases de calculs produisant un optimum local satisfaisant, et de phases de dialogue où le décideur peut préciser ses choix pour permettre une recherche affinée de la solution optimale. Les principales difficultés de cette approche sont d'une part le temps de calcul, qui doit être suffisamment court pour permettre une interaction en temps réel, et d'autre part le compromis entre la liberté laissée au décideur de changer les paramètres et la nécessité de conserver un processus convergent.

2. Si l'ensemble des alternatives est discret et fini, il existe plusieurs méthodes dépendant de la taille de l'ensemble : défini en compréhension, avec un nombre combinatoire d'éléments, ou en extension avec un petit nombre d'éléments.

   (a) dans le cas combinatoire, que l'ensemble des alternatives soit discret ou continu, la difficulté du problème est due au fait de ne pas connaître explicitement l'ensemble des alternatives potentielles. Il est donc nécessaire de simultanément détecter les solutions réalisables et déterminer quelles sont les meilleures en considérant plusieurs critères. Dans de nombreux cas, le problème combinatoire sera simplifié :

   – soit par la synthèse des critères en un unique critère de synthèse, afin de se ramener à un problème classique d'optimisation. Cependant, le critère de synthèse n'est généralement pas linéaire, ni même calculable en un temps linéaire, ce qui rend l'optimisation particulièrement difficile quand le nombre d'instances croît.

– soit en considérant un sous-ensemble des alternatives potentielles, ce qui évacue l'aspect combinatoire du problème. La difficulté est alors de valider la représentativité de l'échantillon des alternatives retenues. Cependant dans ce cas la solution trouvée n'est qu'approximative, et il n'y a pas d'autres possibilités que l'exploration systématique (énumération implicite) des alternatives potentielles pour résoudre exactement le problème. Depuis Hansen (1980), ce problème a été étudié par plusieurs auteurs dont on trouvera un aperçu dans Ehrgott et Gandibleux (2000).

(b) dans le cas où le nombre d'alternatives est peu élevé, les problèmes de décision permettent de porter une attention accrue aux interactions entre les critères. Comme il sera détaillé dans la section 1.2.3 ci-dessous, il existe deux principales méthodes pour comparer les alternatives entre elles : passer par un critère unique de synthèse, à travers une fonction d'utilité additive (Keeney et Raiffa (1976)) ou non additive (Grabisch (1996), Grabisch et Roubens (2000)) ; ou comparer critère par critère les alternatives afin d'obtenir une relation de surclassement de synthèse (voir Roy (1968, 1973, 1985, 1996)).

Les travaux présentés dans cette thèe se situent dans le cadre des ensembles d'alternatives discrètes non combinatoire.

1.2.2 Définitions et notations

Formellement, un problème de décision multicritère est caractérisé par un ensemble d'alternatives $\mathcal{X}$, et un ensemble d'attributs $N = \{1, \ldots, n\}$ utilisés pour décrire les alternatives. Soit $(\mathcal{X}_i, \succsim_i)$ une échelle ordonnée finie où $\mathcal{X}_i$ est l'ensemble des valeurs prises par les alternatives de $\mathcal{X}$ sur l'attribut $i \in N$, et $\succsim_i$ est un préordre complet sur $\mathcal{X}_i$. On peut alors voir l'ensemble $\mathcal{X}$ comme le produit cartésien des ensembles attributs, et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$ est alors appelé l'espace multicritère. On suppose que chaque ensemble $\mathcal{X}_i$ possède au moins trois niveaux différents.
On note $C(x, y)$ l'ensemble $\{j \in N,\ \ x_j \succsim_j y_j\}$. On note $z = (x_A, y_{-A})$ l'élément de $\mathcal{X}$ tel que $z_j = x_j$ si $j \in A$ et $z_j = y_j$ si $j \notin A$. On note également par convention simplificatrice (x_i, y_{-i}) l'élément $(x_{\{i\}}, y_{-\{i\}})$.

Une procédure d'agrégation consiste à obtenir une relation de préférence globale $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ à partir des valeurs prises par les alternatives sur chaque critère $\mathcal{X}_i$. Montrons sur un exemple la modélisation et la problématique d'une situation de décision multicritère :

Exemple 9 *Une agence de voyage souhaite pouvoir proposer, sur son site internet, un classement des séjours de vacances (clubs, hôtels, chambres d'hôtes...) personnalisé sui-*

vant les demandes du client. Elle a identifié quatre critères principaux sur lesquels se basent ses clients pour effectuer leurs choix, une fois la destination sélectionnée : le prix (1), le confort (2), la proximité du site touristique choisi (3) et l'avis général des guides touristiques les plus connus (4).

Les performances de chaque lieu potentiel sont évaluées suivant trois échelles différentes. Le prix est en euros (et d'autant plus apprécié qu'il est bas !), le confort est noté de zéro à cinq étoiles, la distance au site choisi (que l'on cherche à minimiser) est répartie en quatre catégories (A : sur place ; B : à proximité ; C : dans les environs, D : éloigné) et l'avis des guides est modélisé par un des trois niveaux "+", "=" ou "-".

Nous pouvons considérer les quatre alternatives suivantes :

	1	2	3	4
x^1	40	***	B	+
x^2	60	***	C	=
x^3	80	****	C	+
x^4	60	**	A	=

L'ensemble $\mathcal{X}$ est le produit cartésien $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$. Nous ne connaissons ici que le sous-ensemble de $\mathcal{X}$ composé des quatre alternatives x^1, x^2, x^3, x^4, décrites sur quatre critères. D'après les informations en notre possession sur les échelles des critères, nous pouvons considérer que $\mathcal{X}_1$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{X}_2 = \{*; **; ***; ****; *****\}$, $\mathcal{X}_3 = \{A, B, C, D\}$ et $\mathcal{X}_4 = \{+, =, -\}$. Il est facile de comparer les alternatives x^1 et x^2. En effet, nous pouvons constater que pour tous les critères, les performances de l'alternative x^1 sont au moins aussi bonnes que celles de l'alternative x^2 (autrement dit, $C(x^1, x^2) = \{1, 2, 3, 4\}$). On dit alors que x_1 domine x_2. Suivant un principe d'unanimité, nous pouvons déduire que l'alternative x^1 est préférée à l'alternative x^2. Comparons maintenant les alternatives x^3 et x^4 : x^3 possèdent de bons scores sur les critères 2 et 4, et x^4 sur les critères 1 et 3. Afin de pouvoir comparer les deux alternatives, il est donc impératif de connaître l'importance relative des critères, ainsi que les équivalences éventuelles entre les scores sur chaque critère. Par exemple, est-ce que le prix plus élevé de x^3 est "compensé" par le fait que l'alternative x^3 est plus confortable que x^4 ? Ce n'est qu'une fois connu les éventuelles compensations ou interactions entre critères que nous pourrons décider laquelle des deux alternatives x^3 ou x^4 est préférée à l'autre.

1.2.3 Schéma général pour l'agrégation des préférences

De manière générale, deux voies différentes peuvent être envisagées pour agréger les différentes valeurs des critères de deux alternatives à comparer, voies dont nous empruntons les dénominations à Perny (2000) et Grabisch et Perny (2003) :

- la voie "agréger puis comparer" : il s'agit, pour chaque alternative, d'agréger toutes les valeurs prises sur chacun des critères pour obtenir un "score" unique pour chacune des alternatives, un critère unique de synthèse. Il suffit ensuite pour comparer deux alternatives de comparer leurs scores respectifs.

La théorie des méthodes basées sur la définition d'un critère unique de synthèse (une fonction d'utilité, ou MultiAttribute Utility Theory, MAUT) a été développée depuis les années 70 principalement aux Etats-Unis (voir Keeney et Raiffa (1976)). Elle est basée sur un modèle où les préférences sont représentées par un critère unique, appelé "utilité", qui est défini par une somme pondérée d'utilités partielles, qui sont supposées quantifier les avantages d'une alternative suivant l'un ou l'autre des attributs. Cette théorie est toujours d'actualité aujourd'hui. Une littérature abondante a été développée sur les problèmes d'élicitation de cette information nécessaire à la mise en pratique effective de ces méthodes (voir par exemple Fishburn (1967) ou Farquhar (1984)).

– la voie "comparer puis agréger" : il s'agit ici au contraire de comparer, critère par critère, les deux alternatives afin d'obtenir autant de relations de préférence partielles entre les deux alternatives qu'il existe de critères, puis d'essayer d'agréger ces préférences partielles en une préférence globale. Ces méthodes, basées sur une représentation des préférences par des graphes, a été développée depuis 1975, en particulier en Europe et dans la communauté francophone. Cette approche est moins gourmande en informations initiales, mais donne par conséquent des résultats moins discriminants que MAUT (voir Roy (1968, 1973, 1985, 1996)).

Ces deux approches sont résumées sur le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x=(x_1,\ldots,x_n) \\ y=(y_1,\ldots,y_n) \end{array} & \xrightarrow{\quad a \quad} & a(x),a(y) \\ \downarrow c & & \downarrow c' \\ \begin{array}{c} c(x_1,y_1),\ldots,c(x_n,y_n) \\ c(y_1,x_1),\ldots,c(y_n,x_n) \end{array} & \xrightarrow{\quad a' \quad} & P(x,y) \end{array}$$

L'approche "agréger puis comparer" peut donc se modéliser de manière générale de la façon suivante :

$$x \succsim y \iff c'(a(x),a(y)) \geq 0$$

La fonction a sert à agréger les valeurs prises par les alternatives sur chacun des critères en un score unique. La fonction c' sert à comparer les deux scores obtenus afin de déterminer lequel est supérieur à l'autre.

L'approche "comparer puis agréger" peut se modéliser de manière générale de la façon suivante :

$$x \succsim y \iff a'(c(x_1,y_1),\ldots,c(x_n,y_n)) \geq 0$$

La fonction c sert à comparer, critère par critère, les valeurs prises par chacune des alternatives ; par exemple, dans le cas d'une relation de préférence partielle, on puet poser $c(x_i, y_i) = 1$ si $x_i \succ_i y_i$, $c(x_i, y_i) = -1$ si $x_i \prec_i y_i$ et $c(x_i, y_i) = 0$ si $x_i \sim_i y_i$. La fonction a' permet ensuite d'agréger ces préférences sur chaque critère en une préférence unique.

1.2.4 Approche agréger puis comparer

Utilisée très largement en sciences économiques (où les critères peuvent se ramener à une interprétation en terme monétaire), cette approche est relativement simple et intuitive dans le contexte où les alternatives sont en nombres finis ou dénombrables. De nombreux modèles sont basés sur cette approche, que l'on peut modéliser sous la forme générale $x \succsim y \iff g(x) - g(y) \geq 0$, où $g(x)$ est une fonction telle que $g(x) = F(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))$. La fonction d'agrégation a du schéma ci-dessus est ici la fonction $F(u_1(.), \ldots, u_n(.))$. La fonction c' de comparaison est alors simplement $c'(a(x), a(y)) = a(x) - a(y)$. Les différentes procédures d'agrégation se différencient par la forme de la fonction F utilisée, les différentes fonctions d'utilité u_i et l'information inter-critère prise en compte. La plus connue de ces méthodes est l'utilité additive multi-attribut (MAUT). Les fonctions u_i sont des fonctions d'utilité mesurant la satisfaction sur chaque critère, l'information inter-critère étant modélisée par des poids différents pour chaque critère. La caractérisation axiomatique de telles procédures, dans le cas où la fonction F est additive, est établie depuis longtemps (voir Scott (1964), Fishburn (1970), Keeney et Raiffa (1976), Wakker (1989)). Elle est basée sur un axiome de solvabilité, permettant de comparer directement entre elles les valeurs obtenues sur les différents critères, toutes choses étant égales par ailleurs. Comme cette approche est totalement compensatoire, il est nécessaire de connaître quelle performance sur un critère peut compenser une performance sur un autre critère. Ces informations ne sont pas évidentes à obtenir, en particulier dans le cas où les critères sont évalués sur des échelles différentes (temps, vitesse, argent...).

Plus récemment, des extensions de l'utilité multi-attribut au cas où l'agrégation est non-additive ont été proposées, basées sur l'utilisation d'une mesure de capacité, qui permet de fixer un poids non seulement pour chaque critère, mais aussi pour chaque coalition de critères (voir par exemple Fishburn (1975), Schmeidler (1986), Grabisch (1996), Marichal (2000), Gonzales et Perny (2004)). La capacité descriptive de tels modèles se trouve renforcée, au détriment du surplus d'information sur les importances relatives des différentes coalitions de critères nécessaire à la mise en oeuvre effective d'une telle méthode. Ces méthodes utilisent des mesures floues (Sugeno (1974)), ou capacités (Choquet (1953)) pour évaluer l'importance de chaque critère ou coalition de critères.

1.2.5 Approche comparer puis agréger

Dans les méthodes multicritères d'aide à la décision, on se trouve souvent dans le cas où l'information disponible sur les alternatives est pauvre et incomplète : il peut être impossible de quantifier précisément la performance de chaque alternative sur chacun des critères, et seul une relation de préférence des alternatives sur un critère peut alors être connu. Il est donc intéressant d'étudier des méthodes purement ordinales d'aide à la décision, et en particulier les procédures d'agrégation des préférences ordinales (voir par exemple Roy (1973), Fodor et Roubens (1994), Perny et Roubens (1998)). Dans l'ensemble, cette approche a moins été l'objet de recherches que l'approche utilisant un critère unique de synthèse (approche "agréger puis comparer"). Il existe cependant quelques règles de décision bien établies dans ce cadre, en particulier les règles basées sur le principe de concordance et de non discordance. Elles sont à la base des méthodes de type ELECTRE, comme des méthodes TACTIC et PROMETHEE.

La méthode ELECTRE est la plus ancienne des méthodes d'aide multicritère à la décision utilisant le principe de concordance. Proposée par Roy (1968), elle a connu plusieurs variantes, entre autres ELECTRE III , (Roy (1978)), variante utilisant la logique floue, ou ELECTRE TRI (Roy et Bouyssou (1993)), permettant d'effectuer le tri des alternatives. La méthode ELECTRE consiste à considérer les deux alternatives à comparer critère par critère et d'examiner dans quelle mesure chaque critère est en accord avec l'affirmation comme quoi la première alternative est préférée à la deuxième : ce sont les indices de concordance, qui, agrégés, donnent une relation de concordance globale entre les deux alternatives. Par ailleurs, on regarde aussi les critères en profond désaccord avec cette même affirmation, ce qui donne un indice de discordance. Si la relation de concordance globale est suffisamment grande et qu'il n'y a pas de grande discordance (ou veto), on peut alors affirmer que la première alternative est préférée à la deuxième. Sinon, elles peuvent être soit indifférentes, soit incomparables suivant les cas.

La méthode PROMETHEE, proposée par Brans et al. (1984), commence comme la méthode ELECTRE par établir une relation de concordance critère par critère entre deux alternatives. Elle utilise ensuite, pour chaque alternative du corpus, l'ensemble des comparaisons avec les autres alternatives pour obtenir un flux regroupant l'ensemble des mérites (surclassement positif) et démérites (surclassement négatif) de cette alternative. La comparaison de ces flux permet d'obtenir une relation de préférence entre les différentes alternatives.

La méthode TACTIC, développée par Vansnick (1986), utilise également les principes de concordance et non discordance en affectant des poids à chaque critère puis en comparant, avec des paramètres sur les seuils de concordance et de veto, les poids totaux respectifs des critères en concordance avec la préférence de la première alternative sur la deuxième, et ceux en concordance avec la préférence inverse.

Une extension de ces règles de concordance au cas purement ordinal, c'est à dire au cas où la performance des alternatives sur chaque critère n'est connue que de manière ordinale, a été établie par Fargier et Perny (2000). Une règle de concordance généralisée va consister à dire que l'alternative x va être préférée à l'alternative y si l'ensemble des critères sur lesquels x est préféré à y est au moins aussi important (au sens d'une relation d'importance sur les ensembles des critères) que l'ensemble des critères sur lesquels y est préféré à x.

Plusieurs études axiomatiques de la règle de concordance généralisée ont été développées en particulier par Perny (1998), Fargier et Perny (2000), Bouyssou et Pirlot (2002a), Dubois et al. (2002, 2003b). La plupart de ces études insistent sur le rôle essentiel de caractérisation joué par l'axiome de neutralité, indépendance et monotonie, inspiré de la condition de non-compensation introduite par Fishburn (1976b) et Bouyssou et Vansnick (1986) :

- neutralité, dans le sens où les préférences partielles sur un critère ne dépendent pas des autres critères
- indépendance, dans le sens où le classement relatif de deux alternatives ne dépend que de ces alternatives
- monotonie, dans le sens où si l'on améliore une alternative x, cette alternative x ne peut pas être préférée à moins d'alternatives qu'avant.

Nous détaillons ci-dessous une caractérisation axiomatique de la règle de concordance généralisée proposée par Fargier et Perny (2000). Formellement, la règle de concordance généralisée sur un ensemble d'alternatives $\mathcal{X}$ se présente comme suit :

$$x \succsim y \iff C(x,y) \succsim_N C(y,x) \tag{1.1}$$

où la relation $\succsim_N$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de N. Reprenant le formalisme vu dans le schéma précédent, la fonction c de comparaison est ici la fonction qui à tout couple (x_i, y_i) associe la valeur 1 si $x_i \succsim_i y_i$, et 0 sinon. L'ensemble $C(x,y) \subseteq N$ peut alors être vu comme un vecteur γ de $\{0,1\}^n$ où $\gamma_i = 1$ si le critère $i \in C(x,y)$. La fonction a' d'agrégation est alors une fonction d'ensembles de $\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ qui à tout couple $(C(x,y), C(y,x))$ associe la valeur 1 si $C(x,y) \succ_N C(y,x)$, la valeur 0 si $C(x,y) \sim_N C(y,x)$ et la valeur -1 si $C(y,x) \succ_N C(x,y)$. On a alors bien

$$C(x,y) \succsim_N C(y,x) \iff a'(c(x_1,y_1), \ldots, C(x_n,y_n), c(y_1,x_1), \ldots, c(y_n,x_n)) \geq 0$$

Détaillons maintenant les axiomes caractérisant la règle de concordance généralisée : tout d'abord, il apparaît naturel que chaque attribut j de N ait une utilité dans le processus de décision, donc que chaque attribut soit discriminant pour au moins une paire (x,y).

Axiome DI (Discrimination).

$$\forall j \in N,\ \exists x, y \in \mathcal{X},\quad (x_j, y_{-j}) \succsim y \ \text{ et } \ \text{non}(y \succsim (x_j, y_{-j}))$$

Ensuite, même si nous acceptons des situations d'incomparabilité dans la préférence, il faut que cette incomparabilité soit justifiée par l'existence d'un conflit entre au moins deux attributs. Si deux alternatives ne diffèrent que par un seul attribut, il faut que ces deux alternatives soient comparables.

Axiome MC (Comparabilité Minimale).

$$\forall x, y, z \in \mathcal{X}, \forall j \in N, \quad (x_j, z_{-j}) \succsim (y_j, z_{-j}) \text{ ou } (y_j, z_{-j}) \succsim (x_j, z_{-j})$$

Enfin, la préférence devra vérifier des propriétés de neutralité, d'indépendance et de monotonie :

- neutralité, dans le sens où la valeur d'un attribut ne dépend pas de la valeur des autres attributs : $\forall x, y, z \in \mathcal{X}, \quad (x_j, z_{-j}) \succsim (y_j, z_{-j}) \Rightarrow \forall w \in \mathcal{X}, \ (x_j, w_{-j}) \succsim (y_j, w_{-j})$.
- indépendance, dans le sens où le classement relatif de deux alternatives ne dépend que de la position relative de ces alternatives : $\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}, \quad [C(x, y) = C(z, w)$ et $C(y, x) = C(w, z)] \Rightarrow (x \succsim y \Rightarrow z \succsim w)$
- monotonie, dans le sens où si l'on améliore une alternative x dans les données, x ne peut être surclassée par plus d'alternatives qu'avant, ni surclasser moins d'alternatives qu'avant : $\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}, \quad [C(x, y) \subseteq C(z, y)$ et $C(y, x) \supseteq C(y, z)] \Rightarrow (x \succsim y \Rightarrow z \succsim y)$

Axiome NIM (Neutralité-Indépendance-Monotonie).

$$\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}, \quad [C(x, y) \subseteq C(z, w) \text{ et } C(y, x) \supseteq C(w, z)] \Rightarrow (x \succsim y \Rightarrow z \succsim w)$$

Sous les axiomes précédents, la relation de préférence peut être obtenue par une règle de concordance généralisée, comme l'indique le théorème suivant :

Théorème 1 *(Fargier et Perny (2000))*

Si les préférences du décideur vérifient les axiomes NIM, DI, et MC alors il existe n relations de surclassement complètes $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ définies respectivement sur $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$, et une relation d'importance $\succsim_N$ sur 2^N, l'ensemble des coalitions d'attributs, monotone, telle que :

$$\forall v, w \in \mathcal{X}, \quad v \succsim w \iff C(v, w) \succsim_N C(w, v) \tag{1.2}$$

Commentaires

La règle de concordance généralisée est un outil assez puissant pour décrire des préférences multicritères d'une manière assez naturelle. La relation d'importance sur les ensembles de critères pouvant être quelconque, le champ couvert par la règle de concordance généralisée est relativement large. En particulier, les relations de préférence représentables par la règle de concordance généralisée ne sont pas toujours transitives. C'est un avantage du point de vue descriptif, la règle de concordance généralisée permettant de représenter des préférences non transitives. Cette non-transitivité est intéressante, car elle est souvent révélatrice de la difficulté à désigner une "meilleure" alternative, en particulier quand les alternatives sont très différentes les unes des autres. Cependant, d'un point de vue prescriptif, l'obtention de relations de préférence non transitives peut être gênante si le but visé est d'obtenir une préférence ordonnée sur les alternatives.

1.3 Décision dans l'incertain

1.3.1 Cadre de la décision dans l'incertain

La théorie de la décision en univers incertain permet de modéliser une prise de décision quand la situation exacte du monde n'est pas connue avec précision. En particulier, le résultat de telle ou telle décision dépend de certains événements ayant lieu ou non. Depuis l'article fondateur de Knight (1921), on différencie les problèmes de décision dans le risque et les problèmes de décision dans l'incertain. Un problème de décision est dit en présence de risque si le résultat d'une décision dépend de l'état de la nature, l'avènement d'un certain état de la nature aléatoire ayant lieu avec une probabilité connue *a priori*. C'est le cas par exemple du lotos (ou des loteries en général) où le résultat de la décision de choisir tel ou tel numéro dépend de la sortie de ce numéro au tirage, sortie dont la probabilité peut être calculée. Les travaux fondateurs de von Neumann et Morgenstern (1947) ont proposé un cadre axiomatique de la décision dans le risque conduisant au modèle de relations de préférence basées sur l'utilité espérée (EU). Si les probabilités de réalisation des états de la nature ne sont pas connues *a priori* (information manquante, unicité de la décision...), le problème est alors dit de décision dans l'incertain. Le cadre axiomatique proposé par Savage (1954) montre cependant que sous certaines propriétés apparemment naturelles, le décideur en environnement incertain se comporte comme s'il existait des probabilités subjectives associées aux différents états de la nature possibles. Le modèle de relations de préférence proposé par Savage est appelé l'utilité espérée subjective (SEU). Les modèles EU et SEU sont particulièrement utilisés en modélisation économique du fait de leur simplicité d'utilisation et de nombreux développements de ces modèles ont été proposés (voir Bouyssou et al. (2006) pour une synthèse). Cependant, plusieurs "paradoxes" ont montré les limites descriptives des modèles EU et SEU, ainsi que la difficulté, pour EU, de disposer de toute l'information nécessaire. Depuis, le développement de l'intelligence artificielle a conduit à l'apparition de la théorie de la décision qualitative, basée uniquement sur des informations ordinales, et non numériques, bannissant ainsi probabilités et utilités (Lehmann (1996), Doyle et Wellman (1999)). En effet, le cadre symbolique des langages formels d'une part, la nécessité de produire des décisions rapides en présence d'informations incomplètes d'autre part, font que les modèles basés sur une utilité espérée n'étaient pas toujours adaptés (Boutilier (1994), Brafman et

Multicritère	Incertain
alternative	acte
critère	état de la nature
valeur d'un critère	conséquence
préférence partielle	préférence sur les conséquences
préférence globale	préférence sur les actes

FIG. 1.1 – Correspondances multicritère / incertain

Tennenholtz (1997)). Le développement de modèles de décision qualitatifs répond donc à un réel besoin. Certains auteurs se sont attachés à proposer des versions dans l'incertain qualitatif des modèles issus de la décision multicritère (voir par exemple Dubois et al. (2002), Dubois et al. (2003b)). Une correspondance entre la décision multicritère et la décision dans l'incertain est en effet possible et est présentée en figure 1.1.

La principale différence entre la modélisation dans le cadre multicritère et celle dans l'incertain porte sur l'hypothèse de commensurabilité des critères (conséquence) : en effet, il y a une seule échelle de préférence sur les conséquences ; concrètement, cela signifie que toutes les relations de préférence $\succsim_j$ sont les mêmes en décision dans l'incertain.

1.3.2 Définitions et notations

Nous considérons ici un problème de décision dans l'incertain caractérisé par un 4-uplet $(S, X, \mathcal{A}, \succsim)$, où S est l'ensemble (fini) des états de la nature, X est l'ensemble des conséquences possibles, $\mathcal{A} = X^S$ est l'ensemble des actes potentiels, c'est à dire l'ensemble des fonctions $f : S \to X$, et $\succsim$ est une relation de préférence sur $\mathcal{A}$. Il existe dans $\mathcal{A}$ des actes conduisant à la même conséquence quel que soit l'état de la nature. Ces actes sont appelés "actes constants" et notés f_x pour tout $x \in X$. On identifiera l'ensemble des actes constants $\{f_x, x \in X\}$ et X. Suivant la terminologie de Savage, nous appelons événement tout sous-ensemble A de S. Pour toute paire d'actes f et g, l'acte fAg est défini par : $fAg(s) = f(s)$ si $s \in A$ et $fAg(s) = g(s)$ si $s \notin A$. Pour simplifier les notations, si f ou g est un acte constant f_x on notera fAx (resp. xAg) au lieu de fAf_x (resp. f_xAg). Un événement A est dit "nul" si : $\forall f, g, h \in \mathcal{A} : fAh \sim gAh$. Tout événement $A \subseteq S$ capable de discriminer au moins une paire d'actes n'est pas nul.

1.3.3 L'utilité espérée : quelques critiques

La théorie de l'utilité espérée possède certaines qualités : simple d'utilisation, elle propose une modélisation facilement compréhensible et relativement intuitive des événements incertains sous forme de probabilités. Son large usage depuis un demi-siècle, dans la sphère économique en particulier, montre qu'il répond à un besoin réel. Cependant, rapidement après que von Neumann et Morgenstern (1947) aient proposé la théorie de l'utilité espérée, plusieurs critiques ont été formulées à l'encontre de ce modèle. Au delà du fait de savoir si des probabilités sur les événements à venir existent réellement (comme dans le cadre axiomatique proposé par von Neumann et Morgenstern (1947)), ou ne sont que le reflet de l'opinion subjective du décideur (comme dans le cadre axiomatique proposé par Savage (1954)), l'idée même d'un raisonnement des individus utilisant la notion d'espérance est sujette à caution. Plusieurs situations ont été développées, plusieurs expériences ont été tentées, mettant en lumière certains paradoxes ou incohérences du modèle de l'utilité espérée. Par exemple, le paradoxe proposé par Allais (1953) montre qu'on ne peut systématiquement modéliser le comportement d'un décideur devant une situation incertaine en utilisant les probabilités des différents états possibles :

Exemple 10 : paradoxe d'Allais *On propose à un joueur le choix entre deux jeux différents : dans le jeu 1, le joueur est certain d'emporter 1 million de dollars. Dans le jeu 2, le joueur possède une probabilité de 0,89 de gagner 1 million de dollars, une probabilité de 0,1 de gagner 5 millions de dollars, et une probabilité de 0,01 de ne rien gagner du tout. La plupart des personnes à qui on présente le choix préfèrent le jeu 1 au jeu 2. On propose maintenant au joueur le choix entre deux autres jeux : dans le jeu 3, le joueur gagne 1 million de dollars avec une probabilité de 0,11, et rien avec une probabilité de 0,89. Dans le jeu 4, le joueur peut gagner 5 millions de dollars avec une probabilité de 0,1 et rien avec une probabilité de 0,9. On constate alors que la plupart des joueurs préfèrent le jeu 4 au jeu 3. La majorité des joueurs préfère donc le jeu 1 au jeu 2, et le jeu 4 au jeu 3. Or ces préférences ne peuvent pas être représentées par une utilité espérée. En effet, supposons qu'il existe une fonction d'utilité u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout gain associe son utilité pour le joueur. Le modèle de l'utilité espérée indique que :*

$$\begin{aligned} EU(jeu1) &= u(1) \\ EU(jeu2) &= 0.01u(0) + 0.89u(1) + 0.1u(5) \\ EU(jeu3) &= 0.89u(0) + 0.11u(1) \\ EU(jeu4) &= 0.9u(0) + +0.1u(5) \end{aligned}$$

Les préférences observées impliquent que $EU(jeu1) > EU(jeu2)$ et $EU(jeu4) > EU(jeu3)$. Le fait que $EU(jeu1) > EU(jeu2)$ implique que $u(1) > 0.01u(0) + 0.89u(1) + 0.1u(5)$, et donc que

$$0.11u(1) > 0.01u(0) + 0.1u(5) \tag{1.3}$$

De même, le fait que $EU(jeu4) > EU(jeu3)$ implique que $0.9u(0) + 0.1u(5) > 0.89u(0) + 0.11u(1)$, et donc que

$$0.01u(0) + 0.1u(5) > 0.11u(1)$$

Ceci n'est pas compatible avec l'équation 1.3. Il y a là une contradiction. Le modèle de l'utilité espérée ne peut donc rendre compte de ces préférences.

Dans un même esprit, le paradoxe présenté par Ellsberg (1961) et rappelé au paragraphe 1.4.4 montre les limites descriptives de l'utilité espérée pour rendre compte des préférences observées, par exemple lorsque les décideurs développent une sorte d'aversion vis-à-vis du risque. D'autres travaux, relatés par Lichtenstein et Slovic (2006), ont montré qu'un simple changement de la forme de présentation d'un problème de décision, pour une forme pourtant logiquement équivalente, pouvait aboutir à des renversements de préférence entre alternatives. Plus récemment, les travaux en psychologie et en économie expérimentale de Tversky et Kahneman (1991) montrent que les individus ne font pas leurs choix dans l'absolu mais tiennent compte du contexte dans lequel ils sont plongés. En particulier, la valeur attachée à une alternative change suivant le point de vue initial considéré [1]. A travers les études expérimentales effectuées, il apparaît que le modèle de l'utilité espérée ne permet pas toujours d'obtenir une modélisation conforme au comportement réel des individus.

Malgré ces critiques, la théorie de l'utilité espérée continue d'être particulièrement utilisée en économie. Les économistes considèrent que dans une perspective globale "tout devrait se passer comme si" l'homme économique satisfaisait les axiomes de Savage. Ils préfèrent en cela suivre Milton Friedman [2] que Daniel Kahnemann et Vernon Smith [3]. Les travaux de Tversky et Kahnemann apparaissent pourtant comme très intéressants, en particulier dans leur approche mettant en jeu des points de référence ; dans cette perspective, nous présentons dans la partie suivante l'intérêt de l'introduction de points de référence dans certains modèles décisionnels.

1.4 Présence de points de référence

1.4.1 En théorie du choix social

Un problème très voisin de celui de l'agrégation des préférences en théorie de la décision multicritère a été étudié depuis longtemps en théorie des élections. Il consiste en la recherche d'une procédure permettant d'agréger de manière raisonnable les avis exprimés par plusieurs votants concernant divers candidats afin de dégager un élu (ou de classer les candidats). Tant l'ancienneté (Borda (1781), Condorcet (1785)) que l'actualité (les divers processus électoraux utilisés) de ce problème montrent sa richesse et sa complexité. Au cours des années 1950 s'est développée la théorie du choix social, visant de manière plus large à l'étude des liens pouvant exister entre les préférences individuelles des membres d'un groupe social et les décisions prises par ce groupe, reflétant la préférence collective du groupe (voir par exemple Arrow et Raynaud (1986), ou Sen (1986)).

[1] On prête aux auteurs la métaphores des montagnes : "les hauteurs relatives perçues de deux montagnes peuvent s'inverser suivant le point de vue".

[2] lauréat du prix d'économie décerné par la banque de Suède en mémoire d'Alfred Nobel en 1976

[3] co-lauréats du prix d'économie décerné par la banque de Suède en mémoire d'Alfred Nobel en 2002

Choix social	Décision multicritère
candidat	alternative
votant	critère
rang	valeur d'un critère
préférence individuelle	préférence partielle
préférence collective	préférence globale

FIG. 1.2 – Correspondances choix social / multicritère

Les nombreux résultats obtenus en théorie du choix social sont riches d'enseignements pour l'aide multicritère à la décision. En effet, il existe de forts liens entre les deux domaines, grâce aux correspondances détaillées figure 1.2 (cf. Arrow et Raynaud (1986), ?), Bouyssou et Perny (1997)).

Les correspondances formelles obtenues entre les deux domaines sont consolidées par le fait que certaines conditions classiques utilisées en théorie du choix social gardent toute leur pertinence en décision multicritère.

Prenons trois exemples naturels :

1. Unanimité : si tous les votants (resp. critères) manifestent la même préférence d'un candidat a vis-à-vis d'un candidat b (resp. alternatives a et b), alors la préférence collective (resp. globale) verra le candidat a préféré au candidat b (resp. alternatives a, b).
2. Monotonie : si un votant (resp. critère) change ses préférences en faveur du candidat a (resp. constate une amélioration du score de l'alternative a sur ce critère), alors le candidat (resp. alternative) a ne peut pas être moins bien classé qu'auparavant.
3. Neutralité : les préférences relatives entre les candidats a et b (resp. alternatives a et b) ne dépendent pas des autres candidats (resp. alternatives) présents dans le corpus des candidats (resp. alternatives).

Cependant, correspondance n'est pas équivalence : il faut se garder de transpositions trop brutales tant l'agrégation multicritère présente de caractères spécifiques. En amont, la construction des critères résulte d'un travail de modélisation qui peut parfois donner des informations à agréger qui sont moins riches que des listes ordonnées : préférences floues ou incomplètes, indifférences non transitives... D'autre part, les critères n'ont pas toujours la même importance, contrairement aux votants [4]. Enfin, le résultat attendu en décision multicritère ne se limite souvent pas au choix d'une unique action, comme c'est le cas en théorie du choix social, mais peut inclure des problématiques plus variées. Ces considérations étant posées, il apparaît que certains résultats fondamentaux en théorie du choix social ont une contrepartie en décision multicritère, permettant d'éclairer de

[4] dans une perspective démocratique du type une personne / une voix

manière intéressante la structure de la problématique de l'agrégation des préférences. C'est en particulier le cas du théorème d'Arrow (1951). Le théorème d'Arrow est central en théorie du choix social, car il montre l'impossibilité pour une procédure d'agrégation de posséder de manière simultanée un petit nombre de propriétés pourtant hautement souhaitables. Il concerne les méthodes qui visent à agréger $n \geq 3$ préordres complets en un préordre complet synthétique. Chaque votant fournit donc une liste classant par ordre de préférence les candidats (avec éventuellement des ex-aequo), une procédure d'agrégation devant ensuite synthétiser ces avis en un seul. Passons en revue les conditions que l'on aimerait voir remplies par cette procédure d'agrégation.

- **Non dictature :** il n'existe pas de dictateur (aucun des votants ne peut dicter en toute circonstance ses préférences à la majorité).
- **Universalité :** toute configuration de liste est admissible.
- **Transitivité :** la méthode doit fournir un classement sous la forme d'un préordre complet.
- **Unanimité :** le résultat de la méthode ne doit pas contredire un avis unanime des votants.
- **Indépendance :** le résultat de la comparaison entre deux candidats ne dépend que de leurs positions relatives dans les listes ordonnées fournies par les votants.

On peut alors énoncer le célèbre théorème d'Arrow :

Théorème 2 *Théorème d'Arrow (1951)*
Dès lors qu'il y a au moins trois candidats, aucune méthode d'agrégation ne peut satisfaire les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature.

Transposé en théorie de la décision multicritère, ce résultat indique l'impossibilité d'obtenir une procédure d'agrégation réellement multicritère (i.e. sans critère dictateur), transitive, et respectant les principes d'universalité, d'unanimité et d'indépendance dès lors qu'il y a plus de trois critères et plus de trois alternatives à comparer. Par contre, s'il l'un ou l'autre de ces principes est abandonné, de nouvelles règles de décision vont apparaître. Certaines voies ont déjà été explorées, et on trouvera des exemples de procédures d'agrégation obtenues en relâchant l'une ou l'autre des conditions contradictoire dans Fishburn (1975, 1976b) (procédures d'agrégation lexicographiques) ou Weymark (1984) (procédures quasi-transitives).

Passons en revue les différentes conditions contradictoires et étudions celles qui sont susceptibles d'être affaiblies sans conduire à des procédures totalement dénuées d'intérêt.

- **Unanimité :** il semble totalement exclu de renoncer au principe d'unanimité ; que dire d'une procédure qui donnerait la préférence à y sur x sachant que x est préféré sur chaque critère à y ? La notion de préférence partielle n'aurait alors aucun sens.

- **Universalité :** l'abandon du principe d'universalité a été étudié depuis longtemps en théorie du choix social, en contraignant les préférences partielles possibles pour les votants. Par exemple Black (1948) suppose que les différents candidats puissent être ordonnés sur une échelle objective (par exemple en politique du plus à droite au plus à gauche) et que les préférences des votants sont cohérentes avec cet ordre sous-jacent. Cependant, en décision multicritère, les valeurs prises par les alternatives sur chacun des critères résultent d'une réalité physique ne pouvant être contrainte *a priori*. On préférerait donc ne pas avoir à contraindre par avance les préférences possibles du décideur sur chaque critère, et donc respecter le principe d'universalité.
- **Non dictature :** l'acceptation de règles dictatoriales va à l'encontre du principe même de décision multicritère : si un critère seul est décisif, il est inutile d'en étudier plusieurs ! Les procédures d'agrégation lexicographiques (i.e. prendre les critères les uns après les autres et garder la préférence obtenue par le premier critère différenciant les deux alternatives) sont une des voies explorées pour affaiblir la condition de non dictature. Il est des situations où ces procédures sont acceptables. Nous pensons cependant qu'une lexicographie sur les critères affadit considérablement une procédure d'agrégation : même si tous les critères n'ont pas forcément la même importance, il n'est pas forcément judicieux de décréter qu'un critère donné est prépondérant sur tous les autres critères.
- **Transitivité :** de fait, les méthodes de surclassement aboutissent la plupart du temps à des relations de préférence ni complètes, ni transitives. Ce n'est pas un problème en soi dans les procédures d'aide à la décision (le fait de ne pas pouvoir comparer directement deux alternatives apporte tout de même de l'information), mais c'est un inconvénient majeur pour formuler une recommandation, sous forme de choix d'une alternative ou de classement des alternatives. Nous veillerons donc à obtenir autant que faire se peut une préférence transitive par les procédures d'agrégation proposées, tout en ayant à l'esprit que d'un point de vue descriptif, il peut être intéressant de pouvoir aussi produire des préférences non transitives.
- **Indépendance :** la plupart des méthodes de surclassement commencent par comparer deux à deux les alternatives, avant de proposer un classement de synthèse à partir des relations de surclassement obtenues. On souhaite, dans la première phase, que la comparaison relative de deux alternatives ne dépende que de ces deux alternatives, et non des alternatives tierces. La comparaison de deux alternatives entre elles ne doit pas dépendre du corpus des autres alternatives. Cette indépendance vis-à-vis des autres alternatives dans la première phase est importante pour obtenir des résultats robustes, c'est-à-dire qui ne dépendent pas de l'ajout ou du retrait d'alternatives du corpus considéré. Cependant, cela amène à des relations généralement non transitives.

Les trois principes sur lesquels nous pouvons éventuellement transiger sont la transitivité, l'universalité et l'indépendance vis à vis des alternatives non concernées. Nous nous intéresserons ici au relâchement de l'axiome d'indépendance. En effet, il est possible d'obtenir des relations de préférence complètes et transitives en permettant que la préférence entre deux alternatives ne dépende pas uniquement des alternatives considérées, mais aussi de leur environnement. En particulier, il est possible de comparer deux alternatives à travers leur comportement vis-à-vis de certaines alternatives tierces. Campbell et Kelly (2000) ont exploré une voie où la procédure d'agrégation multicritère change suivant la valeur prise par les alternatives à comparer sur un critère. C'est une première remise en cause de l'axiome d'indépendance vis-à-vis des alternatives non concernées. Dans un esprit légèrement différent, nous proposons pour notre part d'affaiblir l'axiome d'indépendance vis-à-vis des alternatives tierces en autorisant le fait que la relation de préférence entre deux alternatives a et b dépende non seulement de la comparaison terme à terme des deux alternatives, mais aussi de leurs positions relatives vis-à-vis d'un (ou plusieurs) "point de référence" qui serviront de support à l'évaluation respective des deux alternatives à comparer. Comme nous le montrons ci-après, la présence de points de référence permet alors de proposer des modèles prescriptifs non dictatoriaux aboutissant cependant à des relations transitives. L'idée d'introduire des points de référence n'a selon nous pas encore reçu l'attention qu'elle méritait, mais a tout de même été considérée par certains auteurs en psychologie, économie ou aide à la décision comme le montrent les sections suivantes.

1.4.2 En psychologie et économie

La théorie économique classique vise à proposer une modélisation du comportement de l'agent économique. Elle est basée entre autres sur l'hypothèse que les préférences du consommateur suivent un modèle unique quelle que soit la situation initiale. Or il est maintenant admis, à la suite de nombreuses expériences, que les préférences d'un agent économique entre deux options varient suivant ce qui est perçu comme étant le point de référence : le consommateur ne réagit pas seulement par rapport à la valeur intrinsèque du bien qui lui est proposé (évaluée à l'aide d'une fonction d'utilité), mais aussi de ses possessions ou de son état initial : il semble établi qu'une personne a plus tendance à préférer le statu quo qu'un changement de situation. C'est le biais de statu quo, décrit par Thaler (1980). Mais c'est un des rares exemples d'étude du rôle qui peut être joué par un point de référence : peu de travaux ont été consacré à des théories économiques cohérentes avec ce biais de statu quo. Le travail le plus complet proposé est certainement la théorie des préférences dépendant d'un point de référence de Tversky et Kahneman (1991), dans laquelle les préférences d'un individu sur des biens sont conditionnées par ce qu'il possède déjà, ce qui joue le rôle de point de référence. Cette théorie a prédit de manière satisfaisante des résultats obtenus lors d'expériences psychologiques (voir par exemple Samuelson et Zeckhauser (1988), Knetsch (1989), Loewenstein et Adler (1995)). Des développements de cette théorie, et en particulier les bases axiomatiques des préférences dépendant d'un point de référence, ont récemment été proposés par Munro et Sugden (2003).

1.4.3 En décision multicritère ordinale

Présence de points de référence

La présence d'un point de référence dans des relations de préférence a déjà été étudiée dans le cadre de relations bien cadrées : information parfaitement disponible, commensurabilité des différents critères... Les méthodes d'optimisation multicritères basées sur l'utilisation d'un point idéal et/ou nadir utilisent *de facto* des points de référence (non atteints la plupart du temps). Cependant, l'apport d'un point de référence dans les méthodes basées sur des graphes de préférence n'a pas encore été complètement étudié à notre connaissance. Nous nous proposons ici d'explorer certaines pistes de cette approche.

L'utilisation de points de référence est déjà présente dans certains problèmes multicritères, tels que ceux relevant de la problématique du rangement. On définit la problématique du rangement comme celle où le problème consiste à affecter chaque alternative à une catégorie spécifique prédéfinie. Une possibilité pour trier les alternatives consiste à les comparer à des alternatives de référence : c'est l'objet de la méthode ELECTRE Tri (voir Roy (1968)), et des développements proposés par Yu (1992), Roy et Bouyssou (1993), Mousseau et al. (2000) et Henriet (2000). Dans la méthode ELECTRE Tri, des actions de référence sont utilisées pour segmenter l'espace des critères en catégories. Ces profils ordonnés de référence définissent des catégories dans lesquelles il s'agira d'affecter chacune des alternatives utilisées. Chaque catégorie est bornée inférieurement et supérieurement par deux actions de référence et chaque action de référence sert de borne à deux catégories, l'une supérieure et l'autre inférieure. Pour déceler l'incomparabilité éventuelle de l'alternative considérée avec les actions de référence, deux procédures d'affectation distinctes, l'une optimiste et l'autre pessimiste, sont nécessaires. Elles consistent à comparer chaque action potentielle avec les actions de référence en commençant par la plus contraignante (version pessimiste) puis la moins contraignante (version optimiste). Si les deux procédures affectent l'action potentielle à la même catégorie, elle est alors parfaitement comparable avec les actions de référence, sinon, en fonction de la différence entre les deux catégories auxquelles elle est attribuée, elle est plus ou moins incomparable avec l'échelle des points de référence.

Plus récemment, Bouyssou et Marchant (2007a,b) ont eu une approche plus théorique du problème du tri ordonné, en proposant une axiomatique des modèles de tri non-compensatoire utilisant les techniques du mesurage conjoint. Contrairement à ces deux approches, dans le cadre des travaux que nous présentons ici, nous ne nous intéressons pas aux affectations d'alternatives à des catégories pour elles-mêmes, mais à une relation de préférence sur ces alternatives induite par les affectations aux catégories.

Pouvoir descriptif des modèles de relations de préférence

Malgré la diversité des modèles existant pour représenter les préférences en multicritère, il arrive que l'on ne dispose pas toujours de la capacité descriptive souhaitée.

Exemple 11 *Nous reprenons ici le cadre de l'exemple 9 du choix d'un hébergement touristique : les quatre critères retenus sont le prix (1), le confort (2), la proximité du site touristique choisi (3) , et le cadre général (4). Le prix est en euros, le confort est noté de zéro à cinq étoiles, la proximité du site choisi est répartie en quatre catégories (A : sur place ; B : à proximité ; C : dans les environs, D : éloigné) et le cadre général en trois niveaux "+", "=" et "-".*

Considérons les quatre alternatives suivantes :

	1	2	3	4
x^1	40	***	B	+
x^2	60	***	A	+
x^3	40	**	B	+
x^4	60	**	A	+

Supposons que le décideur ait comme préférences $x^2 \succ x^1$ et $x^3 \succ x^4$.

Ces préférences semblent plausibles : 60 euros étant un prix raisonnable dans le cadre d'un hébergement trois étoiles, le prix a moins d'importance que la proximité, alors que dans le cadre d'un hébergement de moins bonne qualité, le prix devient le critère important. Or ces préférences ne peuvent être obtenues par des modèles de préférence classiques : l'utilité additive, ou, dans le domaine ordinal, la règle de concordance généralisée ne peuvent modéliser une telle relation de préférence :

- **utilité additive :** selon le modèle de l'utilité additive, $x \succsim y$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$, où $u()$ est la fonction d'utilité additive. On peut vérifier que dans le cas présent, $x^2 \succ x^1$ entraîne obligatoirement que $u_1(60) + u_3(A) > u_1(40) + u_3(B)$, alors que $x^3 \succ x^4$ entraîne l'inverse : il y a donc une contradiction.
- **règle de concordance additive :** selon le modèle de concordance additive, $x \succsim y$ si et seulement si $\sum_{i \in C(x,y)} w_i \geq \sum_{i \in C(y,x)} w_i$, où les w_i sont des poids affectés à chaque critère. On peut vérifier qu'ici, $x^2 \succ x^1$ entraîne obligatoirement que $w_2 + w_3 + w_4$ est supérieur à $w_1 + w_2 + w_4$, alors que $x^3 \succ x^4$ entraîne l'inverse : il y a donc une contradiction.

Nous voyons donc que les modèles de préférences multicritères additifs considérés ci-dessus ne sont pas suffisants pour pouvoir décrire les préférences d'un décideur. En effet, il n'y a pas indépendance entre les différents critères : l'utilité d'un critère pour une alternative ne dépend pas seulement de la valeur de ce critère, mais aussi de la valeur des autres critères. Si l'on prend une utilité additive généralisée (ou GAI), capable de modéliser ces interactions, il est alors possible de représenter les préférences de l'exemple ci-dessus :

Utilité 2-additive : on définit une utilité 2-additive par

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}(x_i, x_j)$$

Dans l'exemple 11, les préférences peuvent alors s'expliquer en modélisant les interactions entre le critère 2 et les autres critères par des valeurs telles que, par exemple, pour les utilités simples :

- $u_1(40) = 1$, $u_1(60) = 0$
- $u_2(***) = 3$, $u_2(**) = 2$, etc.
- $u_3(A) = 4$, $u_3(B) = 3$, etc.
- $u_4(+) = 1$, $u_4(=) = 0$, $u_4(-) = -1$

et les valeurs suivantes pour les interactions entre les différents critères (fonctions d'utilités bi-critères) : $\forall i, j \in N$, $u_{i,j}(x_i, x_j) = 0$ sauf :

- $u_{1,2}(40, ***) = 3$, $u_{1,2}(60, ***) = 2$, $u_{1,2}(40, **) = 2$, $u_{1,2}(60, **) = 0$
- $u_{2,3}(***, A) = 4$, $u_{2,3}(***, B) = 2$, $u_{2,3}(**, A) = 4$, $u_{2,3}(**, B) = 3$

Autrement dit : la différence de prix est moins importante dans le cadre d'un hôtel $***$ que d'un hôtel $**$. Au contraire, la proximité est plus importante dans le cadre d'un hôtel $***$ que d'un hôtel $**$. Les valeurs finales de l'utilité pour chacune des alternatives sont alors les suivantes :

- $u(x_1) = u_1(40) + u_2(***) + u_3(B) + u_4(+) + u_{1,2}(40, ***) + u_{2,3}(***, B) = 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 2 = 13$
- $u(x_2) = u_1(60) + u_2(***) + u_3(A) + u_4(+) + u_{1,2}(60, ***) + u_{2,3}(***, A) = 0 + 3 + 4 + 1 + 2 + 4 = 14$
- $u(x_3) = u_1(40) + u_2(**) + u_3(B) + u_4(+) + u_{1,2}(40, **) + u_{2,3}(**, B) = 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 = 12$
- $u(x_4) = u_1(60) + u_2(**) + u_3(A) + u_4(+) + u_{1,2}(60, **) + u_{2,3}(**, A) = 0 + 2 + 4 + 1 + 0 + 4 = 11$

On obtient bien alors les relations de préférences suivantes : $x_2 \succ x_1$ et $x_3 \succ x_4$.

De la même manière, nous pouvons généraliser la règle de concordance additive en une règle de concordance généralisée, visant à permettre des interactions entre critères, de la manière suivantes :

Règle de concordance généralisée : selon le modèle de concordance généralisée, $x \succsim y$ si et seulement si $C(x,y) \succsim_N C(y,x)$, avec $C(x,y) = \{j \in N, \quad x_j \succsim_j y_j\}$ et $\succsim_N$ une relation d'importance sur les coalitions de critères, N étant l'ensemble des critères. On peut vérifier qu'ici, $x^2 \succ x^1$ entraîne obligatoirement que la coalition $\{2,3,4\}$ est plus importante que la coalition $\{1,2,4\}$, alors que $x^3 \succ x^4$ entraîne l'inverse : il y a donc toujours une contradiction, malgré l'abandon de la condition d'indépendance des critères. Cela est du au fait que les ensembles $C(x,y)$ et $C(y,x)$ sont identiques dans le cadre de la règle de concordance généralisée comme dans le cadre de la règle de concordance additive. Dans ce cadre purement ordinal, les interactions entre critères ne peuvent expliquer l'inversion de préférence observée entre x_1, x_2 et x_3, x_4.

Une explication possible est alors que, lorsqu'il doit établir une relation de préférence entre des alternatives, le décideur raisonne par rapport à une norme préétablie, en comparant les performances des alternatives à des profils de référence types, ici par exemple le profil (50,***,A,=). L'introduction de points de référence dans la modélisation de préférence est naturelle dans certain cas. Montrons en particulier comment elle permet de modéliser les préférences de l'exemple ci-dessus dans le cadre ordinal utilisant la règle de concordance généralisée. Prenons comme point de référence le point $p = (50, ***, A, =)$, et comme règle d'agrégation la règle suivante : $x \succsim y \iff \{j, \; x_j \succsim_j p_j\} \succsim_N \{j, \; y_j \succsim_j p_j\}$, avec, entre autres, $\{1,2,3,4\} \succ_N \{2,3,4\} \succ_N \{1,2,4\} \succ_N \{1,4\} \succ_N \{3,4\}$ Cette règle nous permet de retrouver les préférences $x^2 \succ x^1$ et $x^3 \succ x^4$, car $\{j, \; x^1_j \succsim_j p_j\} = \{1,2,4\}$, $\{j, \; x^2_j \succsim_j p_j\} = \{2,3,4\}$, $\{j, \; x^3_j \succsim_j p_j\} = \{1,4\}$ et $\{j, \; x^4_j \succsim_j p_j\} = \{3,4\}$.

Cet exemple montre que l'introduction de point de référence dans un modèle de préférences ordinales est susceptible d'accroître la capacité descriptive des modèles de préférence à notre disposition.

1.4.4 En décision dans l'incertain

Comme indiqué dans l'introduction, la capacité descriptive des modèles à utilité espérée est limitée dans certains cas. Nous montrons, dans les exemples suivants, en quoi l'introduction de niveaux de référence peut accroître la capacité descriptive de ces modèles.

Exemple 12 *Considérons un jeu à deux joueurs avec trois dés f, g, h inhabituels (voir l'origine de l'exemple dans Gardner (1970))* $f = (1,4,4,4,4,4)$, $g = (3,3,3,3,3,6)$ *et* $h = (2,2,2,5,5,5)$. *Le premier joueur (joueur 1) a le choix du dé qu'il souhaite utiliser. Puis le deuxième joueur (joueur 2) choisit un des dés restants. Chacun tire le dé n fois, et le vainqueur est celui qui a le meilleur tirage le plus grand nombre de fois. Par exemple, si le joueur 1 a choisi le dé f, et le joueur 2 le dé h, qu'ils ont tiré trois fois le dé, que les tirages sont* $(1,4,4)$ *pour le joueur 1 et* $(5,2,5)$ *pour le joueur 2, alors le vainqueur* *est le joueur 2 car il a gagné 2 fois (premier et troisième tirage), contre une seule fois (deuxième tirage) pour le joueur 1. La question se pose de savoir s'il existe une stratégie de jeu garantissant à l'un des deux joueurs une bonne probabilité de gain.*

La situation peut être modélisée par 8 états "virtuels" $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$ correspondant à toutes les combinaisons de résultats possibles, ainsi que par la table suivante :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
P	5/72	5/72	1/72	1/72	25/72	25/72	5/72	5/72
f	1	1	1	1	4	4	4	4
g	3	3	6	6	3	3	6	6
h	2	5	2	5	2	5	2	5

Ici, les préférences sur les dés peuvent être représentées par une relation de vraisemblance (ou Likely Dominance Rule (LDR), Dubois et al. (2003a)) :

$$f \succsim g \iff \{s \in S, f(s) \geq g(s)\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \geq f(s)\}$$

où $\succsim_\Lambda$ est la relation d'importance induite par la probabilité des événements. Une telle définition n'utilise que deux relations binaires ($\geq$ et $\succsim_\Lambda$). Nous avons ici : $P(f > g) = 50/72$, $P(g > h) = 42/72$, $P(h > f) = 42/72$, ce qui signifie que $f \succ g$, $g \succ h$ et $h \succ f$, c'est-à-dire que nous sommes en présence d'une relation non transitive. Cela implique qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur 2 qui peut toujours choisir un dé meilleur que le dé choisi par le joueur 1. La possibilité de décrire des préférences intransitives est caractéristique de la règle de dominance définie dans Dubois et al. (2003a) pour comparer les actes en décision dans l'incertain :

$$f \succsim g \iff \{s \in S, f(s) \succsim_X g(s)\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \succsim_X f(s)\} \tag{1.4}$$

où X est l'ensemble des conséquences possibles, $\succ_X$ une relation de préférence sur les éléments de X et $\succsim_\Lambda$ une relation de vraisemblance relative sur les événements (i.e. ensemble d'états). Une variante du jeu consiste à changer la règle en disant : "le gagnant est celui dont le score a été le plus grand nombre de fois supérieur ou égal à 4". Alors les préférences sur les dés sont définies par :

$$f \succsim g \iff \{s \in S, f(s) \geq 4\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \geq 4\}$$

Dans ce cas, l'introduction d'un niveau de référence "4" conduit à une relation de préférence transitive : $f \succ h \succ g$. Le niveau de référence choisi a de l'importance : un autre niveau de référence aurait conduit à une autre relation. Par exemple, la règle consistant à dire que "le gagnant est celui dont le score a été le plus grand nombre de fois supérieur ou égal à 3" conduit à la relation de préférence $g \succ f \succ h$. Un tel modèle est un exemple de relation de préférence dépendant d'un niveau de référence. On peut noter que, contrairement à la première version du jeu, ces préférences peuvent aussi être obtenues par une fonction d'utilité espérée telle que : pour tout $x \in \{1, \ldots, 6\}$, $u(x) = 1$ si $x \geq r$, où r est le niveau de référence, et $u(x) = 0$ sinon. Ce n'est pas toujours le cas, ainsi que nous pouvons le constater dans l'exemple suivant :

Exemple 13 *Considérons l'exemple développé dans Ellsberg (1961) : une urne contient un certain nombre de balles bleues, rouges ou vertes. La seule information en notre possession est que la proportion de balles bleues est de 1/3. Il est proposé au joueur de payer une somme p pour jouer à l'un des deux jeu f ou g suivants (au choix). Le joueur tire une balle au hasard dans l'urne. Dans le jeu f, il gagne une somme q si la balle est bleue. Dans le jeu g, il gagne la même somme q si la balle est rouge. Il est ensuite proposé au joueur le choix entre deux autres jeux f' et g'. Le joueur tire également une balle au hasard, et gagne dans le jeu f' la somme q si la balle est bleue ou verte, et dans le jeu g' il gagne la somme q si la balle est rouge ou verte.*

Les expériences pratiques montrent que les participants préfèrent généralement f à g (parce qu'ils ne sont pas sûrs qu'il y ait au moins un tiers de balles rouges dans l'urne), mais préfèrent également g' à f' (parce qu'ils sont sûrs qu'il y a deux tiers de balles rouges ou vertes). Un tel problème de décision peut être formalisé de la manière suivante : considérons trois états s_1 (bleu), s_2 (rouge), s_3(vert) et les deux conséquences possibles $x = q - p$, et $y = -p$. Les quatre jeux sont représentés par les actes f, g, f', g' avec les conséquences suivantes :

	f	g	f'	g'
s_1	x	y	x	y
s_2	y	x	y	x
s_3	y	y	x	x

Les préférences observées sont $f \succ g$ et $g' \succ f'$. Elles ne sont pas représentables par une fonction d'utilité espérée. En effet, une telle fonction suppose que, en notant P une fonction de probabilité sur l'ensemble des états possibles, $P(s_1).u(x) + P(s_2).u(y) > P(s_1).u(y) + P(s_2).u(x)$, puisque $f \succ g$. Une telle fonction conduit aussi à ce que $P(s_1).u(x) + P(s_2).u(y) < P(s_1).u(y) + P(s_2).u(x)$, puisque $f' \prec g'$, ce qui produit une contradiction De telles préférences ne sont pas compatibles avec le principe de la chose sûre (P2) proposé par Savage (1954) pour caractériser l'utilité espérée. Ici, ce principe est violé parce que nous avons $f \succ g$ et $g' \succ f'$, ce qui montre un renversement de préférence dû simplement au changement de x en y sur la situation s_3. Ce renversement induit une impossibilité de représenter ces préférences à l'aide du critère de l'utilité espérée. Remarquons que $\{s \in S, f(s) \geq g(s)\} = \{s \in S, f'(s) \geq g'(s)\} = \{s_1, s_3\}$ et

$\{s \in S, g(s) \geq f(s)\} = \{s \in S, g'(s) \geq f'(s)\} = \{s_2, s_3\}$. Le fait d'obtenir des préférences différentes entre les paires (f, g) et (f', g') montre que la préférence entre deux actes ne dépend pas seulement de la position relative de leurs conséquences sur chaque état. Cependant, l'introduction d'un niveau de référence peut facilement résoudre le problème. Les préférences peuvent par exemple être expliquées par la règle de préférence dépendant d'un niveau de référence suivante :

$$f \succsim g \iff \{s \in S, f(s) \geq 0\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \geq 0)\} \tag{1.5}$$

avec $s_1 \succ_\Lambda s_2$ et $\{s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_3\}$. Cet exemple montre que l'introduction d'un (ou plusieurs) points de référence peut faciliter la description des préférences observées dans certains cas.

1.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre introduit les domaines de la décision multicritère et de la décision dans l'incertain, et présenté pour chacun quelques résultats théoriques. Nous avons également montré que dans différents domaines, en particulier en économie, choix social ou psychologie, l'introduction de points de référence est assez naturelle tant pour enrichir le corpus des règles de décision que pour expliquer certaines relations de préférence obtenues expérimentalement. En particulier, l'apport d'un point de référence dans le cadre de préférences ordinales n'a pas encore étudié à notre connaissance. C'est pourquoi, en décision multicritère comme en décision dans l'incertain, nous nous intéressons à de nouveaux modèles d'agrégation de préférences ordinales à base de points de référence, permettant d'enrichir les capacités descriptives (pour pouvoir décrire des relations existantes) ou prescriptives (pour proposer des règles aboutissant à des relations de préférences complètes et transitives) des modèles existants. Nous proposons donc dans les chapitres suivants une étude des modèles obtenus en introduisant des points de référence dans les modèles classiques, en décision multicritère ordinale au chapitre 2, et en décision dans l'incertain au chapitre 3.

Chapitre 2

Points de référence en décision multicritère ordinale [1]

Résumé. L'introduction de points de référence dans les procédures d'agrégation ordinales en aide à la décision multicritère permet d'obtenir des règles d'agrégation de préférences originales et variées. Dans ce chapitre, nous commençons par présenter un modèle très général de préférences avec points de référence. La règle de préférence ainsi présentée, nous introduisons les propriétés nécessaires et suffisantes à la caractérisation axiomatique de cette règle, et en particulier l'axiome d'indépendance conditionnelle vis-à-vis des points de référence. Après avoir replacé la règle présentée dans le cadre de l'agrégation multicritère, et étudié brièvement le cas où le point de référence est unique, nous discutons des différentes variantes possibles de la règle proposée : six approches différentes sont en effet possibles. Cependant, nous n'étudions ensuite que les deux approches présentant un intérêt particulier. Ces deux approches, nommées ca/AC et ca/CA, consistent à comparer tout d'abord les alternatives critère par critère à chaque point de référence, afin de décrire les alternatives non plus par leurs valeurs sur chaque critère, mais par les ensembles de critères sur lesquels elles sont préférées aux points de référence. Nous étudions en premier lieu les approches ca/AC consistant à agréger ces différents ensembles en un score unique, par une fonction additivement décomposable ou non. Les règles de préférence présentées dans cette partie mènent toutes à des relations de préférence transitives. Nous étudions ensuite les approches ca/CA, basées sur le principe des relations de concordance, et consistant à comparer point de référence par point de référence les deux alternatives considérées avant d'agréger ces relations de préférence du point de vue de chaque point de référence en une relation globale. Nous montrons en particulier que la seule procédure d'agrégation de ces préférences menant toujours à une relation de préférence transitive est celle basée sur un ordre lexicographique sur les ordres dépendant de chaque point de référence.

[1] Ce chapitre s'appuie en partie sur les travaux présentés dans Rolland (2003, 2004, 2006a,b).

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les règles d'agrégation de préférence en décision multicritère ordinale et leur intérêt. Par ailleurs, nous avons introduit la notion de point de référence et nous avons montré que l'introduction de points de référence dans les méthodes de décision était naturelle dans de nombreux domaines. Nous proposons dans ce chapitre d'étudier plus précisément l'apport de l'introduction de points de référence dans des règles de décision multicritère ordinales. Il s'agit donc ici de n'étudier que les relations de préférence basées sur une comparaison ordinale avec un point de référence, c'est-à-dire les relations de préférence ne dépendant, pour une alternative $x \in \mathcal{X}$ et un ensemble de points de référence $\mathcal{P}$, que des ensembles de critères $C(x,p) = \{j \in N,\ x_j \succsim_j p_j\}$ pour chaque $p \in \mathcal{P}$.

Ce modèle de relations de préférence se formalise de la façon suivante :

Règle d'Agrégation Multicritère avec Points de Référence AMPR

$$x \succsim y \iff (C(x,p^1),\dots,C(x,p^m)) \overset{\triangleright}{\sim} (C(y,p^1),\dots,C(y,p^m)) \tag{2.1}$$

où $\succsim$ est une relation de préférence réflexive de partie symétrique $\sim$ et de partie asymétrique $\succ$, et $\overset{\triangleright}{\sim}$ est une relation d'importance réflexive sur les sous-ensembles de $(2^N)^m$, de partie symétrique $\overset{\triangle}{\sim}$ et de partie asymétrique $\triangleright$.

Exemple 14 *A titre d'illustration, les règles suivantes suivent le modèle général 2.1 :*

1. *règle de type additivement décomposable*

$$x \succsim y \iff |C(x,p^1)| + \dots + |C(x,p^m)| \geq |(C(y,p^1)| + \dots + |C(y,p^m)|$$

2. *règle de type lexicographique :*

$$\begin{array}{rcl} x \succ y & \iff & |C(x,p^1)| > |(C(y,p^1)| \\ & ou & |C(x,p^1)| = |(C(y,p^1)| \\ & & et\ |C(x,p^2)| > |(C(y,p^2)| \\ & \dots & \\ x \sim y & sinon & \end{array}$$

2.1 Points de référence : le modèle de base

Nous présentons dans cette partie la caractérisation axiomatique des relations de préférence vérifiant la règle d'agrégation de préférences à points de référence présentée en équation (2.1). Il s'agit de proposer un corpus d'axiomes tel qu'une relation de préférence vérifie ces axiomes si et seulement si elle suit la règle AMPR. Par la suite, nous affinerons ce modèle en proposant des caractérisations axiomatiques conduisant à des modèles particuliers.

2.1.1 Points de référence connus

Rappelons ici le cadre dans lequel nous situons nos travaux : $\mathcal{X}$ est un ensemble d'alternatives x décrites par leurs valeurs x_i prises sur n critères $1,\ldots,n$ dotés chacun d'un préordre $\succsim_j$, $j=1,\ldots,n$. L'ensemble des critères est noté N. Il a été introduit un ensemble de points de référence $\mathcal{P}=\{p^1,\ldots,p^m\}$ jouant un rôle dans la comparaison des alternatives. On note $C(x,y)=\{j\in N,\ x_j\succsim_j y_j\}$ l'ensemble des critères où x est préféré à y, et $X^i=C(x,p^i)$ l'ensemble des critères où x est préféré au point de référence p^i. La règle AMPR s'écrit alors :

$$x\succsim y \iff (X^1,\ldots,X^m)\overset{\triangleright}{\sim}(Y^1,\ldots,Y^m) \tag{2.2}$$

Pour que l'expression X^i ait un sens, il faut s'assurer au préalable que tout élément $x_j\in\mathcal{X}_j$ peut se comparer aux niveaux de référence p^i_j. C'est le sens de l'axiome de comparabilité minimale CM$\mathcal{P}$, qui sera supposé vérifié dans toute la suite de ce chapitre.

Axiome CM$\mathcal{P}$: Comparabilité minimale vis-à-vis des points de référence

$$\forall j\in N,\forall x\in\mathcal{X},\forall p\in\mathcal{P},\ x_j\succsim_j p_j \text{ ou } p_j\succsim_j x_j$$

Dans la règle AMPR que nous présentons, la comparaison de deux alternatives s'effectue par l'intermédiaire de leurs positions respectives du point de vue des points de référence. Deux alternatives se comportant de manière identique du point de vue de chaque point de référence doivent donc se comparer de manière identique aux autres alternatives. C'est ce qu'exprime l'axiome suivant d'indépendance conditionnellement aux points de référence :

Axiome IC$\mathcal{P}$: Indépendance conditionnellement aux points de référence
$\forall x,y,z,w\in\mathcal{X}$,

$$\left.\begin{array}{rcl}(X^1,\ldots,X^m) & = & (Z^1,\ldots,Z^m)\\ (Y^1,\ldots,Y^m\} & = & (W^1,\ldots,W^m)\end{array}\right\}\Rightarrow[(x\succsim y)\iff(z\succsim w)]$$

Cet axiome caractérise entièrement les relations de préférence suivant la règle AMPR, comme l'indique le théorème suivant :

Théorème 3 *Soient $p^1,\ldots,p^m\in\mathcal{P}$ m points de référence. La relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ vérifie l'axiome IC$\mathcal{P}$ si et seulement si il existe une relation d'importance $\overset{\triangleright}{\sim}$ sur $(2^N)^m$ telle que, $\forall x,y\in\mathcal{X}$,*

$$x\succsim y \iff (X^1,\ldots,X^m)\overset{\triangleright}{\sim}(Y^1,\ldots,Y^m)$$

Preuve du théorème 3

($\Rightarrow$) Si la relation de préférence $\succsim$ vérifie IC$\mathcal{P}$, elle suit la règle AMPR. En effet, définissons la relation de préférence $\overset{\vartriangleright}{\sim}$ sur les m-uplets d'ensembles de critères $A, B \in (2^N)^m$ par

$$A \overset{\vartriangleright}{\sim} B \iff \exists x, y \in \mathcal{X}, \begin{cases} A = (X^1, \ldots, X^m) \\ B = (Y^1, \ldots, Y^m) \\ x \succsim y \end{cases} \tag{2.3}$$

les parties symétriques $\overset{\vartriangle}{\sim}$ et asymétriques $\vartriangleright$ de $\overset{\vartriangleright}{\sim}$ s'expriment ainsi :

$$A \overset{\vartriangle}{\sim} B \iff \exists x, y \in \mathcal{X}, \begin{cases} A = (X^1, \ldots, X^m) \\ B = (Y^1, \ldots, Y^m) \\ x \sim y \end{cases}$$

$$A \vartriangleright B \iff \exists x, y \in \mathcal{X}, \begin{cases} A = (X^1, \ldots, X^m) \\ B = (Y^1, \ldots, Y^m) \\ x \succ y \end{cases}$$

Cette construction n'a de sens que s'il n'existe pas deux paires antagonistes (x, y) et (z, w) qui induisent respectivement $A \overset{\vartriangleright}{\sim} B$ et $B \vartriangleright A$. Supposons qu'il existe $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ tels que $A = (X^1, \ldots, X^m) = (Z^1, \ldots, Z^m)$, $B = (Y^1, \ldots, Y^m) = (W^1, \ldots, W^m)$ et $x \succsim y$ et $w \succ z$. Une telle situation est en contradiction avec l'axiome IC$\mathcal{P}$. L'axiome IC$\mathcal{P}$ garantit donc la cohérence de la relation $\overset{\vartriangleright}{\sim}$ telle que définie en (2.3).

($\Leftarrow$) si la relation de préférence $\succsim$ suit la règle AMPR, elle satisfait l'axiome IC$\mathcal{P}$. En effet, supposons que $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ sont tels que $(X^1, \ldots, X^n) = (Z^1, \ldots, Z^n)$ et $(Y^1, \ldots, Y^n) = (W^1, \ldots, W^n)$. La relation préférence $x \succsim y$ est alors équivalente à la relation $(X^1, \ldots, X^n) \overset{\vartriangleright}{\sim} (Y^1, \ldots, Y^n)$, qui elle-même est équivalente à la relation $(Z^1, \ldots, Z^n) \overset{\vartriangleright}{\sim} (W^1, \ldots, W^n)$, qui elle-même est équivalente à la relation $z \succsim w$.

$\square$

L'exemple suivant permet d'illustrer certaines conséquences de l'axiome IC$\mathcal{P}$.

Exemple 15 *Soit* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, *avec* $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. *Soit* $\mathcal{P} = \{p^1, p^2\}$ *avec* $p^1 = (6, 6)$ *et* $p^2 = (4, 4)$. *Posons* $x = (7, 5)$ *et* $y = (1, 8)$, *ainsi que* $z = (8, 4)$ *et* $w = (3, 9)$. *On a alors* $X^1 = \{1\}$, $X^2 = \{1, 2\}$ *et* $Y^1 = \{2\}$, $Y^2 = \{2\}$. *De même,* $Z^1 = \{1\}$, $Z^2 = \{1, 2\}$ *et* $W^1 = \{2\}$, $W^2 = \{2\}$. *Donc si IC*$\mathcal{P}$ *est vérifié,* $x \succ y$ *entraîne* $z \succ w$ *car* $(X^1, X^2) = (Z^1, Z^2)$ *et* $(Y^1, Y^2) = (W^1, W^2)$.

Il ne faut pas confondre l'axiome IC$\mathcal{P}$ avec un axiome plus compact, noté EC$\mathcal{P}$ et présenté ci-dessous :

Axiome EC$\mathcal{P}$: Equivalence conditionnellement aux points de référence

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, \quad (X^1, \ldots, X^m) = (Y^1, \ldots, Y^m) \Rightarrow x \sim y$$

Cependant, les deux axiomes ne sont pas sans liens comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 1 *Dans le cas où la relation $\succsim$ est un préordre (donc une relation binaire réflexive et transitive),*

$$IC\mathcal{P} \iff EC\mathcal{P}$$

Preuve :
IC$\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ EC$\mathcal{P}$ vaut même si $\succsim$ est réflexive sans être transitive. En effet, il suffit dans IC$\mathcal{P}$ de prendre $x = z = w$ et y tel que $(X^1, \ldots, X^m) = (Y^1, \ldots, Y^m)$ pour avoir $x \succsim y \iff x \succsim x$. Comme $x \sim x$, par définition de $\sim$ comme étant la partie symétrique de la relation $\succsim$, cela implique que $x \sim y$, ce qui prouve EC$\mathcal{P}$. Montrons maintenant que EC$\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ IC$\mathcal{P}$ si $\succsim$ est transitive. Soient $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ tels que $(X^1, \ldots, X^m) = (Z^1, \ldots, Z^m)$ et $(Y^1, \ldots, Y^m) = (W^1, \ldots, W^m)$. L'axiome EC$\mathcal{P}$ entraîne $x \sim z$ et $y \sim w$. Supposons que $x \succsim y$. La transitivité de $\succsim$ entraîne alors $z \succsim w$, ce qui prouve que l'axiome IC$\mathcal{P}$ est vérifié. □

Notons que si $\succsim$ n'est pas un préordre, l'axiome EC$\mathcal{P}$ peut être vérifié sans que IC$\mathcal{P}$ le soit. Prenons par exemple une situation où l'indifférence n'est pas transitive : $x \sim z$, $y \sim w$, $x \succ y$ et $z \sim w$, avec $(X^1, \ldots, X^m) = (Z^1, \ldots, Z^m)$ et $(Y^1, \ldots, Y^m\} = (W^1, \ldots, W^m)$. L'axiome EC$\mathcal{P}$ est vérifié alors que l'axiome IC$\mathcal{P}$ ne l'est pas ; en effet, par IC$\mathcal{P}$ nous devrions avoir $z \succ w$ puisque $x \succ y$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, la relation $\succsim$ peut vérifier EC$\mathcal{P}$ sans pour autant suivre la règle AMPR. L'axiome EC$\mathcal{P}$ est nécessaire mais non suffisant pour caractériser la règle AMPR.

La règle AMPR possède un grand pouvoir descriptif : le modèle est suffisamment général pour que de très nombreuses règles de décision utilisant implicitement ou explicitement la notion de niveaux de référence puissent rentrer dans le cadre proposé. Montrons sur un exemple comment la règle AMPR peut servir à modéliser une règle de décision utilisant des niveaux de référence.

Exemple 16 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$, avec $\forall i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{X}_i = [0, 20]$. Posons $U(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$, avec $u_i(x_i) = [\frac{x_i}{4}]$, où $[x_i]$ représente la partie entière de $[x_i]$. Étudions la relation de préférence $\succsim$ définie par $x \succsim y \iff U(x) \geq U(y)$: cette relation peut-elle se modéliser comme une instance particulière de la règle AMPR ?*

Posons $p^5 = (20, 20, \ldots, 20)$*,* $p^4 = (16, 16, \ldots, 16)$*,* $p^3 = (12, 12, \ldots, 12)$*,* $p^2 = (8, 8, \ldots, 8)$ *et* $p^1 = (4, 4, \ldots, 4)$*. On a alors* $\forall k = 1, \ldots, 5\ u_i(x_i) \geq k \Rightarrow i \in C(x, p^k)$*. La relation* $\succsim$ *considérée peut donc se modéliser comme l'instance suivante de la règle AMPR :*

$$x \succsim y \iff \sum_{k=1}^{5} |C(x, p^k)| \geq \sum_{k=1}^{5} |C(y, p^k)|$$

Remarques :

1. dans le modèle AMPR, il est essentiel de bien voir la coalition de critères X comme étant représentative de la capacité d'une alternative à atteindre (ou dépasser) un certain niveau de référence : une fois ce niveau atteint, il n'est pas tenu compte de la différence éventuelle entre la valeur d'une alternative et celle du point de référence. En particulier, il est important de noter que le point de référence p est considéré comme préféré (ou indifférent) à toute autre alternative relativement à lui même ; en effet, $\{j \in N, p_j \succsim p_j\} = N$, ce qui est la plus grande coalition de critères possible, et donc, naturellement, la plus importante.
2. de même, la règle AMPR fait que la dominance de Pareto peut ne pas être vérifiée entre deux alternatives, puisque seules jouent les comparaisons des alternatives avec chaque point de référence, et non la comparaison directe des alternatives entre elles. Supposons que deux alternatives x et y soient telles que pour chaque critère, nous ayons deux points de référence p^1 et p^2 tels que $p^1_j \succ_j x_j \succ_j y_j \succ_j p_j$. Nous constatons que $\forall p \in \mathcal{P}$, $C(x, p) = C(y, p)$ et donc $x \sim y$, bien que formellement x domine y au sens de Pareto. Même si cela semble contre-intuitif en premier abord, cela signifie simplement que seuls les positions des alternatives du point de vue des points de référence sont importantes, et que vu des points de référence, le fait que $x_j \succ_j y_j$ n'est pas important s'ils se comparent de la même manière à tous les niveaux de référence.
3. le modèle AMPR permet de distinguer au maximum 2^n niveaux distincts de préférence par point de référence, qui correspondent à autant de coalitions de critères possibles.
4. le modèle AMPR proposé reste très général : en particuliers, il n'implique aucune propriété particulière sur la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$, comme par exemple la monotonie par rapport à l'inclusion. Nous traiterons de manière détaillée dans les parties suivantes.

2.1.2 Points de référence inconnus

Nous avons vu dans la section précédente une condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation de préférence $\succsim$ donnée suive la règle AMPR avec un corpus de points de référence $\mathcal{P}$ donné. Cependant, il est des cas où une relation de préférence semble se comporter comme si elle faisait intervenir des points de référence, mais sans que ceux-ci soient connus *a priori*. Est-il possible alors de caractériser ces situations, et d'exhiber les points de référence par rapport auxquels la relation de préférence semble bâtie ? En d'autres termes, quelles sont les conditions pour que la règle AMPR puisse rendre compte d'une relation de préférence particulière observée ? Comment révéler alors les points de référence ? Il est difficile de répondre de manière générale en exhibant une condition nécessaire et suffisante : la variété des situations rend délicate la question de la nécessité d'une condition. Nous pouvons cependant proposer une condition suffisante pour que la relation de préférence $\succsim$ s'exprime grâce à la règle AMPR, si les points de référence ne sont pas connus *a priori*. L'idée sous-jacente est que l'utilisation de points de référence va se manifester par des effets de seuil dans les préférences, selon que la valeur d'une alternative sur un critère sera préférée ou non à la valeur de référence. De manière plus précise, la présence de points de référence va permettre de regrouper en classes d'équivalences les différentes valeurs prises par un critère. C'est le sens de l'axiome Cl_{m+1} proposé ci-dessous :

Axiome Cl_{m+1} : m+1 classes d'équivalence
Soit $\succsim$ une relation de préférence. On définit n relations binaires E_j, $j = 1, \ldots, n$, sur $\mathcal{X}_j$ par $a_j E_j b_j \iff \forall x \in \mathcal{X},\ (a_j, x_{-j}) \sim (b_j, x_{-j})$. On dit alors que $\succsim$ vérifie l'axiome Cl_{m+1} si et seulement si les relations E_j sont des relations d'équivalence et si $\forall j \in 1, \ldots, N$, la relation E_j possède au plus m+1 classes d'équivalence.

Si la relation $\succsim$ est transitive, l'axiome Cl_{m+1} est suffisant pour exhiber un ensemble de points de référence permettant à la relation $\succsim$ de suivre la règle AMPR, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 4 *Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ est transitive et vérifie l'axiome Cl_{m+1} alors il existe m points de référence $p^1, \ldots, p^m$ et une relation d'importance $\trianglerighteq$ sur $2^N \times \ldots \times 2^N$ telle que*

$$x \succsim y \iff (C(x, p^1), \ldots, C(x, p^m)) \trianglerighteq (C(y, p^1), \ldots, C(y, p^m))$$

Preuve du théorème 4
Soit $\succsim$ vérifiant Cl_{m+1}. Pour chaque critère $j = 1, \ldots, n$ on choisit $m + 1$ représentants des classes d'équivalence i de la relation E_j, notés p_j^i, $i = 0, \ldots, m$, tels que $\forall x_j \in \mathcal{X}_j$ tel que $x_j E_j p_j^i$, on ait $x_j \succsim_j p_j^i$ et $p_j^{i-1} \succsim_j x_j$ (la relation $\succsim_j$ est transitive par définition). S'il existe $m + 1$ classes d'équivalence sur le critère j, alors nous pouvons choisir les p_j^i tels que : $\forall i = 1, \ldots, m$, $p_j^{i-1} \succ_j p_j^i$. S'il existe moins de $m+1$ classes d'équivalence sur le critère j (mettons $m + 1 - k$), alors nous pouvons choisir les p_j^i tels que : $\forall i = 1, \ldots, m$, $p_j^{i-1} \succsim_j p_j^i$ et pour k d'entre eux, $p_j^{i-1} \sim_j p_j^i$.

Soient x et $y \in \mathcal{X}$ tels que $\forall j$, $x_j E_j y_j$. On a alors $x \sim (y_1, x_2, \ldots, x_n)$ car $x_1 E_1 y_1$. On a aussi $(y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \sim (y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)$ car $x_2 E_2 y_2$, etc. D'où, en passant de x à y par transitivité coordonnée par coordonnée, il vient $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots y_n)$ d'où

$$[\forall j, x_j E_j y_j] \Rightarrow x \sim y \tag{2.4}$$

Soient $p^i = (p_1^i, p_2^i, \ldots, p_n^i)$ et $\mathcal{P} = \{p^i, i = 1, \ldots, m\}$. On a par définition des ensembles $C(x, p^i)$: $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $x_j \succsim_j p_j^i \iff j \in C(x, p^i)$ et $p_j^i \succ_j x_j \iff j \notin C(x, p^i)$. Donc $C(x, p^i) = C(y, p^i)$ entraîne que pour tout $j = 1, \ldots, n$, $x_i \succsim_j p_j^i \iff y_i \succsim_j p_j^i$, et $p_j^i \succ_j x_j \iff p_j^i \succ_j y_j$. Et donc si $\forall p \in \mathcal{P}, C(x, p) = C(y, p)$, cela signifie que $\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall j = 1, \ldots, n$, $x_i \succsim_j p_j \iff y_i \succsim_j p_j$, et $p_j \succ_j x_j \iff p_j \succ_j y_j$. Cela signifie donc que $\forall p \in \mathcal{P}, x_j \sim_j p_j \iff y_j \sim_j p_j$, ce qui s'exprime aussi $x_j E_j p_j \iff y_j E_j p_j$, et donc pour tout couple (x, y) de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, on obtient l'implication suivante : $[\forall p^i \in \mathcal{P}, C(x, p^i) = C(y, p^i)] \iff [\forall j \in N, \quad x_j E_j y_j]$, et grâce à l'équation (2.4),

$$[\forall p^i \in \mathcal{P}, C(x, p^i) = C(y, p^i)] \Rightarrow x \sim y$$

Cela montre que l'axiome EC$\mathcal{P}$ est vérifié sur le corpus des points de référence p_j^i construits grâce à l'axiome Cl_{m+1}. Comme la relation $\succsim$ est transitive, l'axiome IC$\mathcal{P}$ est aussi vérifié. Nous sommes donc dans le cadre du théorème 3, qui s'applique alors. Cela prouve le théorème 4. $\square$

Exemple 17 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, avec $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Supposons que nous ayons connaissance, entre autres, des préférences suivantes sur les éléments de $\mathcal{X}$:*

1. $(6, 7) \sim (5, 7) \succ (4, 7) \sim (3, 7)$
2. $(6, 4) \sim (5, 4) \succ (4, 4) \sim (3, 4)$
3. $(5, 8) \sim (5, 7) \succ (5, 6) \sim (5, 5)$
4. $(4, 8) \sim (4, 7) \sim (4, 6) \sim (4, 5)$

Nous pouvons en déduire les relations d'équivalence suivantes sur les valeurs prises par les critères :

- $6E_15$ *et* $4E_13$ *par les informations 1 et 2.*
- $8E_27$ *et* $6E_25$ *par les informations 3 et 4.*

L'axiome Cl_2 est alors vérifié sur l'échantillon à notre disposition, ce qui est compatible avec l'existence d'un point de référence obtenu en prenant les valeurs minimales de chaque classe d'équivalence pour chaque critère. Ici, le point de référence est donc $p = (5, 7)$. On peut également déduire des informations à notre disposition la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ qui est $(\{1, 2\}) \triangleright (\{2\})$ (information 1) ; $(\{1\}) \triangleright (\emptyset)$ (information 2) ; $(\{1, 2\}) \triangleright (\{1\})$ (information 3) ; $(\{2\}) \overset{\triangle}{\sim} (\emptyset)$ (information 4). Il nous manque une information pour déterminer la relation d'importance entre $(\{1\})$ et $(\{2\})$. Pour cela, il faudrait par exemple demander au décideur de comparer les alternatives (4,7) et (5,4).

2.1.3 Remarque sur les points de référence

Dans le cas où les points de référence sont inconnus, il apparaît que l'on ne révèle en réalité que les différents niveaux d'équivalence sur chaque critère. Or un point de référence est un élément de $\mathcal{X}$, donc un ensemble correspondant à une valeur sur chacun des critères. Il est donc possible d'obtenir plusieurs corpus de points de référence correspondants aux mêmes niveaux d'équivalence sur chaque critère.

Exemple 18 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Supposons que l'observation des préférences conduise à trouver trois classes d'équivalence pour chaque critère, dont les représentants sont $a_1 \succ_1 b_1 \succ_1 c_1$ et $a_2 \succ_2 b_2 \succ_2 c_2$. D'après le mode de construction des points de référence vu ci-dessus, on peut conclure à l'existence de deux points de référence prenant les valeurs a_1, b_1 sur le critère 1 et a_2, b_2 sur le critère 2. Cependant, il y a les deux possibilités suivantes pour les points de référence :*
- *Possibilité 1 : $p^1 = (a_1, a_2)$ et $p^2 = (b_1, b_2)$*
- *Possibilité 2 : $p^1 = (a_1, b_2)$ et $p^2 = (b_1, a_2)$*

Comme il existe une marge de manoeuvre pour le choix des points de référence, il est naturel de se demander si les ensembles de points de référence sont tous équivalents ou si certaines structures particulières sont plus intéressantes que d'autres. Plus précisément, il peut être intéressant de voir si les points de référence manipulés peuvent être considérés comme étant ordonnés suivant une relation de dominance de type dominance faible de Pareto, notée $\succsim_{Pa}$ telle que $x \succsim_{Pa} y \iff \forall j \in N,\ x_j \succsim_j y_j$. En d'autres termes, peut-on supposer que $\forall j \in N$, $p^i_j \succsim_j p^{i-1}_j$? La réponse est affirmative comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 2 *Si IC$\mathcal{P}$ est vérifié, on peut supposer sans perte de généralité que*

$$\forall j \in N, \quad p^1_j \succsim_j p^2_j \succsim_j \dots \succsim_j p^m_j$$

Preuve de la proposition 2

Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $\mathcal{X}$. Soit $\mathcal{P} = \{p^1, \dots, p^m\}$ l'ensemble des points de référence. Supposons que l'axiome IC$\mathcal{P}$ soit vérifié. Il existe donc une relation d'importance $\trianglerighteq$ telle que

$$x \succsim y \iff (C(x, p^1), \dots, C(x, p^m)) \trianglerighteq (C(y, p^1), \dots, C(y, p^m))$$

Soit $\mathcal{Q} = \{q^1, \dots, q^m\}$ une autre famille de points de référence tels que :

1. $\forall j \in N$, $q^1_j \succsim_j q^2_j \succsim_j \dots \succsim_j q^m_j$
2. $\exists n$ permutations de $\{1, \dots, m\}$ notées σ_j, $j = 1, \dots, n$ telles que $q^i_j = p^{\sigma_j(i)}_j$

Les points de référence de $\mathcal{Q}$ sont donc obtenus par ré-arrangement des valeurs des points de référence de $\mathcal{P}$ de telle sorte que les points de référence $q^1, \ldots, q^m$ soient ordonnés suivant la relation de dominance $\succsim_{Pa}$.

Soient x, y, z et $w \in \mathcal{X}$ tels que $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $C(x, p^i) = C(z, p^i)$ et $C(y, p^i) = C(w, p^i)$. Il est alors évident que $\forall q^i \in \mathcal{Q}$, $C(x, q^i) = C(z, q^i)$ et $C(y, q^i) = C(w, q^i)$. L'axiome IC$\mathcal{P}$ est donc aussi vérifié avec l'ensemble $\mathcal{Q}$, ce qui signifie qu'il existe une relation d'importance $\trianglerighteq'$ telle que

$$x \succsim y \iff (C(x, q^1), \ldots, C(x, q^m)) \trianglerighteq' (C(y, q^1), \ldots, C(y, q^m))$$

□

Nous ferons donc dorénavant l'hypothèse que les éléments de $\mathcal{P}$ sont ordonnés pour la relation $\succsim_{Pa}$ de sorte que $p^1 \succsim_{Pa} p^2 \succsim_{Pa} \ldots \succsim_{Pa} p^m$

Exemple 19 *Nous reprenons ici le cadre de l'exemple 9 du choix d'un hébergement touristique : les quatre critères retenus sont le prix (1), le confort (2), la proximité du site touristique choisi (3) , et le cadre général (4). Le prix est en euros, le confort est noté de zéro à cinq étoiles, la proximité du site choisi est répartie en quatre catégories (A : sur place ; B : à proximité ; C : dans les environs, D : éloigné) et le cadre général en trois niveaux "+", "=" et "-". Supposons que trois hébergements de référence* p^1, p^2, p^3 *ont été identifiés :* p^1*, hébergement de type "luxe",* p^2*, hébergement de type "bon dans sa catégorie", et* p^3*, "hébergement au coeur du site", avec les valeurs suivantes :*

	1	2	3	4
p^1	100	*****	C	+
p^2	40	***	B	=
p^3	60	**	A	+

Il est alors possible de prendre comme référence les trois points q^1, q^2, q^3 *suivants, dont l'interprétation dans le contexte est différentes, mais qui utilisent les mêmes valeurs de seuil :*

	1	2	3	4
q^1	40	*****	A	+
q^2	60	***	B	+
q^3	100	**	C	=

Considérons les deux hébergements x *et* y *suivants :*

	1	2	3	4
x	40	****	B	-
y	80	**	A	=

Nous obtenons les ensembles suivants :

- *pour* x :
  - $C(x,p^1) = \{1,3\}$, $C(x,p^2) = \{1,2,3\}$ *et* $C(x,p^3) = \{1,2\}$
  - $C(x,q^1) = \{1\}$, $C(x,q^2) = \{1,2,3\}$ *et* $C(x,q^3) = \{1,2,3\}$
- *pour* y :
  - $C(y,p^1) = \{1,3\}$, $C(y,p^2) = \{3,4\}$ *et* $C(y,p^3) = \{2,3\}$
  - $C(y,q^1) = \{3\}$, $C(y,q^2) = \{3\}$ *et* $C(y,q^3) = \{1,2,3,4\}$

Une conséquence de cette proposition est que les ensembles $X^i = C(x,p^i)$ sont inclus les uns dans les autres : $\forall x \in \mathcal{X}$, $X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^m$. Cela montre que la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ n'utilisera qu'une partie de la relation d'importance $\overset{\triangleright}{\sim}$ sur $(2^N)^m$. En effet, certains m-uplets de sous-ensembles de critères ne correspondent à aucune alternative possible : leur importance, au sens de la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$, est donc sans objet nous concernant.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter un protocole complet de révélation des points de référence dans le cas où l'axiome Cl_{m+1} est vérifié. Cette méthode repose sur un postulat : l'ensemble $\mathcal{X}$ est fini. En effet, si un ensemble $\mathcal{X}_j$ est infini, il est impossible de vérifier que $a_jE_jb_j \iff \forall x \in \mathcal{X},\ (a_j,x_{-j}) \sim (b_j,x_{-j})$. De manière générale, si, tout en étant fini, le corpus des alternatives considérées est important en nombre, le protocole est inapplicable en pratique, du fait qu'il faut passer en revue une à une toutes les alternatives.

L'algorithme 1 détaillé ci-dessous consiste dans un premier temps à déterminer les classes d'équivalences E_j^i pour chaque critère, puis de choisir un représentant pour chacune de ces classes d'équivalence. la détermination des classes d'équivalence se fait en faisant varier la valeur prise par une alternative sur un critère toutes choses étant égales par ailleurs. Pour tout sous-ensemble $S_j \subseteq \mathcal{X}_j$, nous définissons l'élément maximum, non forcément unique, $\overline{x}_j = \max(x_j \in S_j)$ par $\forall x_j \in S_j$, $\overline{x}_j \succsim_j x_j$ et l'élément minimum, non forcément unique, $\underline{x}_j = \min(x_j \in S_j)$ par $\forall x_j \in S_j$, $x_j \succsim_j \underline{x}_j$. On choisira l'élément minimum comme représentatif d'une classe d'équivalence.

Nous verrons au chapitre 4.2.5 un exemple utilisant cet algorithme pour révéler les points de référence.

2.1.4 Liens avec d'autres modèles

Place de la règle AMPR en décision multicritère ordinale

La caractérisation axiomatique des modèles de préférence en décision multicritère ordinale a connu des développements récents, par exemple dans Fargier et Perny (2000), Bouyssou et Pirlot (2002a), Bouyssou et Pirlot (2002b), Dubois et al. (2002), Dubois et al. (2003b), Grabisch et Perny (2003). En particulier, l'objectif de Bouyssou et Pirlot (2002b)

Algorithme 1 Révélation des points de référence

1) Calcul des ensembles E_j^i :
Pour $j = 1$ à n
Initialisation : on pose $k = 1$, $E_j^k = \mathcal{X}_j$ et $\overline{x}_j = \max\{x_j \in E_j^k\}$
Tant que $E_j^k \neq \emptyset$
Pour tout $z \in \mathcal{X}$, *Pour tout* $x_j \in \mathcal{X} - \{\overline{x}_j\}$
Si $\neg[(x_j, z_{-j}) \sim (\overline{x}_j, z_{-j})]$ *Alors* $E_j^k = E_j^k - \{x_j\}$
fin *Pour tout*
Poser $k = k+1$, $E_j^k = \mathcal{X}_j - \bigcup_{l<k} E_j^l$, $\overline{x}_j = \max\{x_j \in E_j^k\}$ et $j = j+1$
fin *Tant que*
fin *Pour*
2) Choix des représentants p_j^i :
On pose $m = \max_i$(nombre de classes E_j^i)-1
Pour $j = 1$ à n
Pour $i = 1$ à m
Si $E_j^i \neq \emptyset$ *Alors*
$p_j^i = \min(x_j \in E_j^i)$
Sinon
$p_j^i = p_j^{i-1}$
fin Si
fin *Pour i*
fin *Pour j*

fin

est de proposer un modèle général capable de capturer toute procédure d'agrégation multicritère, conduisant ou non à une relation de préférence transitive ou complète. Le modèle proposé, appelé modèle (M), s'exprime de la façon suivante :

Définition 8 Modèle (M) (Bouyssou et Pirlot (2002b))

$$x \succsim y \iff F(f_1(x_1, y_1), \ldots, f_n(x_n, y_n)) \geq 0$$

Avec
- f_i une fonction $\mathcal{X}_i^2 \to \mathbb{R}$ antisymétrique,
- F une fonction $\prod_{i=1}^n f_i(\mathcal{X}_i^2) \to \mathbb{R}$ non décroissante en tous ses arguments et impaire.

Ce modèle (M) est un modèle très général permettant de décrire de nombreuses relations de préférence ordinales. En particulier, la plupart des relations de préférence suivant la règle AMPR vérifient le modèle (M). Quelles sont alors les raisons d'étudier la règle AMPR ?

1. d'un point de vue prescriptif, la règle AMPR permet de modéliser efficacement des relations de préférence basées sur l'utilisation explicite de points de référence lors de la procédure d'agrégation. En effet, le modèle (M) ne propose pas explicitement des points de référence au décideur pour expliciter le mécanisme décisionnel qu'il utilise.
2. d'un point de vue descriptif : la règle AMPR permet de décrire et d'expliquer la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ à partir des relations de préférence $\succsim_j$ données *a priori* sur chaque critère $\mathcal{X}_j$. Ce positionnement diffère de celui adopté dans Bouyssou et Pirlot (2002b), dans lequel les relations $\succsim_j$ ne sont pas données mais sont révélées *a posteriori* à partir de la connaissance de la relation $\succsim$.
3. de même, il existe des situations où la relation de préférence peut être décrite à l'aide de la règle AMPR et non par le modèle (M). La caractérisation axiomatique du modèle (M) proposé par Bouyssou et Pirlot (2002b) montre que l'axiome ARC1 détaillé ci-dessous est nécessairement vérifié si la relation de préférence vérifie le modèle (M). Or nous proposons ci-dessous à titre d'exemple une relation de préférence suivant la règle AMPR et ne vérifiant pas l'axiome ARC1 et donc le modèle (M).

Présentons tout d'abord l'axiome de comparaison inter-critère ARC1 tel qu'introduit par Bouyssou et Pirlot (2002b) :

Axiome ARC1

$$\forall j \in N,\ \forall x, y, z, w \in X, \quad \left.\begin{array}{r} x \succ y \\ \text{et} \\ z \succ w \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_j, z_{-j}) \succ (y_j, w_{-j}) \\ \text{ou} \\ (z_j, x_{-j}) \succ (w_j, y_{-j}) \end{array}\right.$$

Introduisons ensuite le cadre de notre exemple :

Exemple 20 *Soit* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$ *et* $\mathcal{X}_j = \{0, \ldots, 10\}$*. Soit* $\mathcal{P} = \{p^1, p^2, p^3\}$ *avec* $p^1 = (8, 8, 8)$*,* $p^2 = (5, 5, 5)$ *et* $p^3 = (2, 2, 2)$*. Soient les alternatives suivantes :*

	1	2	3	4
x	9	6	3	1
y	6	3	1	9
z	3	1	9	6
w	1	9	6	3

Nous allons proposer maintenant une relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ *sur les triplets de sous-ensembles de critères telle que* $x \succsim y \iff (X^1, X^2, X^3) \overset{\triangleright}{\sim} (Y^1, Y^2, Y^3)$ *d'une part, et telle que* $\succsim$ *ne vérifie pas l'axiome ARC1 d'autre part. Pour cela, nous étudierons les relations entre les alternatives* x, y, z, w *et les alternatives* (y_1, w_{-1})*,* (x_1, z_{-1})*,* (w_1, y_{-1})*,* (z_1, x_{-1})*.*

Soit la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ *telle que, entre autre :*

1. $(\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}) \triangleright (\{4\},\{1,4\},\{1,2,4\})$
2. $(\{3\},\{3,4\},\{1,3,4\}) \triangleright (\{2\},\{2,3\},\{2,3,4\})$
3. $(\{2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}) \triangleright (\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,3,4\})$
4. $(\{4\},\{4\},\{2,4\}) \triangleright (\emptyset,\{2\},\{1,2,3\})$

La relation d'importance $\triangleright$ *ainsi introduite est bien asymétrique, et même ne comporte pas de cycle.*

- $X^1 = \{1\}$, $X^2 = \{1,2\}$, $X^3 = \{1,2,3\}$ *et* $Y^1 = \{4\}$, $Y^2 = \{1,4\}$, $Y^3 = \{1,2,4\}$. *La contrainte 1 entraîne donc que* $x \succ y$.
- $Z^1 = \{3\}$, $Z^2 = \{3,4\}$, $Z^3 = \{1,3,4\}$ *et* $W^1 = \{2\}$, $W^2 = \{2,3\}$, $W^3 = \{2,3,4\}$. *La contrainte 2 entraîne donc que* $z \succ w$.
- *la contrainte 3 entraîne* $(y_1, w_{-1}) \succ (x_1, z_{-1})$
- *la contrainte 4 entraîne* $(w_1, y_{-1}) \succ (z_1, x_{-1})$

Nous constatons que l'axiome ARC1 n'est pas vérifié, car nous avons $x \succ y$ *et* $z \succ w$, *mais ni* $(x_1, z_{-1}) \succ (y_1, w_{-1})$, *ni* $(z_1, x_{-1}) \succ (w_1, y_{-1})$. *La relation de préférence considérée ne peut donc être décrite en utilisant le modèle (M).*

Liens avec les méthodes de tri non-compensatoires

Les méthodes de tri ou de classement consistent à répartir les différentes alternatives dans des catégories prédéfinies. Si les catégories sont ordonnées, on parle de méthodes de tri, et il est alors possible d'obtenir une relation de préférence sur les alternatives en comparant les catégories auxquelles elles appartiennent. Certaines méthodes de tri dites "non compensatoires", comme par exemple ELECTRE TRI (voir Yu (1992), Roy et Bouyssou (1993)), n'utilisent qu'une information ordinale pour affecter les différentes alternatives aux catégories, en les comparant à des "niveaux de référence" délimitant les catégories : cela n'est pas sans rappeler la règle AMPR. Il est alors possible d'imaginer un modèle inspiré par les comparaisons mises en oeuvre dans la méthode ELECTRE TRI entre les alternatives et des niveaux de référence précis. Ce modèle consiste à dire qu'une alternative x est préférée à une alternative y si x est préférée au point de référence et pas y. En d'autres termes, en basant la comparaison des alternatives au point de référence sur une règle de concordance, le modèle s'exprime de la manière suivante :

$\exists \overset{\triangleright}{\sim}$ relation d'importance sur 2^N telle que

$$\begin{array}{ll} x \succ y & \Longleftrightarrow \quad C(x,p) \triangleright C(p,x) \text{ et non}(C(y,p) \triangleright C(p,y)) \\ x \sim y & \text{sinon} \end{array} \tag{2.5}$$

Pourquoi avons-nous préféré étudier la règle AMPR plutôt que le modèle (2.5) ? Il y a deux principales raisons :

1. le modèle (2.5) est simple mais ne permet qu'une faible discrimination : en effet, l'introduction d'un point de référence ne permet de distinguer que trois classes d'alternatives de X : les alternatives qui sont préférées au point de référence p, celles qui lui sont indifférentes et celles pour qui le point de référence p leur est préféré. Au contraire, la règle AMPR utilisée avec un seul point de référence autorise théoriquement jusqu'à 2^n classes d'équivalence, soit toutes les coalitions $C(x,p)$ possibles, ce qui permet de modéliser des relations de préférence beaucoup plus fines.

2. par ailleurs, la règle AMPR permet de décrire le modèle (2.5), qui apparait donc comme un cas particulier de AMPR. En effet, si la relation de préférence $\succsim$ vérifie le modèle (2.5), elle est alors transitive et vérifie l'axiome Cl_{m+1}, où m est égal à deux fois le nombre de points de référence par construction. Les hypothèses du théorème 4 étant vérifiées, le théorème s'applique et donc $\succsim$ suit la règle AMPR.

Exemple 21 *Soit* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ *avec* $\mathcal{X}_i = \{1,2,3\}$. *Soit* $p = (2,2)$ *un point de référence et* $\trianglerighteq$ *une relation d'importance sur les partitions de* $\mathcal{X}$ *telle que* $A \trianglerighteq B \iff |A| \geq |B|$. *On distingue alors 3 classes d'équivalences dans l'ensemble des alternatives :* Γ_1, *pour celles qui sont préférées à* p, Γ_2 *pour celles qui sont indifférentes à* p, *et* Γ_3 *pour celles à qui* p *est préféré. La relation de préférence basée sur l'utilisation de* p *suivant la règle 2.5 est alors la suivante :*

$$(3,3) \sim (3,2) \sim (2,3) \succ (3,1) \sim (2,2) \sim (1,3) \succ (2,1) \sim (1,2) \sim (1,1)$$

Il est possible de retrouver cette même relation de préférence à partir d'une règle de type AMPR, comme celle ci-dessous : soit $p^1 = (3,3)$ *et* $p^2 = (2,2)$. *On pose*

$$x \succsim y \iff \phi_1(X^1) + \phi_2(X^2) \geq \phi_1(Y^1) + \phi_2(Y^2)$$

avec $\phi_1(X) = 0$ *si* $X = \emptyset$, *et* $\phi_1(X) = 1$ *sinon, et* $\phi_2(X) = 1$ *si* $X = \{1,2\}$, *et* $\phi_2(X) = 0$ *sinon. On a alors :* $x \in \Gamma_1 \iff \phi_1(X^1) + \phi_2(X^2) = 2$; $x \in \Gamma_2 \iff \phi_1(X^1) + \phi_2(X^2) = 1$; $x \in \Gamma_3 \iff \phi_1(X^1) + \phi_2(X^2) = 0$.

Récemment, Bouyssou et Marchant (2007a) et Bouyssou et Marchant (2007b) ont proposé une caractérisation axiomatique des méthodes de tri non compensatoire, et en particulier d'ELECTRE TRI, dans le cadre de la décision multicritère. Cette caractérisation permet de mettre en évidence que la règle AMPR n'est pas contenue dans les modèles de tri non compensatoires. Le résultat de caractérisation axiomatique proposé par Bouyssou et Marchant (2007b) spécifie qu'une partition $(C_k)_{k\in R}$ ordonnée (où C^1 est la moins bonne catégorie) de l'ensemble des alternatives possède une représentation dans le modèle de tri non compensatoire si et seulement si la partition vérifie des propriétés de linéarité et de bi-catégorie. C'est en particulier l'axiome de bi-catégorie, appelé "R-2 gradedness" dans Bouyssou et Marchant (2007b) qui n'est pas vérifié, comme indiqué ci dessous.

Axiome de bi-catégorie (Bouyssou et Marchant (2007b)) :
On dit que la partition $(C_k)_{k \in R}$ vérifie l'axiome de bi-catégorie sur le critère i si et seulement si, pour tout $l \leq k \in R$, $x_i, y_i, z_i \in X_i$ et $a_{-i}, b_{-i} \in X_{-i}$:

$$\left.\begin{array}{c} (x_i, a_{-i}) \in C^{\geq k} \\ \text{et} \\ (y_i, a_{-i}) \in C^{\geq k} \\ \text{et} \\ (y_i, b_{-i}) \in C^{\geq l} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (x_i, b_{-i}) \in C^{\geq l} \\ \text{ou} \\ (z_i, a_{-i}) \in C^{\geq k} \end{array}\right.$$

En effet, dès qu'il y a plus d'un point de référence, il n'y a plus deux catégories, mais un nombre supérieur ; il est donc logique qu'une règle de type AMPR à 2 points de référence ou plus ne vérifie par l'axiome de bi-catégorie, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 22 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$ et $\mathcal{X}_j = \{0, \ldots, 10\}$. Soit $\mathcal{P} = \{p^1, p^2, p^3\}$ avec $p^1 = (8,8,8)$, $p^2 = (5,5,5)$ et $p^3 = (2,2,2)$. Soient les valeurs de $\mathcal{X}_1$ suivantes : $x_1 = 7$, $y_1 = 9$ et $z_1 = 3$. Soient les valeurs de $\mathcal{X}_{-1}$ suivantes : $a_{-1} = (7,7)$ et $b_{-1} = (4,4)$. On suppose que la relation de préférence sur $\mathcal{X}$ suit la règle suivante, cas particulier de la règle AMPR :*

$$x \succsim y \iff |\{p \text{ tel que } x \succsim^p y\}| \quad \geq \quad |\{p \text{ tel que } y \succsim^p x\}|$$

$$\text{avec } x \succsim^p y \iff |X^p| \quad \geq \quad |Y^p|$$

On a ici :

	X^1	$\lvert X^1 \rvert$	X^2	$\lvert X^2 \rvert$	X^3	$\lvert X^3 \rvert$
(x_1, a_{-1})	$\emptyset$	0	$\{1,2,3\}$	3	$\{1,2,3\}$	3
(y_1, a_{-1})	$\{1\}$	1	$\{1,2,3\}$	3	$\{1,2,3\}$	3
(z_1, a_{-1})	$\emptyset$	0	$\{2,3\}$	2	$\{1,2,3\}$	3
(x_1, b_{-1})	$\emptyset$	0	$\{1\}$	1	$\{1,2,3\}$	3
(y_1, b_{-1})	$\{1\}$	1	$\{1\}$	1	$\{1,2,3\}$	3

On a alors $(y_1, a_{-1}) \succ (x_1, a_{-1}) \succ (y_1, b_{-1})$, et donc, en posant $(x_1, a_{-1}) \in C^k$, on a bien $(x_1, a_{-1}) \in C^{\geq k}$, $(y_1, a_{-1}) \in C^{\geq k}$ et $(y_1, b_{-1}) \in C^{\geq l}$, $l < k$. Comme $(y_1, b_{-1}) \succ (x_1, b_{-1})$, on a bien $(x_1, b_{-1}) \notin C^{\geq l}$ et comme $(x_1, a_{-1}) \succ (z_1, a_{-1})$ on a bien $(z_1, a_{-1}) \notin C^{\geq k}$, ce qui montre que l'axiome de bi-catégorie n'est pas vérifié.

2.2 Points de référence : les différentes approches

Nous avons vu au chapitre 1.2.1, à la suite de Perny (2000) et Grabisch et Perny (2003), qu'il existe deux approches fondamentales différentes pour comparer deux alternatives décrites par plusieurs critères : l'approche AC (Agréger puis Comparer) et l'approche CA (Comparer puis Agréger). L'introduction de plusieurs points de référence pour comparer les alternatives multicritères entre elles nécessite de nouveaux niveaux d'agrégation et de comparaison. On peut en particulier distinguer quatre étapes, qui pourront se succéder suivant différents ordres :

- une étape d'agrégation vis-à-vis des critères : a.
- une étape d'agrégation vis-à-vis des points de référence : A.
- une étape de comparaison des alternatives aux points de référence : c.
- une étape de comparaison des alternatives entre elles : C.

Les agencements possibles de ces quatre étapes sont présentés dans le schéma ci-dessous :

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c} x_1,\dots,x_n \\ y_1,\dots,y_n \\ p_1^1,\dots,p_n^1 \\ p_1^m,\dots,p_n^m \end{array} & \xrightarrow{\quad a \quad} & a(x),a(y),a(p^1),\dots,a(p^m) & \xrightarrow{\quad A \quad} & A(x),A(y),A(p) \\
\downarrow c & & \downarrow c & & \downarrow c \\
\begin{array}{c} c(x_1,p_1^1),\dots,c(x_n,p_n^1) \\ c(x_1,p_1^m),\dots,c(x_n,p_n^m) \\ c(y_1,p_1^1),\dots,c(y_n,p_n^1) \\ c(y_1,p_1^m),\dots,c(y_n,p_n^m) \end{array} & \xrightarrow{\quad a \quad} & \begin{array}{c} f(x,p^1),\dots,f(x,p^m) \\ f(y,p^1),\dots,f(y,p^m) \end{array} & \xrightarrow{\quad A \quad} & g(x),g(y) \\
\downarrow C & & \downarrow C & & \downarrow C \\
\begin{array}{c} C^1(x_1,y_1),\dots,C^1(x_n,y_n) \\ C^m(x_1,y_1),\dots,C^m(x_n,y_n) \end{array} & \xrightarrow{\quad a \quad} & h^1(x,y),\dots,h^m(x,y) & \xrightarrow{\quad A \quad} & P(x,y)
\end{array}
$$

Nous pouvons alors distinguer six approches possibles pour comparer deux alternatives avec l'aide de plusieurs points de référence : aA/cC, ac/AC, ac/CA, cC/aA, ca/CA, ca/AC. Nous présentons ci dessous les modèles généraux des différentes approches, en les accompagnant d'un exemple illustratif pour chacun d'entre eux. Pour les exemples des approches aA/cC, ac/AC, ac/CA, nous supposerons que $X = \mathbb{R}^n$. On note $\overline{x}$ la moyenne des valeurs prises par x sur chacun des critères, et $\overline{\overline{p}}$ la moyenne des $\overline{p}$, $p \in \mathcal{P}$. On note également f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que :

- $f(a,b) = -1$ si $a < b$
- $f(a,b) = 0$ si $a = b$
- $f(a,b) = 1$ si $a > b$

1. **Modèle aA/cC :** le modèle aA/cC consiste à agréger les valeurs prises par chaque alternative et point de référence en un "score" unique, puis d'agréger les "scores" des différents points de référence en un score unique, puis de comparer ce score à celui de chaque alternative, et enfin de comparer le résultat de ces comparaisons

pour les deux alternatives.

$$x \succsim y \iff C[c(A(a(x)), A(a(p^1), \ldots, a(p^m))), c(A(a(y)), A(a(p^1), \ldots, a(p^m)))] \geq 0$$

Exemple 23

$$x \succsim y \iff f(\overline{x}, \overline{\overline{p}}) \geq f(\overline{y}, \overline{\overline{p}})$$

2. **Modèle ac/AC :** le modèle ac/AC consiste à agréger les valeurs prises par chaque alternative en un "score" unique, puis à comparer ces scores avec ceux obtenus par les différents points de référence. Il s'agit ensuite d'agréger le résultat de ces comparaisons en un score général pour chaque alternative, et enfin de comparer les scores obtenus par les deux alternatives.

$$\begin{aligned} x \quad & \succsim y \iff \\ & C[A(c(a(x), a(p^1)), \ldots, c(a(x), a(p^m))), A(c(a(x), a(p^1)), \ldots, c(a(x), a(p^m)))] \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 24

$$x \succsim y \iff |\{p \in \mathcal{P}, \overline{x} \geq \overline{p}\}| \quad \geq \quad |\{p \in \mathcal{P}, \overline{y} \geq \overline{p}\}|$$

3. **Modèle ac/CA :** le modèle ac/CA consiste à agréger les valeurs prises par chaque alternative en un "score" unique, puis à comparer ces scores avec ceux obtenus par les différents points de référence. Il s'agit ensuite de comparer, point de référence par point de référence, les comportements de chaque alternative puis d'agréger les résultats de ces comparaisons pour obtenir une préférence globale.

$$\begin{aligned} & x \succsim y \iff \\ & A[C(c(a(x), a(p^1)), c(a(y), a(p^1))), \ldots, C(c(a(x), a(p^m)), c(a(y), a(p^m)))] \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 25

$$x \succsim y \iff |\{p \in \mathcal{P}, f(\overline{x}, \overline{p}) \geq f(\overline{y}, \overline{p})\}| - |\{p \in \mathcal{P}, f(\overline{y}, \overline{p}) \geq f(\overline{x}, \overline{p})\}| \geq 0$$

4. **Modèle cC/aA :** le modèle cC/aA consiste à comparer critère par critère chaque alternative à chaque point de référence, puis à comparer ces résultats pour les deux alternatives. Il s'agit ensuite d'agréger ces informations pour en tirer des préférences du point de vue de chaque point de référence, puis d'agréger ces préférences en une préférence globale.

$$\begin{aligned} x \succsim y \quad & \iff \\ & A[\quad a(C(c(x_1, p_1^1), c(y_1, p_1^1)), \ldots, C(c(x_n, p_n^1), c(y_n, p_n^1))), \ldots, \\ & \qquad a(C(c(x_1, p_1^m), c(y_1, p_1^m)), \ldots, C(c(x_n, p_n^m), c(y_n, p_n^m)))] \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 26

$$x \succsim y \iff |\{p \in \mathcal{P}, F(x,y,p) \geq F(y,x,p)\}| \quad \geq \quad |\{p \in \mathcal{P}, F(y,x,p) \geq F(x,y,p)\}|$$

$$\textit{avec } F(x,y,p) = |\{i \in N, f(x_i,p_i) \geq f(y_i,p_i)\}|$$

5. **Modèle ca/CA :** le modèle ca/CA consiste à comparer critère par critère chaque alternative à chaque point de référence, puis à agréger ces comparaisons en un score global du point de vue de chaque point de référence. Il s'agit ensuite de comparer ces scores pour les deux alternatives pour en tirer des préférences du point de vue de chaque point de référence, puis d'agréger ces préférences en une préférence globale.

$$\begin{aligned} x \succsim y \iff & \\ & A[\ C(a(c(x_1,p_1^1),\ldots,c(x_n,p_n^1)),a(c(y_1,p_1^1),\ldots,c(y_n,p_n^1))),\ldots, \\ & \quad C(a(c(x_1,p_1^m),\ldots,c(x_n,p_n^m)),a(c(y_1,p_1^m),\ldots,c(y_n,p_n^m)))] \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 27

$$x \succsim y \iff |\{p \in \mathcal{P}, |C(x,p)| \quad \geq \quad |C(y,p)|\}| - |\{p \in \mathcal{P}, |C(y,p)| \quad \geq \quad |C(x,p)|\}| \geq 0$$

6. **Modèle ca/AC :** le modèle ca/AC consiste à comparer critère par critère chaque alternative à chaque point de référence, puis à agréger ces comparaisons en un score global du point de vue de chaque point de référence. Il s'agit ensuite d'agréger ces scores en un score unique pour chaque alternative, puis de comparer ces scores pour en tirer une préférence globale.

$$\begin{aligned} x \succsim y \iff & \\ & C[\ A(a(c(x_1,p_1^1),\ldots,c(x_n,p_n^1)),\ldots,a(c(x_1,p_1^m),\ldots,c(x_n,p_n^m))), \\ & \quad A(a(c(y_1,p_1^1),\ldots,c(y_n,p_n^1)),\ldots,a(c(y_1,p_1^m),\ldots,c(y_n,p_n^m)))] \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 28

$$x \succsim y \iff |C(x,p^1)| + \ldots + |C(x,p^m)| \geq |C(y,p^1)| + \ldots + |C(y,p^m)|$$

Passons en revue ces six modèles pour déterminer lesquels nous étudierons de manière plus approfondie.

1. **Approches commençant par l'agrégation** : les approches aA/cC, ac/AC et ac/CA commencent toutes les trois par agréger les valeurs prises par les alternatives et les points de référence sur les différents critères en un unique critère de synthèse. Même si cette façon de faire permet de comparer les différentes alternatives de manière à obtenir une relation de préférence complète et transitive, ce n'est pas l'option retenue ici, où nous ne souhaitons étudier que les modèles ordinaux

tels que définis par AMPR (et donc commençant par une phase de comparaison ordinale des valeurs prises par les alternatives sur chacun des critères). Par ailleurs, l'intérêt d'introduire des points de référence dans ces approches commençant par une agrégation apparaît comme limité : en effet, l'obtention d'un critère unique de synthèse pour chacune des alternatives permet de comparer directement les alternatives les unes avec les autres, et donc d'obtenir un ordre complet et transitif directement. La présence de points de référence pour comparer des valeurs prises sur un unique critère n'est pas nécessaire. Enfin, d'un point de vue descriptif, il est beaucoup plus riche et intéressant de définir des profils de points de référence agissant comme des limites à ne pas dépasser, ou comme des objectifs à atteindre, plutôt que de se contenter de trouver une valeur globale, "moyenne", gommant les différences pouvant éventuellement exister entre les différents critères. C'est pourquoi nous n'étudierons pas plus avant les approches ac/CA, ac/AC et aA/cC.

2. **Approches commençant par la comparaison** : les approches cC/aA, ca/CA, ca/AC commencent par comparer, critère par critère, les alternatives considérées avec les différents points de référence. La fonction de comparaison peut être simplement ordinale (sur le critère j, l'alternative est-elle préférée ou non au point de préférence ?), ou, dans le cas où l'information disponible le permet, elle peut prendre en compte de manière plus fine les différences entre les valeurs prises par les alternatives et le point de référence. Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes restreints uniquement à l'étude des comparaisons ordinales des alternatives et points de référence.

   Sur les trois approches, deux finissent par l'agrégation, cC/aA et ca/CA, et ne diffèrent que par l'ordre des comparaisons et agrégations médianes. En effet, les deux approches cC/A et cA/C aboutissent à l'obtention de m relations de préférence entre les deux alternatives (une par point de référence) qu'il s'agit d'agréger pour obtenir une unique relation de préférence. La différence entre les deux approches réside donc dans la manière de construire les relations de préférence dépendant des points de référence. L'approche cC/aA consiste à comparer, point de référence après point de référence, les résultats des comparaisons pour les deux alternatives sur chaque critère. On obtient alors $n \times m$ relations de préférence entre les deux alternatives. Il s'agit ensuite d'agréger ces résultats sur les critères pour obtenir m relations de préférence (suivant les points de référence) entre les deux alternatives. Il reste ensuite à agréger ces m relations de préférence en une unique relation. C'est une méthode assez lourde, qui développe toute l'information possible avant de la synthétiser. En particulier, l'obtention des relations de préférence sur chaque critère pour chaque point de référence ne possède pas une interprétation naturelle très aisée. C'est pourquoi nous n'étudierons pas plus avant l'approche cC/aA.

Il reste donc deux approches intéressantes : les approches ca/AC et ca/CA. Elles sont basées toutes les deux sur le même principe de description des alternatives non plus directement sur les critères mais sur les ensembles de critères où l'alternative est meilleure que le point de référence. Ces deux approches feront l'objet chacune successivement de développements dans les sections suivantes.

2.3 Cas particulier : un seul point de référence

Dans le cas où $\mathcal{P}$ est réduit à un singleton $\{p\}$, il n'est évidemment plus nécessaire d'agréger les relations de préférence partielles obtenues à partir de plusieurs points de référence. La règle AMPR, et partant les axiomes caractérisant ce modèle s'en trouvent alors simplifiés. C'est ce modèle simplifié que nous présentons ici. Il mérite en effet un traitement particulier, les chapitres suivants traitant de la problématique de l'agrégation, qui est sans objet dans le cas d'un unique point de référence.

Introduisons tout d'abord la version simplifiée de la règle AMPR :

Définition 9 Modèle à un point de référence *On définit une relation de préférence satisfaisant une règle de concordance à base d'un point de référence par :*

$$x \succsim y \iff \{j \in N, x_j \succsim_j p_j\} \overset{\triangleright}{\sim} \{j \in N, y_j \succsim_j p_j\} \tag{2.6}$$

où $\overset{\triangleright}{\sim}$ *est une relation d'importance sur les parties de* N.

Cette relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ peut par exemple être obtenue par :

$$\forall A, B \subseteq N,\ \ A \overset{\triangleright}{\sim} B \iff \exists x \in \mathcal{X},\ \text{tel que}\ \forall j \in N,\ x_j \prec_j p_j,\ \text{et}\ (p_A, x_{-A}) \succsim (p_B, x_{-B})$$

L'axiome IC$\mathcal{P}$ présenté en section (2.1.1) devient le suivant :
Axiome IC_1

$$\forall x, y, z, w \in \mathcal{X},\quad \left.\begin{array}{rcl} \{j \in N, x_j \succsim_j p_j\} & = & \{j \in N, z_j \succsim_j p_j\} \\ \{j \in N, y_j \succsim_j p_j\} & = & \{j \in N, w_j \succsim_j p_j\} \end{array}\right\} \Rightarrow [(x \succsim y) \iff (z \succsim w)]$$

Le théorème de caractérisation 3 obtenu devient alors :

Théorème 5 $\succsim$ *vérifie* $IC_1 \iff \succsim$ *est représentable par le modèle (2.6).*

Exemple 29 *Soit un ensemble d'étudiants notés sur 3 matières (Math, Physique, Économie) sur une échelle de 0 à 20. On estime qu'un bon étudiant (point de référence) est celui qui est au niveau d'une mention assez bien, soit 12/20 dans toutes les matières. On va donc prendre comme point de référence le point* $p = (12, 12, 12)$. *Soient les étudiants suivants :*

Étudiant	*Math*	*Physique*	*Économie*
A	*18*	*12*	*6*
B	*18*	*6*	*12*
C	*5*	*14*	*8*
D	*5*	*8*	*14*

Alors dire que A est préféré à B signifie que $\{Math, Physique\} \triangleright \{Math, Économie\}$*. Et dire que D est préféré à C signifie que* $\{Économie\} \triangleright \{Physique\}$*. On peut donc trouver une relation* $\overset{\triangleright}{\sim}$ *sur les parties de N impliquant les préférences* $A \succ B$ *et* $D \succ C$*. Il suffit de prendre par exemple le préordre suivant :* $\{Math, Physique, Économie\} \triangleright \{Math, Physique\} \triangleright \{Math, Économie\} \triangleright \{Économie, Physique\} \overset{\triangle}{\sim} \{Math\} \overset{\triangle}{\sim} \{Économie\} \overset{\triangle}{\sim} \{Physique\}$*. Les préférences* $A \succ B$ *et* $D \succ C$ *montrent donc qu'une bonne note en économie est plus important qu'une bonne note en physique si la note en mathématique n'est pas bonne, mais que c'est l'inverse si la note en mathématique est bonne. Il est à noter que ni le critère de la moyenne pondéré, ni la relation de concordance généralisée ne permettent d'obtenir ces mêmes préférences (cf exemple 11). En effet, pour la moyenne pondérée,* $A \succ B$ *implique que le coefficient de la physique devrait être supérieur à celui de l'économie, alors que* $D \succ C$ *implique l'inverse, ce qui est impossible. De même, dans le cadre de la concordance généralisée,* $A \succ B$ *implique que l'ensemble* $\{Maths, Physique\}$ *devrait être plus important que l'ensemble* $\{Maths, Economie\}$ *et* $D \succ C$ *l'inverse.*

2.4 Approches finissant par la comparaison

Nous évoquons dans cette section l'approche ca/AC, qui consiste à comparer deux alternatives x et y de $\mathcal{X}$ en comparant, critère par critère, chacune de ces alternatives à chaque point de référence $p \in \mathcal{P}$, puis à agréger ces comparaisons critère par critère pour obtenir une valeur unique pour chaque alternative comparativement à chaque point de référence. Cette valeur peut par exemple être simplement l'ensemble des critères où l'alternative est meilleure que le point de référence. Vient ensuite l'agrégation de ces différentes valeurs en un score unique de synthèse pour chaque alternative, score qu'il suffit de comparer à ceux des autres alternatives pour obtenir une relation de préférence sur l'espace des alternatives $\mathcal{X}$. Autrement dit, les relations de préférences s'exprimant grâce au modèle ca/AC peuvent être modélisées par l'équation suivante :

$$x \succsim y \iff \psi(C(x,p^1),\ldots,C(x,p^m)) \geq \psi(C(y,p^1),\ldots,C(y,p^m)) \tag{2.7}$$

où ψ est une fonction de $(2^N)^m$ dans $\mathbb{R}$.

Avec les notations vues précédemment, l'équation (2.7) peut aussi s'écrire :

$$x \succsim y \iff \psi(X^1,\ldots,X^m) \geq \psi(Y^1,\ldots,Y^m) \tag{2.8}$$

Nous avons vu précédemment que sans perte de généralité, nous pouvons considérer que les points de référence se dominent les uns les autre, et donc que les ensembles $X^i = C(x, p^i)$ sont inclus les uns dans les autres : $\forall x \in \mathcal{X}$, $X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^m$. La fonction ψ ne sera donc définie formellement que sur un sous-ensemble $(2^N)^m$ contenant les éléments de $(2^N)^m$ correspondant aux alternatives de $\mathcal{X}$. On notera $\mathbb{P}_m(N)$ cet ensemble des m-uplets de parties de N tels que $(A_1, \ldots A_m) \in \mathbb{P}_m(N) \iff \exists x \in \mathcal{X}$ tel que $(X^1, \ldots X^m) = (A_1, \ldots, A_m)$. La relation $\stackrel{\triangleright}{\sim}$ est donc définie sur $\mathbb{P}_m(N)$. Il sera cependant éventuellement possible de prolonger cette relation d'importance sur l'ensemble $(2^N)^m$ en entier.

Si la relation $\succsim$ s'exprime grâce à la règle (2.7), elle possède alors la même structure que la relation d'importance sur les valeurs prises par la fonction ψ. Cette fonction ψ étant à valeur dans $\mathbb{R}$, la relation de préférence $\succsim$ possède alors la même structure que l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, la relation de préférence $\succsim$ suivant la règle (2.7) est un préordre sur $\mathcal{X}$. Il est donc *nécessaire* pour $\succsim$ d'être un préordre pour suivre la règle (2.7). Nous montrons dans le théorème suivant que cette condition est aussi *suffisante*, sous l'hypothèse que l'axiome IC$\mathcal{P}$ soit vérifié.

Théorème 6 *Soient $p^1, \ldots, p^m \in \mathcal{X}$ m points de référence. Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$:*

1. *est un préordre complet sur $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$*
2. *vérifie l'axiome IC$\mathcal{P}$*

alors : il existe une fonction ψ de $\mathbb{P}_m(N)$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$x \succsim y \iff \psi(X^1, \ldots, X^m) \geq \psi(Y^1, \ldots, Y^m)$$

Preuve du théorème 6

L'existence de la relation d'importance a été montrée au théorème 3. Montrons que si $\succsim$ est un préordre, $\stackrel{\triangleright}{\sim}$ l'est aussi :

- **transitivité de** $\triangleright$: soient $A \triangleright B$ et $B \triangleright C$. Alors $\exists x, y, |\ x \succ y$ et $A = (X^1, \ldots, X^m)$ et $B = (Y^1, \ldots, Y^m)$; $\exists z, w, |\ z \succ w$ et $B = (Z^1, \ldots, Z^m)$ et $C = (W^1, \ldots, W^m)$. Comme $\forall i = 1, \ldots, m$, $Y^i = Z^i$, on a $y \sim z$ et donc, puisque $\succsim$ est un préordre, $x \succ y \sim z \succ w$, d'où $x \succ w$, ce qui entraîne $A \triangleright C$.
- **asymétrie de** $\triangleright$: soient $A, B \subseteq \mathbb{P}_m(N)$ tels que $A \triangleright B$. Alors $\exists x, y \in \mathcal{X}, |\ x \succ y$ et $A = (X^1, \ldots, X^m)$ et $B = (Y^1, \ldots, Y^m)$. Si $B \triangleright A$, alors $\exists x', y' \in \mathcal{X}, |\ y' \succ x'$ et $A = (X'^1, \ldots, X'^m)$ et $B = (Y'^1, \ldots, Y'^m)$. Or par IC$\mathcal{P}$, comme $\forall i = 1, \ldots, m$, $X^i = X'^i$ et $Y^i = Y'^i$, on a $x \sim x'$ et $y \sim y'$. Cela amène une contradiction donc on ne peut avoir $A \triangleright B$ et $B \triangleright A$.
- **réflexivité, transitivité et symétrie de** $\stackrel{\triangle}{\sim}$: elles découlent immédiatement de la réflexivité, transitivité et symétrie de $\sim$.

Comme vu ci dessus, par IC$\mathcal{P}$, on peut définir une relation de préférence $\overset{\triangleright}{\sim}$ sur $\mathbb{P}_m(N)$, qui a les mêmes propriétés que la relation $\succsim$. La relation de préférence $\overset{\triangleright}{\sim}$ est alors un préordre complet sur un espace fini : il existe donc une fonction à valeurs réelles ψ telle que $A \overset{\triangleright}{\sim} B \iff \psi(A) \geq \psi(B)$. Comme par définition de $\overset{\triangleright}{\sim}$, $x \succsim y \iff (X^1, \ldots, X^m) \overset{\triangleright}{\sim} (Y^1, \ldots, Y^m)$, il existe alors une fonction ψ telle que $x \succsim y \iff \psi(X^1, \ldots, X^m) \geq \psi(Y^1, \ldots, Y^m)$. □

La règle présentée dans l'équation (2.8) nous montre l'effet de l'ajout de points de référence dans un modèle de relation de préférence basée sur une approche AC. Au lieu de comparer directement deux alternatives en fonctions de leurs valeurs sur les différents critères à l'aide d'une fonction ψ de $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ suivant le modèle $x \succsim y \iff \psi(x_1, \ldots x_n) \geq \psi(y_1, \ldots y_n)$, nous comparons deux alternatives en fonction de leur comportement vis-à-vis des points de référence suivant le modèle $x \succsim y \iff \psi(C(x,p^1), \ldots C(x,p^m)) \geq \psi(C(y,p^1), \ldots C(y,p^m))$. Autrement dit, les alternatives sont décrites dans un nouvel espace à m dimensions $2^N \times \ldots \times 2^N$, et la comparaison s'effectue à partir des valeurs prises par les alternatives dans cet espace. Le déplacement de la problématique de l'espace des critères à l'espace des ensembles de critères ouvre de nouvelles perspectives, en adaptant à ce nouveau cadre les fonctions d'agrégation et de comparaison classiques (voir par exemple Keeney et Raiffa (1976)). En particulier, les fonctions d'agrégation à base de points de référence permettent d'atténuer une des difficultés liées à la mise en pratique de l'approche AC : elle nécessite une quantité d'information considérable, correspondant à la connaissance exhaustive des mécanismes de compensation entre les différentes valeurs de chaque critère. Dans la règle (2.7), cette difficulté ne disparaît pas complètement, mais elle est déplacée. En effet, il n'est nécessaire de connaître que le "poids" relatif de chaque sous-ensemble de critères, ce qui est plus simple et plus intuitif, même si le nombre de sous-ensembles à comparer peut ne pas être négligeable (il est égal au maximum à 2^n, dont certains peuvent être vides).

Certaines règles de préférence obtenues dans le cadre classique du mesurage conjoint peuvent être transposées dans le cadre défini par la règle (2.7). C'est le cas en particulier des modèles où la fonction ψ est décomposable, de manière additive comme indiqué dans l'exemple ci-dessous, ou de manière non additive comme étudié dans la partie 2.4.2.

2.4.1 La fonction ψ est additivement décomposable

Une fonction f d'un espace multicritère $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$ dans $\mathbb{R}$ est dite additivement décomposable si il existe n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$. Dans le cas présent, une fonction ψ de $\mathbb{P}_m(N)$ dans $\mathbb{R}$ est dite additivement décomposable s'il existe m fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_m$ de 2^N dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\psi(X^1, \ldots, X^m) = \psi_1(X^1) + \ldots + \psi_m(X^m) \tag{2.9}$$

Toutes les fonctions d'utilité ne sont pas additivement décomposables. Voyons ci-dessous un exemple, tiré de Fishburn (1976b), où la préférence ne peut être représentée par une utilité additive.

Exemple 30 *Soient les préférences suivantes à propos des menus des dîners de ce soir et de demain soir : (poulet ce soir, poulet demain) $\prec$ (steak ce soir, steak demain) $\prec$ (poulet ce soir, steak demain) $\prec$ (steak ce soir, poulet demain). La préférence pour le dîner de ce soir dépend clairement de ce qui est prévu pour demain soir.*

Dans le cadre des relations de préférence avec points de référence, le fait que la fonction ψ soit additivement décomposable suppose en particulier que la valeur attachée à un ensemble $C(x, p^i)$, $p^i \in \mathcal{P}$ est indépendante des valeurs attachées aux autres ensembles $C(x, p)$, $p \neq p^i$. Il n'y a pas d'effet de synergie (positive ou négative) entre les points de référence. Regardons maintenant sur un exemple comment fonctionne un modèle de préférence avec points de référence additivement décomposable.

Exemple 31 *Reprenons ici le cadre de l'exemple 9. Soient les alternatives x_1 ,x_2, x_3, x_4, x_5, $x_6 \in \mathcal{X}$ et les points de référence p_1, p_2 décrits par le tableau suivant :*

	1	2	3	4
x_1	60	$***$	C	$+$
x_2	60	$**$	B	$+$
x_3	80	$****$	B	$=$
x_4	80	$***$	A	$=$
x_5	70	$****$	C	$=$
x_6	70	$**$	A	$=$
p_1	60	$****$	A	$+$
p_2	70	$***$	B	$=$

Supposons que les préférences du décideur sont telles que $x_1 \succ x_2$ et $x_3 \succ x_4$. Si $\succsim$ suit une règle de type (2.9), que peut-on alors dire des préférences entre x_5 et x_6 ?

Regardons le comportement des alternatives du point de vue des points de référence :

	p_1	p_2
x_1	$X_1^1 = \{1,4\}$	$X_1^2 = \{1,2,4\}$
x_2	$X_2^1 = \{1,4\}$	$X_2^2 = \{1,3,4\}$
x_3	$X_3^1 = \{2\}$	$X_3^2 = \{2,3,4\}$
x_4	$X_4^1 = \{3\}$	$X_4^2 = \{2,3,4\}$
x_5	$X_5^1 = \{2\}$	$X_5^2 = \{1,2,4\}$
x_6	$X_6^1 = \{3\}$	$X_6^2 = \{1,3,4\}$

La préférence $x_1 \succ x_2$ *nous indique que* $\psi_1(\{1,4\}) + \psi_2(\{1,2,4\}) > \psi_1(\{1,4\}) + \psi_2(\{1,3,4\})$ *et donc que* $\psi_2(\{1,2,4\}) > \psi_2(\{1,3,4\})$*. La préférence* $x_3 \succ x_4$ *nous indique que* $\psi_1(\{2\})+\psi_2(\{2,3,4\}) > \psi_1(\{3\})+\psi_2(\{2,3,4\})$ *et donc que* $\psi_1(\{2\}) > \psi_1(\{3\})$*. Nous pouvons donc en déduire que* $\psi_1(\{2\}) + \psi_2(\{1,2,4\}) > \psi_1(\{3\}) + \psi_2(\{1,3,4\})$ *et donc que* $x_5 \succ x_6$*.*

Remarque Si les différentes fonctions ψ_i sont elles-même additivement décomposables, la fonction $\psi(X^1,\ldots,X^m)$ revient à une fonction d'utilité $u(x)$ sur les valeurs $x_1,\ldots,x_n$ de la forme $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n)$, où les fonctions u_i de $\mathcal{X}_i$ dans $\mathbb{R}$ prennent autant de valeurs qu'il y a de points de référence (plus une). Détaillons pourquoi ci-dessous : si les fonctions ψ_i sont décomposables, alors il existe des valeurs ω_j^i, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,N$ telles que $\psi_i(X^i) = \sum_{j\in X^i} \omega_j^i$. Pour tout $i = 1,\ldots,m$ et tout $j = 1,\ldots,N$, définissons les fonctions u^i sur $\mathcal{X}_j$ en posant $u^i(x_j) = 1$ si $j \in X^i$ (c'est à dire si $x_j \succsim_j p_j^i$) et $u^i(x_j) = 0$ sinon. Cela entraîne que

$$
\begin{aligned}
\psi(X^1,\ldots,X^m) &= \textstyle\sum_{p^i} \psi_i(X^i)\\
&= \textstyle\sum_{p^i} \sum_{j\in X^i} \omega_j^i\\
&= \textstyle\sum_{p^i} \sum_{j\in N} \omega_j^i u^i(x_j)\\
&= \textstyle\sum_{j\in N} \sum_{p^i} \omega_j^i u^i(x_j)
\end{aligned}
$$

En posant $u_j(x_j) = \sum_{p^i} \omega_j^i u^i(x_j)$, nous obtenons que $\psi(X^1,\ldots,X^m) = \sum_{j\in N} u_j(x_j)$. On peut alors poser $u(x) = \sum_{j\in N} u_j(x_j)$. Notons que comme les points de référence p^i sont ordonnés, si $x_j \succsim_j p_j^i$, alors $x_j \succsim_j p_j^k$ pour $k \geq i$. Il n'y a donc que $m+1$ valeurs possibles pour $u_j(x_j) = \sum_{p^i} \omega_j^i u^i(x_j)$ suivant la valeur de x_j.

2.4.2 La fonction ψ n'est pas additivement décomposable

Une représentation additive d'une fonction d'utilité suppose que la relation de préférence possède une propriété d'indépendance entre les différents critères, propriété qui n'est pas toujours vérifiée (voir l'exemple 30). En effet, nous pouvons imaginer que deux critères pris séparément ne soient pas très pertinents, mais qu'un score élevé dans les deux critères simultanément corresponde à une alternative particulièrement intéressante : il y a alors une synergie positive entre les deux critères qui sont complémentaires. De même, si deux critères sont d'une signification relativement proche l'un de l'autre, une bonne valeur sur chacun des critères ne sera pas beaucoup plus appréciée qu'une bonne valeur sur un seul critère. Il y a alors une synergie négative due à la redondance des critères. Prenons par exemple la situation suivante :

Exemple 32 *Un étudiant veut aller au cinéma et souhaite choisir un film en fonction de trois critères : l'intérêt du sujet (critère a), la qualité de jeu des acteurs (critère b), et la proximité de la salle de cinéma (critère c). Il note les différentes possibilités à l'aide* *de trois valeurs dans l'ordre croissant des préférences : 0,1,2 avec* $0 \prec 1 \prec 2$. *Il obtient le tableau des alternatives suivant :*

	a	*b*	*c*
film 1	*2*	*0*	*0*
film 2	*0*	*2*	*0*
film 3	*0*	*0*	*2*
film 4	*2*	*2*	*0*
film 5	*2*	*0*	*2*

Supposons que cet étudiant préfère le film 1 au film 2, et le film 2 au film 3 (et le film 1 au film 3 également) : il ne souhaite pas voir un film inintéressant et mal joué. Cela indique, dans le cadre d'une utilité additivement décomposable, que les coefficients attachés aux critères sont $\omega_a > \omega_b > \omega_c$. *Mais supposons que cet étudiant préfère aussi le film 5 au film 4 : si le sujet est intéressant, il opte pour le film le plus proche, même s'il est moins bien joué. Dans le cadre d'une utilité additivement décomposable, les coefficients attachés aux critères sont alors tels que* $\omega_a + \omega_c > \omega_a + \omega_b$, *ce qui entraîne* $\omega_c > \omega_b$. *Il en résulte une contradiction : on voit alors que la fonction de préférence de l'étudiant n'est pas additivement décomposable.*

Dans le cadre des relations de préférence avec points de référence, nous comparons les alternatives x et $y \in \mathcal{X}$ à travers les ensembles $X^1, \dots X^m$ et $Y^1, \dots Y^m$. Nous cherchons donc à modéliser les interactions possibles entre les différents ensembles X^i, pour pouvoir obtenir un score pour x qui ne soit pas seulement obtenu par décomposition additive des scores du point de vue de chaque point de référence, mais qui prenne en compte les synergies possibles entre les différents comportements de x du point de vue de chaque point de référence.

Il existe plusieurs outils formels permettant d'obtenir des utilités non-additivement décomposables. Nous nous intéresserons dans la suite de cette partie à une généralisation des fonctions d'utilité à des cas non-additifs nommée intégrale de Choquet, ou capacité. Les propriétés des capacités ont été étudiées en particulier par Schmeidler (1986), Sugeno et Murofushi (1987), Denneberg (1994), Grabisch (1996), Grabisch et Roubens (2000), Marichal (2000) ou Grabisch et Labreuche (2002a). Nous renvoyons le lecteur vers ces références pour plus de détails. De manière formelle, une capacité est définie comme suit :

Définition 10 *Une capacité* $v : 2^N \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction d'ensembles telle que* $v(\emptyset) = 0$, *et* $A \subseteq B \subseteq N$ *implique que* $v(A) \leq v(B)$. *On dit que la capacité est normalisée si de plus* $v(N) = 1$.

Par leur nature non-additive, les capacités sont à même de pouvoir décrire des relations de préférence qu'il n'était pas possible de décrire à l'aide d'une fonction d'utilité additivement décomposable, comme l'indique l'exemple suivant :

Exemple 32 (suite) *La fonction de préférence de l'exemple 32 peut tout à fait s'expliquer grâce à une capacité sur les ensembles de critères. Les préférences entre les films 1, 2 et 3 impliquent que $v(\{a\}) > v(\{b\}) > v(\{c\})$, et la préférence entre les films 4 et 5 implique que $v(\{a, c\}) > v(\{a, b\})$.*

Une capacité est une fonction prenant comme argument un ensemble. Si cet ensemble est l'ensemble des critères où une alternative x est considérée comme meilleure qu'un point de référence p, on obtient une instance de la fonction ψ présentée au théorème 6 dans le cas particulier à un point de référence :

$$x \succsim y \iff v(C(x, p)) \geq v(C(y, p)) \tag{2.10}$$

Cependant, le fait que les capacités ne prennent comme argument qu'un seul ensemble ne permet pas de prendre en compte plusieurs points de référence. Or récemment Grabisch et Labreuche (2002a) et Grabisch et Labreuche (2003) ont proposé une généralisation des capacités à travers les bi-capacités et les k-capacités. Les k-capacités apparaissent alors comme un cadre naturel pour pouvoir décrire des relations de préférences avec k points de référence, en tenant compte des critères où l'alternative est préférée à chaque point de référence. Dans le cadre des bi-capacités, leur utilisation avec des échelles bipolaires a été proposée indépendamment par Grabisch et Labreuche (2002b) et Greco et al. (2002). Nous proposons ici une généralisation aux k-capacités, utilisant des échelles divisées en $k+1$ intervalles et faisant appel à k points de référence. Afin de comprendre comment fonctionnent les k-capacités avec points de référence, nous allons prendre un exemple avec deux points de référence. Rappelons tout d'abord la définition des bi-capacités. On note $\mathcal{Q}(N) = \{(A, B) \in 2^N \times 2^N \mid A \cap B = \emptyset\}$.

Définition 11 *une fonction $\nu : \mathcal{Q}(N) \to \mathbb{R}$ est une bi-capacité si elle satisfait :*

1. $\nu(\emptyset, \emptyset) = 0$
2. $A \subseteq B$ *implique* $\nu(A, .) \leq \nu(B, .)$ *et* $\nu(., A) \geq \nu(., B)$

De plus, ν est normalisée si $\nu(N, \emptyset) = 1 = -\nu(\emptyset, N)$.

La fonction $\nu(A, B)$ s'interprète comme une fonction d'agrégation en une unique valeur de l'ensemble des critères considérés comme "bons" (l'ensemble A) et de l'ensemble des critères considérés comme "mauvais" (l'ensemble B).

Exemple 33 *Soit $\mathcal{X}$ l'espace des alternatives, N l'ensemble des critères et p^1, p^2 deux points de référence tels que $\forall j \in N, p^1_j \succ_j p^2_j$. Soit ν une bi-capacité sur les sous-ensembles disjoints de N. Le premier argument est l'ensemble des "bons" critères pour l'alternative considérée : c'est donc $C(x, p^1)$, l'ensemble des critères où x est préféré au meilleur point de référence. Le deuxième argument est l'ensemble des "mauvais" critères pour l'alternative considérée : c'est donc $\overline{C(x, p^2)} = \{j | p^2_j \succ_j x_j\}$, l'ensemble des critères où* *le plus mauvais point de référence est préféré à l'alternative. On peut alors poser* $x \succsim y \iff \nu(X^1, \overline{X^2}) \geq \nu(Y^1, \overline{Y^2})$*. Une telle relation est cohérente avec le comportement des bi-capacités :*

- *disjonction : on a de toute évidence* $X^1 \cap \overline{X^2} = \emptyset$ *par construction de* p^1 *et* p^2
- *monotonie : supposons que l'on améliore sur un ou plusieurs critères l'alternative* x *: soit* $z \in \mathcal{X}$ *tel que* $\forall j \in N$, $z_j \succsim_j x_j$*. On a alors* $X^1 \subseteq Z^1$, $\overline{Z^2} \subseteq \overline{X^2}$ *et donc* $\nu(X^1, \overline{X^2}) \leq \nu(Z^1, \overline{Z^2})$*, ce qui entraîne* $x \precsim z$ *ce qui est cohérent avec la monotonie vis-à-vis des critères.*

Généralisons maintenant aux k-capacités, dont nous rappelons la définition ci-dessous : Notons $\mathcal{Q}_k(N) = \{(A_1, \ldots, A_k) \in 2^N \times \ldots \times 2^N$ tel que $\forall i, j = 1, \ldots, k,\ A_i \cap A_j = \emptyset\}$.

Définition 12 *Une fonction* $\nu : \mathcal{Q}_k(N) \to \mathbb{R}$ *est une* k*-capacité si elle satisfait :*

1. $\nu(\emptyset, \ldots, \emptyset) = 0$
2. $\exists l \in \{1, \ldots, k-1\}$ *tel que* $\forall i \leq l$, $\forall j > l$, $A_i \subseteq C_i$ *et* $B_j \supseteq D_j$ *implique* $\nu(., A_i, ., B_j, .) \leq \nu(., C_i, ., D_j, .)$

Les k-capacités permettent alors de décrire les relations de préférences avec points de référence suivant la règle (2.8). Une adaptation du cadre de travail est cependant nécessaire pour pouvoir décrire les relations de préférence à l'aide des k-capacités. En effet, les k-capacités sont des fonctions sur des sous-ensembles disjoints, alors que les ensembles X^k manipulés jusqu'alors sont liés par des relations d'inclusion, comme indiqué en section 2.1.3.

Soit $\mathcal{P} = \{p^1, \ldots, p^m\}$ l'ensemble des points de référence considérés. Nous savons que $\forall k = 1, \ldots, m-1$, $\forall j \in N$, $p_j^k \succsim p_j^{k+1}$, et donc, $\forall k = 1, \ldots, m-1$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $X^k \subseteq X^{k+1}$: chaque ensemble X^j des critères où x est préféré au point de référence p^j est évidemment inclus dans l'ensemble X^k des critères où x est préféré au point de référence p^k si $p^j \succ p^k$. Avec les k-capacités, nous allons nous intéresser non pas directement aux ensembles X^k, mais simplement aux éléments de X^k qui n'étaient pas déjà présents dans les ensembles X^j, $j < k$. Autrement dit, nous posons $X_k^* = X^k - X^{k-1}$ pour $k = 2, \ldots, m$. X_k^* apparaît donc comme étant l'ensemble des critères pour lesquels x est préféré au point de référence p^k mais pas au point de référence p^{k-1}. Nous posons aussi $X_1^* = X^1$. Notons que le passage des éléments $(X^1, \ldots, X^m)$ aux éléments $(X_1^*, \ldots X_m^*)$ n'amène aucune perte d'information :

$$(X_1^*, \ldots X_m^*) = (Y_1^*, \ldots Y_m^*) \Rightarrow (X^1, \ldots, X^m) = (Y^1, \ldots, Y^m)$$

En effet, comme $X_1^* = X^1$, on a bien $X_1^* = Y_1^* \Rightarrow X^1 = Y^1$. De même, $X^2 = X^1 \cup X_2^*$, $Y^2 = Y^1 \cup Y_2^*$, ce qui amène $X^2 = Y^2$. Par récurrence immédiate, on a bien $(X^1, \ldots, X^m) = (Y^1, \ldots, Y^m)$ si $(X_1^*, \ldots X_m^*) = (Y_1^*, \ldots Y_m^*)$.

Par ailleurs, les k-capacités possédant des propriétés de monotonie, il est évident que la relation de préférence $\succsim$ doit elle aussi posséder de telles propriétés. Nous reviendrons plus amplement sur les notions de monotonie dans la partie suivante. Cependant, nous définissons dès maintenant formellement un axiome d'unanimité de la façon suivante :

Axiome UNA : Unanimité On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte l'unanimité (UNA) si $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$[\forall i \in N,\ x_i \succsim_i y_i] \Rightarrow x \succsim y$$

La puissance des k-capacités s'exprime alors dans le fait remarquable que tout préordre complet vérifiant IC$\mathcal{P}$ peut s'exprimer à l'aide des k-capacités, sous réserve que l'axiome naturel d'unanimité soit vérifié comme l'indique le théorème suivant :

Théorème 7 *Soient $p^1, \ldots, p^m \in \mathcal{P}$ m points de référence. Si la relation de préférence $\succsim$*

1. *est un préordre complet sur $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$*
2. *vérifie l'axiome IC$\mathcal{P}$*
3. *vérifie l'axiome UNA*

alors il existe une m-capacité ν telle que

$$x \succsim y \iff \nu(X_1^*, \ldots, X_{m-1}^*, \overline{X^m}) \geq \nu(Y_1^*, \ldots, Y_{m-1}^*, \overline{Y^m})$$

Avant de démontrer ce théorème, montrons sur un exemple comment cette k-capacité se manifeste concrètement.

Exemple 34 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$. Soient $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_4 = [0; 20]$. Considérons les trois points de référence suivants : $p^1 = (15, 15, 15, 15)$, $p^2 = (10, 10, 10, 10)$ et $p^3 = (5, 5, 5, 5)$. Considérons les sept alternatives suivantes :*

	1	*2*	*3*	*4*
x^1	*16*	*12*	*8*	*3*
x^2	*16*	*12*	*8*	*8*
x^3	*16*	*12*	*11*	*3*
x^4	*16*	*3*	*8*	*12*
x^5	*16*	*3*	*12*	*8*
x^6	*11*	*3*	*8*	*12*
x^7	*11*	*3*	*12*	*8*

Les différents ensembles X^i à considérer sont les suivants :

	X^1	X^2	X^3	$\nu(.,.,.)$
x^1	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\nu(\{1\},\{2\},\{4\})$
x^2	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\nu(\{1\},\{2\},\emptyset)$
x^3	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\nu(\{1\},\{2,3\},\{4\})$
x^4	$\{1\}$	$\{1,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\nu(\{1\},\{4\},\{2\})$
x^5	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{1,3,4\}$	$\nu(\{1\},\{3\},\{2\})$
x^6	$\emptyset$	$\{1,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\nu(\emptyset,\{1,4\},\{2\})$
x^7	$\emptyset$	$\{1,3\}$	$\{1,3,4\}$	$\nu(\emptyset,\{1,3\},\{2\})$

Supposons que le décideur possède les préférences suivantes : $x^2 \succ x^1$(par unanimité) ; $x^3 \succ x^1$(par unanimité également) ; $x^4 \succ x^5$ et $x^7 \succ x^6$. Les préférences du décideur entraînent les inégalités suivantes :

- *la préférence $x^2 \succ x^1$ entraîne $\nu(\{1\},\{2\},\emptyset) > \nu(\{1\},\{2\},\{4\})$, ce qui est conforme à la monotonie dans la définition des k-capacité.*
- *la préférence $x^3 \succ x^1$ entraîne $\nu(\{1\},\{2,3\},\{4\}) > \nu(\{1\},\{2\},\{4\})$, ce qui est conforme à la monotonie dans la définition des k-capacité.*
- *la préférence $x^4 \succ x^5$ entraîne $\nu(\{1\},\{4\},\{2\}) > \nu(\{1\},\{3\},\{2\})$ et la préférence $x^7 \succ x^6$ entraîne $\nu(\emptyset,\nu(\emptyset,\{1,3\},\{2\}) > \{1,4\},\{2\})$. Il n'y a là aucune contradiction.*

Nous voyons qu'il peut donc exister une 3-capacité respectant les quatre inégalités. Cela est impossible si l'on essaie de représenter ces préférences à l'aide d'une fonction ψ additivement décomposable telle que $\psi(X^1,\ldots,X^m) = \psi_1(X^1)+\psi_2(X^2)+\psi_3(X^3)$. En effet, nous devrions alors respecter les inégalité suivantes :

- *la préférence $x^2 \succ x^1$ entraîne $\psi_1(\{1\})+\psi_2(\{1,2\})+\psi_3(\{1,2,3,4\}) > \psi_1(\{1\})+\psi_2(\{1,2\})+\psi_3(\{1,2,3\})$, et donc $\psi_3(\{1,2,3,4\}) > \psi_3(\{1,2,3\})$, ce qui ne pose pas de problème particulier.*
- *la préférence $x^3 \succ x^1$ entraîne $\psi_1(\{1\})+\psi_2(\{1,2,3\})+\psi_3(\{1,2,3\}) > \psi_1(\{1\})+\psi_2(\{1,2\})+\psi_3(\{1,2,3\})$, et donc $\psi_2(\{1,2,3\}) > \psi_2(\{1,2\})$, ce qui ne pose pas de problème particulier.*
- *la préférence $x^4 \succ x^5$ entraîne $\psi_1(\{1\})+\psi_2(\{1,4\})+\psi_3(\{1,3,4\}) > \psi_1(\{1\})+\psi_2(\{1,3\})+\psi_3(\{1,3,4\})$, et donc $\psi_2(\{1,4\}) > \psi_2(\{1,3\})$ (i). La préférence $x^7 \succ x^6$ entraîne $\psi_1(\{\emptyset\})+\psi_2(\{1,4\})+\psi_3(\{1,3,4\}) < \psi_1(\{\emptyset\})+\psi_2(\{1,3\})+\psi_3(\{1,3,4\})$, et donc $\psi_2(\{1,4\}) < \psi_2(\{1,3\})$ (ii). Il y a donc une contradiction entre (i) et (ii) qui rend impossible la représentation de la relation de préférence par une utilité additivement décomposable.*

Preuve du théorème 7. Définissons une relation $\trianglerighteq$ sur $\mathcal{Q}_m \times \mathcal{Q}_m$ par $(A_1,\ldots,A_m) \trianglerighteq (B_1,\ldots,B_m) \iff \exists x,y \in X, \begin{cases} \forall i \in 1,\ldots,m-1 \quad A_i = X_i^* \text{ et } A_m = \overline{X_m^*} \\ \forall i \in 1,\ldots,m-1 \quad B_i = Y_i^* \text{ et } B_m = \overline{Y_m^*} \end{cases}$ et $x \succsim y$.

Nous allons montrer que cette relation est un préordre complet sur $\mathcal{Q}$.

Montrons tout d'abord que la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ définie ci-dessus existe. La relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ ne doit pas dépendre des éléments x et y choisis pour sa construction. Pour cela, il faut vérifier que si deux couples de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, (x,y) et (z,w), existent tels que

$$\begin{cases} \forall i \in 1,\ldots,m-1 & A_i = X_i^* = Z_i^* \text{ et } A_m = \overline{X_m^*} = \overline{Z_m^*} \\ \forall i \in 1,\ldots,m-1 & B_i = Y_i^* = W_i^* \text{ et } B_m = \overline{Y_m^*} = \overline{W_m^*} \end{cases}$$

alors $x \succsim y \iff z \succsim w$. On constate que par construction, $[\forall p^i \in \mathcal{P}, X_i^* = Z_i^*]$ implique que $[\forall p^i \in \mathcal{P}, X^i = Z^i]$. De même, $[\forall p^i \in \mathcal{P}, Y_i^* = W_i^*]$ implique que $[\forall p^i \in \mathcal{P}, Y^i = W^i]$. L'axiome IC$\mathcal{P}$ implique alors que $x \succsim y \iff z \succsim w$, ce qui montre que la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ ne dépend pas des éléments choisis pour sa construction.

Montrons maintenant que $\overset{\triangleright}{\sim}$ est un préordre sur $\mathcal{Q}_m$, en vérifiant la transitivité de $\overset{\triangleright}{\sim}$.

transitivité de $\overset{\triangleright}{\sim}$: si $(A_1,\ldots,A_m) \triangleright (B_1,\ldots,B_m)$ et $(B_1,\ldots,B_m) \triangleright (C_1,\ldots,C_m)$, alors il existe $x, y, y', z \in X$ tels que

$$\begin{cases} \forall i \in 1,\ldots,m-1 & A_i = X_i^* \text{ et } A_m = \overline{X_m^*} \\ \forall i \in 1,\ldots,m-1 & B_i = Y_i^* = Y_i'^* \text{ et } B_m = \overline{Y_m^*} = \overline{Y_m'^*} \\ \forall i \in 1,\ldots,m-1 & C_i = Z_i^* \text{ et } C_m = \overline{Z_m^*} \end{cases}$$

et $x \succsim y$ et $y' \succsim z$. Par IC$\mathcal{P}$, nous avons $y \sim y'$, et par transitivité de $\succsim$, nous avons $x \succsim z$, ce qui montre la transitivité de $\overset{\triangleright}{\sim}$.

Montrons maintenant la complétude de $\overset{\triangleright}{\sim}$ sur $\mathcal{Q}_m$. Comme par hypothèse nous avons $\forall i \in N$, deux éléments x_i, y_i tels que $x_i \succsim_i p_i \succ_i y_i$, nous pouvons construire pour tout $(A_1,\ldots,A_m) \in \mathcal{Q}_m$ un élément $z \in \mathcal{X}$ tel que $\forall i \neq m$, $Z_i^* = A_i$ et $\overline{Z_m^*} = A_m$.

Il suffit de prendre $\begin{cases} z_j = p_j^i \text{ si } j \in A_i, i \neq m \\ z_j = b_j \text{ si } i \in A_m \\ z_j = p_j^m \text{ sinon} \end{cases}$, avec $\forall j \in N\ p_j^m \succ_j b_j$. La complétude de $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ donne alors la complétude de $\overset{\triangleright}{\sim}$ sur $\mathcal{Q}_m$.

Comme $\overset{\triangleright}{\sim}$ est un préordre complet et $\mathcal{Q}_m$ est fini, il existe une fonction $\nu : \mathcal{Q}_m \to \mathbb{R}$ telle que $(A_1,\ldots,A_m) \overset{\triangleright}{\sim} (B_1,\ldots,B_m) \iff \nu(A_1^*,\ldots,\overline{A_m^*}) \geq \nu(B_1^*,\ldots,\overline{B_m^*})$. Montrons alors que cette fonction ν est une m-capacité avec $l = k-1$ dans la définition 12 des k-capacités.

Supposons que $A \subseteq C$ et $B \supseteq D$. Nous allons comparer $\nu(A_1,.,A_{i-1},A,A_{i+1},.,B)$ et $\nu(A_1,.,A_{i-1},C,A_{i+1},.,D)$ où $(A_1,.,A_{i-1},A,A_{i+1},.,B)$ et $(A_1,.,A_{i-1},C,A_{i+1},.,D)$ sont deux partitions de N. Soit $x \in \mathcal{X}$ tel que $(X_1^*,\ldots,\overline{X_m^*}) = (A_1,.,A_{i-1},A,A_{i+1},.,B)$. Soit $y \in \mathcal{X}$ tel que $(Y_1^*,\ldots,\overline{Y_m^*}) = (A_1,.,A_{i-1},C,A_{i+1},.,D)$. Nous avons $X_i^* = A \subseteq C = Y_i^*$ et $\overline{X_m^*} = B \supseteq D = \overline{Y_m^*}$. Cela montre que $\forall i = 1,\ldots,m$, $X^i \subseteq Y^i$. Prenons $y' \in \mathcal{X}$ tel que $y'_j = \max_{\succsim_j}(x_j, y_j)$. Par construction, $x_j \precsim_j y'_j$ et $\forall i = 1,\ldots,m, Y_i'^* = Y_i^*$. L'axiome d'unanimité implique alors que $y \succsim x$, ce qui montre que $\nu(A_1,.,A_{i-1},A,A_{i+1},.,B) \leq \nu(A_1,.,A_{i-1},C,A_{i+1},.,D)$ Nous avons montré que $A \subseteq C$ et $B \supseteq D$ implique $\nu(.,A,.,B) \leq \nu(.,C,.,D)$. Nous pouvons ensuite poser $\nu\{\emptyset,\ldots,\emptyset\} = 0$ pour avoir une m-capacité. $\square$

2.5 Approches finissant par l'agrégation

Nous évoquons dans cette partie l'approche ca/CA. Elle consiste dans un premier temps à comparer chacune des deux alternatives x et y de $\mathcal{X}$ critère par critère à chaque point de référence $p \in \mathcal{P}$, puis à agréger ces comparaisons critère par critère pour obtenir un "score" pour chaque alternative comparativement à chaque point de référence. Autrement dit, dans cette première phase, les alternatives sont décrites non plus directement par leurs valeurs sur les critères mais par les ensembles X^i et Y^i des critères sur lesquels l'alternative est meilleure que le point de référence. Vient ensuite la comparaison de ces ensembles entre les deux alternatives, ce qui donne p relations de préférence (une par point de référence), puis l'agrégation de ces différentes comparaisons partielles en une comparaison unique pour obtenir une relation de préférence sur l'espace des alternatives $\mathcal{X}$. Autrement dit, les relations de préférences s'exprimant grâce au modèle ca/CA peuvent être modélisées par l'équation suivante :

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid C(x,p) \overset{\triangleright}{\succsim}_p C(y,p)\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid C(y,p) \overset{\triangleright}{\succsim}_p C(x,p)\} \tag{2.11}$$

où les $\overset{\triangleright}{\succsim}_p$, $p \in \mathcal{P}$, sont des relations d'importance sur les sous-ensembles de N et $\succsim_{\mathcal{P}}$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$.

Avec les notations vues précédemment, l'équation (2.11) peut aussi s'écrire :

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid X^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p Y^p\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid Y^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p X^p\} \tag{2.12}$$

2.5.1 Les points de référence induisent des relations de préférence

Les relations de préférence sur $\mathcal{X}$ suivant la règle (2.11) peuvent être caractérisées par des propriétés spécifiques que nous étudions dans cette partie.

En premier lieu, la règle (2.11) suppose qu'il existe m relations de préférence basées sur la comparaison des ensembles de critères où l'alternative considérée est meilleure que le point de référence. Cela signifie d'abord que la relation de préférence $\succsim$ entre deux alternatives $x, y \in \mathcal{X}$ ne dépend que des ensembles $X^p = C(x,p)$, $p \in \mathcal{P}$ et $Y^p = C(y,p)$, $p \in \mathcal{P}$. Cela signifie aussi qu'il existe une propriété d'indépendance impliquant que pour un point de référence spécifique $p \in \mathcal{P}$, la relation de préférence $\succsim^p$ entre deux alternatives x et y ne dépend que des ensembles respectifs $X^p = C(x,p)$ et $Y^p = C(y,p)$.

Définissons m relations de préférence $\overset{\triangleright}{\succsim}_p$, $p \in \mathcal{P}$, sur les sous-ensembles de N par

$$A \overset{\triangleright}{\succsim}_p B \iff \exists x, y \in \mathcal{X} \text{ tels que } x \succsim y \text{ et } \begin{cases} X^p = A \\ Y^p = B \\ \forall p' \in \mathcal{P}, p' \neq p,\ X^{p'} = Y^{p'} \end{cases} \tag{2.13}$$

Les relations $\stackrel{\triangleright}{\sim}_p$, $p \in \mathcal{P}$ peuvent être vues comme m projections de la relations $\succsim$ sur l'espace des sous-ensembles de N. Ces relations sont cohérentes s'il n'existe pas de couples (x, y) et (z, w) de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ induisant des contradictions dans les relations définies en (2.13), i.e. des couples tels que :

$$x \succsim y \text{ et } w \succ z \text{ avec } \begin{cases} X^p = Z^p = A \\ Y^p = W^p = B \\ \forall p' \in \mathcal{P}, p' \neq p, \ X^{p'} = Y^{p'} \\ \forall p' \in \mathcal{P}, p' \neq p, \ Z^{p'} = W^{p'} \end{cases}$$

Cette condition est résumée par l'axiome suivant :

Axiome SEP : Séparabilité vis-à-vis des points de référence

$\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}$,

$$\left[\begin{array}{lll} \forall p' \neq p, & X^p = Z^p & \text{et} \quad X^{p'} = Y^{p'} \\ \forall p' \neq p, & Y^p = W^p & \text{et} \quad Z^{p'} = W^{p'} \end{array} \right] \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

L'axiome SEP est suffisant pour obtenir m relations de préférence cohérentes $\stackrel{\triangleright}{\sim}_p$ sur les sous-ensembles de N, et par là même m relations de préférence $\succsim^p$ sur X définies par

$$x \succsim^p y \iff X^p \stackrel{\triangleright}{\sim}_p Y^p$$

On peut remarquer que l'axiome IC$\mathcal{P}$ introduit en section 2.1.1, n'implique pas l'axiome SEP, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 35 *Supposons que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_4$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trois valeurs de $\mathcal{X}_j$ telles que $\forall j \in N$, $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3$. Soit $x, y, z, w \in \mathcal{X}$, p^1, p^2 deux points de référence tels que :*

	1	2	3	4
p^1	α_1	α_1	α_1	α_1
p^2	α_2	α_2	α_2	α_2
x	α_1	α_2	α_2	α_3
y	α_1	α_2	α_3	α_2
z	α_2	α_1	α_2	α_3
w	α_2	α_1	α_3	α_2

Nous avons $X^1 = Y^1$, $Z^1 = W^1$, $X^2 = Z^2$, $Y^2 = W^2$. Si $x \succ y$ et $w \succ z$, ce qui est compatible avec l'axiome IC$\mathcal{P}$ que l'on supposera satisfait ici, alors l'axiome SEP n'est pas satisfait.

2.5.2 Agrégation des relations de préférence partielles

L'axiome SEP implique que les relations de préférence $\succsim^p$ dérivées de la relation de préférence $\succsim$ comme indiqué dans l'équation (2.13) sont bien définies. Mais rien ne garantit en retour que la relation de préférence $\succsim$ puisse être obtenue par une méthode spécifique d'agrégation des relations de préférence $\succsim^p$, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 36 *Supposons que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre valeurs de $\mathcal{X}_j$ telles que $\forall j \in N$, $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3 \succ_j \alpha_4$. Soient $x, y, z, w \in \mathcal{X}$, p^1, p^2, p^3 trois points de référence tels que :*

	1	2	3
p^1	α_1	α_1	α_1
p^2	α_2	α_2	α_2
p^3	α_3	α_3	α_3
x	α_1	α_2	α_4
y	α_2	α_2	α_3
z	α_1	α_4	α_4
w	α_2	α_3	α_3

Supposons que, grâce aux autres alternatives, nous sachions que pour chaque point de référence p, $A \overset{\triangleright}{\sim}_p B \iff |A| \geq |B|$. Cela signifie par exemple, si $a = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_1)$ et $b = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$, que $a \succ^{p^1} b$ car $C(a, p^1) = \{1, 3\}$, $C(b, p^1) = \{2\}$ et $|\{1, 3\}| > |\{2\}|$. Nous avons alors :

$$\begin{array}{cc} x \succ^{p^1} y & z \succ^{p^1} w \\ x \sim^{p^2} y & z \sim^{p^2} w \\ x \prec^{p^3} y & z \prec^{p^3} w \end{array}$$

Si $x \succ y$ et $w \succ z$, ce qui est possible tout en respectant SEP, alors il est difficile d'expliquer la relation de préférence $\succsim$ par la seule donnée des relations $\succsim^p$, $p \in \mathcal{P}$. En effet, bien que pour tout $p \in \mathcal{P}$, $x \succsim^p y \iff z \succsim^p w$, x et y se comparent au final différemment de z et w.

L'axiome d'indépendance conditionnelle présenté ci-dessous est donc nécessaire pour préciser que la relation de préférence $\succsim$ est obtenue par agrégation des relations de préférence $\succsim^p$.

Axiome ICRI : Indépendance conditionnellement aux relations induites
Soit $\succsim$ une relation de préférence satisfaisant l'axiome SEP et $\{\succsim^p, p \in \mathcal{P}\}$ les relations de préférence dérivées de $\succsim$ comme décrit en (2.13). Les relations de préférence $\succsim$ et $\succsim^{p^i}$ satisfont l'axiome ICRI si et seulement si $\forall x, y, x', y' \in \mathcal{X}$:

$$\left[\forall p \in \mathcal{P}, \begin{array}{c} x \succsim^p y \iff z \succsim^p w \\ y \succsim^p x \iff w \succsim^p z \end{array}\right] \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

Nous pouvons maintenant établir le théorème caractérisant les relations de préférence suivant la règle (2.11) :

Théorème 8 *Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$*

1. *satisfait l'axiome SEP*
2. *satisfait l'axiome ICRI*

alors il existe une relation d'importance $\succsim_{\mathcal{P}}$ sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ telle que

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid X^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p Y^p\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid Y^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p X^p\}$$

Preuve du théorème 8
Soit une relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$. L'axiome SEP permet de définir des relations d'importance $\overset{\triangleright}{\succsim}_p$ sur les sous-ensembles de critères. On définit une relation $\succsim_{\mathcal{P}}$ sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ de la manière suivante. Soit Q et Q' deux sous-ensembles de $\mathcal{P}$. On dit que $Q \succsim_{\mathcal{P}} Q'$ si et seulement si $\exists x, y \in \mathcal{X}$ tels que $x \succsim y$ et $\begin{cases} \{p \in \mathcal{P} \mid X^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p Y^p\} = Q \\ \{p \in \mathcal{P} \mid Y^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p X^p\} = Q' \end{cases}$.

Supposons qu'il existe deux couples de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ (x, y) et (z, w) tels que

$$\begin{cases} Q = \{p \in \mathcal{P} \mid X^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p Y^p\} = \{p \in \mathcal{P} \mid Z^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p W^p\} \\ Q' = \{p \in \mathcal{P} \mid Y^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p X^p\} = \{p \in \mathcal{P} \mid W^p \overset{\triangleright}{\succsim}_p Z^p\} \end{cases}$$

Grâce à l'axiome ICRI, nous avons $x \succsim y \iff z \succsim w$, ce qui montre que la relation $\succsim_{\mathcal{P}}$ est définie sans incohérence ni ambiguïté. □

2.5.3 Monotonie

Les relations de préférence étudiées jusqu'à maintenant ne possèdent pas de propriétés particulières. En particulier, la réponse de la relation de préférence $\succsim$ à une amélioration de la valeur d'un critère pour une alternative n'est pas spécifiée. Or il est naturellement souhaitable de considérer que l'amélioration d'une alternative sur un critère ne puisse pas dégrader la position de celle-ci vis-à-vis des autres alternatives. En d'autres termes, il est souhaitable que la relation de préférence $\succsim$ satisfasse des propriétés de monotonie. Les relations de préférence suivant la règle (2.11) mettent en jeu deux agrégations successives, sur les critères puis sur les points de référence. On peut donc distinguer plusieurs notions de monotonie, sur les critères et sur les points de référence, toutes basées sur le même principe : une amélioration locale d'une alternative ne peut conduire qu'à une amélioration globale de cette alternative.

Définition 13 Monotonies
On dit que la relation de préférence $\succsim$, satisfaisant les axiomes SEP et ICRI est :

– *monotone (MON) si $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$, $\forall j \in N$,*

$$[z_j \succsim_j x_j \text{ et } x \succsim y] \Rightarrow (z_j, x_{-j}) \succsim y \tag{2.14}$$

– *strictement monotone (SMON) si $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$,*

$$[z_j \succ_j x_j \text{ et } x \succsim y] \Rightarrow (z_j, x_{-j}) \succ y]$$

Remarque : on peut également définir des propriétés de monotonie de la façon suivante :
On dit que la relation de préférence $\succsim$, satisfaisant les axiomes SEP et ICRI est :

– monotone (MON2) si $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$, $\forall j \in N$,

$$[y_j \succsim_j z_j \text{ et } x \succsim y] \Rightarrow x \succsim (z_j, y_{-j}) \tag{2.15}$$

– strictement monotone (SMON2) si $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$,

$$[y_j \succ_j z_j \text{ et } x \succsim y] \Rightarrow x \succ (z_j, y_{-j})]$$

Les deux définitions (2.14) de MON et (2.15) de MON2 ne sont pas équivalentes. La propriété équivalente à MON est la propriété MON3 déinie par : $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$, $\forall j \in N$,

$$[y_j \succsim_j z_j \text{ et } x \succ y] \Rightarrow x \succ (z_j, y_{-j}) \tag{2.16}$$

En effet, supposons que la relation $\succsim$ vérifie MON tel que défini en (2.14). Soient $x, y, z \in \mathcal{X}$ tels que pour un $j \in N$, $[y_j \succsim_j z_j$ et $x \succ y]$ et $(z_j, y_{-j}) \succsim x$. D'après la définition (2.14), le fait que $y_j \succsim_j z_j$ et $(z_j, y_{-j}) \succsim x$ entraîne que $y \succsim x$, ce qui est contradictoire avec le fait que $x \succ y$. Donc MON $\Rightarrow$ MON3. De même, supposons que la relation $\succsim$ vérifie MON3 tel que défini en (2.16). Soient $x, y, z \in \mathcal{X}$ tels que pour un $j \in N$, $[z_j \succsim_j x_j$ et $x \succsim y]$ et $y \succ (z_j, x_{-j})$. D'après la définition (2.16), le fait que $z_j \succsim_j x_j$ et $y \succ (z_j, x_{-j})$ entraîne que $y \succ x$, ce qui est contradictoire avec le fait que $x \succsim y$. Donc MON3 $\Rightarrow$ MON, ce qui prouve leur équivalence. Par contre, une relation vérifiant MON2 mais pas MON3 (si par exemple il existe trois éléments $a, b, c \in \mathcal{X}$ et $j \in N$ tels que $c_j \succsim_j a_j$, $a \succ b$ et $(c_j, a_{-j}) \sim b$) ne vérifie pas MON.

Les relations de préférences ordinales avec points de référence ne respectent généralement pas la monotonie stricte. En effet, l'axiome IC$\mathcal{P}$ montre que les différentes valeurs possibles prises par les alternatives sur chaque critère se condensent en un petit nombre d'entre elles, celles prises par les points de référence. Une petite amélioration (ou détérioration) de la valeur d'un critère pour une alternative, ne changeant pas les ensembles $C(x, p)$, n'aura pas d'incidence sur le classement final de l'alternative. On peut donc avoir

$z_j \succ_j x_j$, $x \sim y$ et $(z_j, x_{-j}) \sim y$. Cependant, la monotonie large est une propriété qu'il semble relativement naturelle de vouloir satisfaire.

La notion de monotonie n'est pas très éloignée de la notion de dominance, appelée aussi unanimité ou principe strict de Pareto. Cette notion spécifie que si une alternative est au moins aussi bonne qu'une autre sur tous les critères, et strictement meilleure sur au moins l'un des critères, elle doit lui être préférée au final. Là encore, il est évident que la propriété d'unanimité stricte ne pourra être vérifiée par les relations de préférence suivant la règle (2.11), pour les mêmes raisons que précédemment. On définit formellement les notions d'unanimité de la manière suivante.

Définition 14 Unanimités

On dit que la relation de préférence $\succsim$, satisfaisant les axiomes SEP et ICRI respecte :

- *l'unanimité (UNA) si* $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$[\forall i \in N,\ x_i \succsim_i y_i] \Rightarrow x \succsim y$$

- *l'unanimité stricte (SUNA) si* $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$\begin{bmatrix} \forall i \in N,\ x_i \succsim_i y_i \\ \exists j \in N,\ x_j \succ_j y_j \end{bmatrix} \Rightarrow x \succ y$$

Dans le cas général, la monotonie implique l'unanimité, mais il existe des relations de préférence, non transitives, vérifiant l'unanimité sans la monotonie.

Exemple 37 *Supposons que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ et $\mathcal{P} = \{p^1, p^2\}$ avec $p^1 = (3,3)$ et $p^2 = (2,2)$. La relation de préférence $\succsim$ résumée dans le tableau suivant (avec la convention qu'un $\succ$ signifie "l'alternative située en en-tête de ligne est préférée à l'alternative située en en-tête de colonne") vérifie UNA sans vérifier MON. Posons $x = (1,3)$, $y = (3,2)$ et $z = (2,3)$. Nous avons $(1,3) \sim (3,2)$, et donc $x \sim y$. Nous avons aussi $z_1 \succ_1 x_1$ car $z_1 = 2$ et $x_1 = 1$. Or nous n'avons pas $z \succsim y$, puisque $(3,2) \succ (2,3)$ et donc $y \succ z$.*

	$(3,3)$	$(3,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{3})$	$(3,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{3})$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(1,1)$
$(3,3)$	$\sim$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
$(\mathbf{3},\mathbf{2})$	$\prec$	$\sim$	$\succ$	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
$(\mathbf{2},\mathbf{3})$	$\prec$	$\prec$	$\sim$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
$(3,1)$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$	$\sim$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
$(1,3)$	$\prec$	$\sim$	$\prec$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\succ$	$\succ$
$(2,2)$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$	$\sim$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
$(2,1)$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$	$\prec$	$\sim$	$\sim$	$\succ$
$(1,2)$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$	$\sim$	$\succ$
$(1,1)$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\sim$

Cependant, dans le cas où la relation $\succsim$ est transitive, l'unanimité implique la monotonie.

Proposition 3 (Monotonie et unanimité) *Si la relation de préférence $\succsim$ est transitive, alors UNA $\iff$ MON*

Preuve de la proposition 3

($\Leftarrow$) Soient $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $\forall i \in N$, $x_i \succsim_i y_i$. On a naturellement $(y_1, \ldots, y_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$. Par monotonie sur le premier critère, $(x_1, y_2, \ldots, y_n) \succsim (y_1, \ldots, y_n)$. Par monotonie sur le deuxième critère, on obtient $(x_1, x_2, y_3, \ldots, x_n) \succsim (y_1, \ldots, y_n)$. En continuant critère par critère, on obtient $x \succsim y$

($\Rightarrow$) si $z_j \succsim_j x_j$, alors $\forall i \in N$, $(z_j, x_{-j})_i \succsim_i x_i$, et donc $(z_j, x_{-j}) \succsim x$. Par transitivité, si $x \succsim y$, $(z_j, x_{-j}) \succsim y$.

□

Il est possible, à partir des propriétés de monotonie et d'unanimité sur les critères, de déduire des propriétés de monotonie ou d'unanimité sur les ensembles de critères ou les ensembles de points de référence, comme l'indiquent les définitions ci-dessous.

Définition 15 Monotonies et Unanimité
On dit que la relation de préférence $\succsim$, satisfaisant les axiomes SEP et ICRI :

- *est monotone par inclusion sur les ensembles de critères (MIC) si* $\forall A, B, C, D \subseteq N$, $\forall p \in \mathcal{P}$,
$$[A \subseteq B \text{ et } C \subseteq D] \Rightarrow [A \overset{\triangleright}{\succsim}_p D \Rightarrow B \overset{\triangleright}{\succsim}_p C]$$
- *est monotone par inclusion sur les ensembles de points de référence (MIPR) si* $\forall Q$, R, S, $T \subseteq \mathcal{P}$,
$$[Q \subseteq R \text{ et } T \subseteq S,\ Q \cup S = R \cup T = \mathcal{P}] \Rightarrow [Q \succsim_{\mathcal{P}} S \Rightarrow R \succsim_{\mathcal{P}} T]$$
- *vérifie l'unanimité sur les ensembles de critères (UC) si* $\forall A, B \subseteq N$, $\forall p \in \mathcal{P}$,
$$A \subseteq B \Rightarrow B \overset{\triangleright}{\succsim}_p A$$
- *vérifie l'unanimité sur les points de référence (UPR) si* $\forall x, y \in \mathcal{X}$,
$$[\forall p \in \mathcal{P},\ x \succsim^p y] \Rightarrow x \succsim y$$
- *vérifie l'unanimité stricte sur les points de référence (SUPR) si* $\forall x, y \in \mathcal{X}$,
$$\begin{bmatrix} \forall p \in \mathcal{P},\ x \succsim^p y \\ \exists p \in \mathcal{P},\ x \succ^p y \end{bmatrix} \Rightarrow x \succ y$$

Les différentes propriétés de monotonie et d'unanimité sont alors obtenues par les implications suivantes :

Proposition 4 (Monotonies)

1. *MON* $\Rightarrow$ *MIC*
2. *MON* $\Rightarrow$ *MIPR*
3. *UNA* $\Rightarrow$ *UC*
4. *UNA* $\Rightarrow$ *UPR*

Preuve de la proposition 4
On supposera dans toute la preuve que les points de référence $p \in \mathcal{P}$ sont tels que $\forall i \in N$, $p_j^{k-1} \succ_j p_j^k \succ_j p_j^{k+1}$, ce qui ne réduit pas la généralité comme vu au paragraphe 2.1.3.

1. Soient $A, B, C, D \subseteq N$ tels que $A \subseteq B$ et $C \subseteq D$. Soit $p^k \in \mathcal{P}$ un point de référence. Soient quatre alternatives $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ telles que :
   – $\forall j \in A$, $x_j = p_j^k$, $\forall j \notin A$, $x_j = p_j^{k+1}$
   – $\forall j \in B$, $y_j = p_j^k$, $\forall j \notin B$, $y_j = p_j^{k+1}$
   – $\forall j \in C$, $z_j = p_j^k$, $\forall j \notin C$, $z_j = p_j^{k+1}$
   – $\forall j \in D$, $w_j = p_j^k$, $\forall j \notin D$, $w_j = p_j^{k+1}$
   Comme $A \subseteq B$, nous avons $\forall j \in N$, $y_j \succsim_j x_j$. Supposons que $x \succsim w$. Cela signifie que $A \stackrel{\triangleright}{\sim}_{p^k} D$ par définition de $\stackrel{\triangleright}{\sim}_{p^k}$. Par MON, nous avons alors $B \stackrel{\triangleright}{\sim}_p D$. Et par contraposée de MON, nous avons $B \stackrel{\triangleright}{\sim}_p C$. Donc $A \stackrel{\triangleright}{\sim}_p D \Rightarrow B \stackrel{\triangleright}{\sim}_p C$, ce qui prouve MIC.
2. Soient $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $Q = \{p \in \mathcal{P}, x \succsim^p y\}$, $S = \{p \in \mathcal{P}, y \succsim^p x\}$ et $x \succsim y$. Soit $p^k \notin Q$. Prenons $z \in \mathcal{X}$ tel que $\begin{cases} z_j = x_j \text{ si } x_j \succsim_j p_j^k \\ z_j = x_j \text{ si } x_j \prec_j p_j^k \text{ et } y_j \prec_j p_j^k \\ z_j = p_j^k \text{ si } x_j \prec_j p_j^k \text{ et } y_j \succsim_j p_j^k \end{cases}$. Nous pouvons alors constater que :
   – $\forall j \in N$, $z_j \succsim_j x_j$ et donc par MON, $z \succsim x$ et $\forall p \in \mathcal{P}$, $z \succsim^p x$.
   – $\forall j \in N$, $y_j \succsim_j p_j^k \Rightarrow z_j \succsim_j p_j^k$, et donc $Y^k \subseteq Z^k$, ce qui par MIC montre que $z \succsim^{p^k} y$.
   Comme $\forall j \in N$, $z_j \succsim_j x_j$, nous avons $\forall p^k \in \mathcal{P}$, $X^k \subseteq Z^k$. Comme $x \succsim^p y$ pour tout $p \in \mathcal{Q}$ (ce qui signifie que $X^p \stackrel{\triangleright}{\sim}_p Y^p$ pour tout $p \in \mathcal{Q}$), MIC nous dit alors que $z \succsim^p y$ pour tout $p \in \mathcal{Q}$. Nous avons donc $z \succsim^p y$ pour tout $p \in \mathcal{Q} \cup \{p^k\}$. Par ailleurs, $z \succsim y$ par MON. Nous avons donc montré que si $Q \succsim_{\mathcal{P}} S$, $Q \cup \{p^k\} \succsim_{\mathcal{P}} S$. De proche en proche, cela implique que $Q \succsim_{\mathcal{P}} S \Rightarrow [(Q \subseteq R) \Rightarrow R \succsim_{\mathcal{P}} S$. En procédant de même, nous pouvons montrer que $Q \succsim_{\mathcal{P}} S \Rightarrow [(T \subseteq S) \Rightarrow Q \succsim_{\mathcal{P}} T$, ce qui montre MIPR
3. Soient A, B deux sous-ensembles de N tels que $A \subseteq B$, et $p^k \in \mathcal{P}$. Soient deux alternatives $x, y \in \mathcal{X}$ telles que :
   – $\forall j \in A$, $x_j = y_j = p_j^k$
   – $\forall j \in B \setminus A$, $x_j = p_j^{k+1}$ et $y_j = p_j^k$

– $\forall j \in N \setminus B$, $x_j = y_j = p_j^{k+1}$

Nous avons $\forall i \neq k$, $X^k = A$, $Y^k = B$, $X^i = Y^i$ et $\forall j = 1, \dots, N$, $y_j \succsim_j x_j$. Par UNA, $y \succsim x$, et par définition de $\overset{\triangleright}{\sim}_{p^k}$, $B \overset{\triangleright}{\sim}_{p^k} A$, ce qui prouve UC.

4. Supposons UNA vérifié. Prenons deux éléments x et$y \in \mathcal{X}$ tels que

$$\forall j \in N,\ \forall p \in \mathcal{P} \begin{cases} x_j \succsim_j p_j \\ p_j \succ_j y_j \end{cases}$$

On a alors $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $X^i = N$ et $Y^i = \emptyset$, et donc $Y^i \subseteq X^i$. UNA étant vérifié, UC aussi et on a donc $\forall p \in \mathcal{P}$, $X^i \overset{\triangleright}{\sim}_p Y^i$. Par définition de $\succsim^p$, cela implique que $\forall p \in \mathcal{P}$, $x \succsim^p y$. Or par UNA, nous savons que comme $\forall j \in N$, $x_j \succsim_j y_j$, nous avons $x \succsim y$. Cela montre que $\forall p \in \mathcal{P}$, $x \succsim^p y$ implique $x \succsim y$, ce qui prouve UPR.

□

2.5.4 Transitivité et dictature

Dans cette partie, nous proposons une caractérisation des relations de préférence transitives satisfaisant les axiomes SEP et ICRI. Supposons que la relation de préférence $\succsim$ satisfasse SEP et l'axiome ICRI. Nous avons montré que la relation de préférence globale $\succsim$ entre deux alternatives x et $y \in \mathcal{X}$ dépend seulement de l'agrégation des préférences partielles $\succsim^p$, $p \in \mathcal{P}$. Les différents points de référence peuvent dans ce cas être considérés comme autant de "votants" différents, et le problème étudié est alors clairement identifiable à un problème d'agrégation des $\succsim^p$, $p \in \mathcal{P}$ comme en théorie du choix social. Cependant, l'espace de travail n'est pas tout à fait le même : autant les votants ne sont en aucune manière contraints dans leurs préférence en théorie du choix social, autant ici la structure des points de référence fait que les ensembles X^i ne sont pas tous indépendants. En effet, si un critère $j \in N$ appartient à l'ensemble $X^i = C(x, p^i)$, il appartiendra aussi aux ensembles X^k, $k > i$, car si $x_j \succsim_j p_j^i$, alors par transitivité, $x_j \succsim_j p_j^k$ avec $k > i$. Considérant deux alternatives particulières, il n'est donc pas forcément possible d'obtenir pour cette paire des préférences différentes suivant les points de référence. L'axiome d'universalité n'est pas vérifié ici, dans le sens où toute préférence n'est pas forcément admissible du point de vue des points de référence : si une alternative x domine une alternative y, elle lui sera préférée du point de vue de chaque point de référence (i.e. $\forall p \in \mathcal{P}$, $x \succsim^p y$). Malgré tout, la structure de l'espace $\mathcal{X}$ est suffisamment riche pour permettre d'obtenir certaines propriétés découlant de l'axiome d'universalité dans le cadre de la théorie du choix social.

Supposons que la relation de préférence $\succsim$ vérifie l'unanimité et la transitivité. Comme nous l'avons rappelé au paragraphe 1.4.1, il a été montré par Arrow (1951) que dans cette situation, la seule procédure d'agrégation des préférences partielles qui conduise systématiquement à une relation de préférence globale transitive est celle correspondant à la dictature d'un élément. Cela signifie qu'ici, pour tout ensemble de points de référence $\mathcal{P}$ donné, la seule procédure d'agrégation qui conduise systématiquement à une relation de préférence globale transitive, quelles que soient les alternatives considérées, est celle de la dictature d'un point de référence $p \in \mathcal{P}$, c'est à dire : $\exists p \in \mathcal{P}$ tel que $\forall x, y \in \mathcal{X},\ \ x \succ^p y \Rightarrow x \succ y$.

Nous proposons donc une version du théorème d'Arrow s'appliquant aux relations de préférence ordinales avec points de référence :

Théorème 9 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de points de référence possédant au moins trois éléments. Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$*

1. *satisfait les axiomes SEP et ICRI*
2. *est un pré-ordre complet satisfaisant l'axiome d'unanimité*

alors il existe un point de référence $p \in \mathcal{P}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\ \ x \succ^p y \Rightarrow x \succ y$$

Notons que dans le cadre de ce théorème, l'unanimité stricte sur les relations $\succsim^p$ est vérifiée comme l'indique le lemme 1.

Lemme 1 *$\forall p \in \mathcal{P}$, $x \succ^p y$ alors $x \succ y$*

Preuve du lemme 1
Notons que si UNA est vérifié, alors MIC aussi car la relation $\succsim$ est un préordre. Prenons deux éléments a et $b \in \mathcal{X}$ tels que

$$\forall j \in N,\ \forall p \in \mathcal{P} \begin{cases} a_j \succsim_j p_j \\ p_j \succ_j b_j \end{cases}$$

On a alors $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $A^i = N$ et $B^i = \emptyset$, et par MIC, $A^i \overset{\triangleright}{\sim}_{p^i} B^i$. Montrons que l'on peut supposer que $\forall p \in \mathcal{P}$, $N \triangleright_p \emptyset$. Comme $\forall i = 1, \ldots, n$, $\emptyset \subseteq A^i \subseteq N$, nous avons par MIC, $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $N \overset{\triangleright}{\sim}_{p^i} A^i \overset{\triangleright}{\sim}_{p^i} \emptyset$. Si $N \overset{\triangle}{\sim}_{p^i} \emptyset$ alors par transitivité, $N \overset{\triangle}{\sim}_{p^i} A^i \overset{\triangle}{\sim}_{p^i} \emptyset$, et donc $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}^i \overset{\triangle}{\sim}_{p^i} \mathcal{Y}^i$. Cela entraîne alors que $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \sim^{p^i} y$, ce qui montre que le point de référence p^i n'a aucune influence dans la relation $\succsim$. Nous pouvons alors l'ignorer, et nous supposerons donc à l'avenir que $\forall p \in \mathcal{P}$, $N \triangleright_p \emptyset$. Reprenons les alternatives a et b. Comme $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $A^i = N$ et $B^i = \emptyset$, et $\forall p \in \mathcal{P}$, $N \triangleright_p \emptyset$, cela signifie que $\forall p \in \mathcal{P}$, $a \succ^p b$. Supposons que $a \sim b$. Comme $\{p \in \mathcal{P} \mid a \succ^p b\} = \mathcal{P}$, cela signifie par MIPR que $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \sim y$, ce qui n'a pas de sens. Donc nous avons montré qu'il existe $a, b \in \mathcal{X}$ tels que $\forall p \in \mathcal{P}$, $a \succ^p b$ et $a \succ b$. Par ICRI, cela montre que $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $[\forall p \in \mathcal{P}, x \succ^p y]$ $\Rightarrow x \succ y$.

$\square$

Détaillons maintenant la preuve du théorème 9. La présentation de cette preuve emprunte beaucoup à celle de Fishburn (1975) dans le cadre multicritère sans points de référence. Un concept clé pour la démonstration de ce théorème est celui d'ensemble décisif. On définit un ensemble décisif de la façon suivante :

Définition 16 *Un sous-ensemble $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ est dit décisif pour un couple $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ si $\{p \in \mathcal{P} \mid x \succ^p y\} = \mathcal{Q}$, $\{p \in \mathcal{P} \mid y \succ^p x\} = \mathcal{P} - \mathcal{Q}$ et $x \succ y$. Par l'axiome ICRI, si $\mathcal{Q}$ est décisif pour un couple (x, y), il est décisif pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{X}^2$. On dit alors que $\mathcal{Q}$ est totalement décisif.*

Preuve du théorème 9
Comme le précise le lemme 1, l'unanimité implique que si $\forall p \in \mathcal{P}, x \succ^p y$, alors $x \succ y$, ce qui signifie que $\mathcal{P}$ est décisif. Soit K un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-ensemble de $\mathcal{P}$ décisif.

Supposons que K possède plus d'un élément. Soient $x, y, z \in \mathcal{X}$, et $p^i \in K$ tels que

$$\begin{array}{ll} & x \succ^{p^i} y \succ^{p^i} z \\ \forall k \in K - \{i\} & y \succ^{p^k} z \succ^{p^k} x \\ \forall j \notin K & z \succ^{p^j} x \succ^{p^j} y \end{array}$$

Une telle situation est tout à fait possible, comme le montre l'exemple 38 ci-dessous pour un ensemble $\mathcal{P}$ particulier. Alors $y \succ z$ puisque K est décisif et que $\forall p \in K$, $y \succ^p z$. Supposons que $z \succsim x$ alors $y \succ x$ par transitivité, mais cela viole le fait que K soit le plus petit ensemble décisif, car pour $p^i \in K$, $x \succ^{p^i} y$. Donc cela montre que $x \succ z$. Mais ceci aussi impliquerait que $K - \{i\}$ est décisif, ce qui contredit le fait que K soit un plus petit ensemble décisif. Donc K plus petit ensemble décisif ne peut contenir qu'un élément, que nous notons p^α.

Nous avons montré que le plus petit ensemble décisif contient un seul élément, p^α. Montrons maintenant que p^α est bien un dictateur, c'est à dire que pour tout $x, y \in \mathcal{X}$, $x \succ^{p^\alpha} y \Rightarrow x \succ y$. Soient $x, y, z \in \mathcal{X}$ tels que $x \succ^{p^\alpha} y \succ^{p^\alpha} z$, et pour chaque $p \neq p^\alpha$, $y \succ^p x$ et $y \succ^p z$. Alors $x \succ y$ car $\{p^\alpha\}$ est décisif, $y \succ z$ par unanimité, et $x \succ z$ par transitivité. Puisque $x \succ^{p^\alpha} z$ et puisque x, z peuvent être choisis de telle manière que $x \succ^p z$, $z \succ^p x$ ou $x \sim^p z$ soit vérifié pour tout $p \neq p^\alpha$, l'axiome ICRI implique que pour tout $x, y \in \mathcal{X}$, $x \succ^{p^\alpha} y \Rightarrow x \succ y$. □

Exemple 38 *Soient $\mathcal{P} = \{p^1, p^2, p^3\}$ et $N = \{1, 2, 3\}$. Chaque alternative peut prendre une valeur dans l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ sur chaque critère, avec $\forall j \in N$, $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3 \succ_j \alpha_4$.*

	1	2	3
p^1	α_1	α_1	α_1
p^2	α_2	α_2	α_2
p^3	α_3	α_3	α_3
x	α_1	α_3	α_4
y	α_4	α_1	α_2
z	α_2	α_3	α_2

Nous obtenons alors les ensembles suivants :

	p^1	p^2	p^3
X^i	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
Y^i	$\{2\}$	$\{2.3\}$	$\{2.3\}$
Z^i	$\emptyset$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$

Supposons que $\forall p^i \in \mathcal{P}$,

$$\{1,2,3\} \rhd_{p^i} \{1,2\} \rhd_{p^i} \{2,3\} \rhd_{p^i} \{1,3\} \rhd_{p^i} \{1\} \rhd_{p^i} \{2\} \rhd_{p^i} \{3\} \rhd_{p^i} \emptyset$$

Alors
$$\begin{array}{lcl} X^1 \rhd_{p^1} Y^1 \rhd_{p^1} Z^1 & \Rightarrow & x \succ^{p^1} y \succ^{p^1} z \\ Y^2 \rhd_{p^2} Z^2 \rhd_{p^2} X^2 & \Rightarrow & y \succ^{p^2} z \succ^{p^2} x \\ Z^3 \rhd_{p^3} X^3 \rhd_{p^3} Y^3 & \Rightarrow & z \succ^{p^3} x \succ^{p^3} y \end{array}$$

2.5.5 Ordre lexicographique sur les points de référence

Le théorème 9 nous indique qu'étant donné un ensemble de points de référence $\mathcal{P}$, toute procédure d'agrégation vérifiant l'unanimité sur les points de référence (UPR), et permettant d'obtenir de façon certaine une relation de préférence globale $\succsim$ transitive à partir des relations de préférence ordinales du point de vue des points de référence $\succsim^p$, $p \in \mathcal{P}$, implique nécessairement la dictature d'un point de référence. Cependant cette implication ne dit rien des cas où le point dictateur ne permet pas de départager les deux alternatives. Il est donc possible d'être plus précis encore si la relation de préférence vérifie l'unanimité stricte sur les points de référence : cela indique que les alternatives sont départagées grâce aux autres points de référence, et la procédure d'agrégation est alors une lexicographie de points de référence dictateurs. Cela signifie qu'il existe un ordre $\{1,\ldots,m\}$ sur les points de référence tel que $x \succ y$ si et seulement si il existe un élément p^k tel que $i < k \Rightarrow x \sim^{p^i} y$ et $x \succ^{p^k} y$. En d'autres termes, le point de référence p^k permet de départager les alternatives x et y si et seulement si les points de référence placés avant lui dans l'ordre lexicographique laissent x et y indifférents. Ce principe de l'ordre lexicographique en agrégation multicritère a été axiomatisé par Fishburn (1975) pour les méthodes d'agrégations ordinales directes. Le théorème ci-dessous étend le résultat aux agrégations ordinales avec points de référence :

Théorème 10 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de points de référence possédant au moins trois éléments. Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$*

1. *satisfait les axiomes SEP et ICRI*
2. *est un pré-ordre complet satisfaisant l'axiome d'unanimité stricte sur les points de référence (SUPR)*

alors il existe un ordre $\{1, \ldots, m\}$, et m relations de préférence $\overset{\triangleright}{\sim}_p$ sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} x \succ y & \Longleftrightarrow & X^1 \triangleright_{p^1} Y^1 \\ & ou & X^1 \overset{\triangle}{\sim}_{p^1} Y^1 \text{ et } X^2 \triangleright_{p^2} Y^2 \\ & \cdots & \\ & ou & \forall i \neq m,\ X^i \overset{\triangle}{\sim}_{p^i} Y^i \text{ et } X^m \triangleright_{p^m} Y^m \\ x \sim y & & sinon \end{array}$$

Preuve du théorème 10

Le début de la preuve correspond à la preuve du théorème 9.

Soit p^α le dictateur trouvé d'après le théorème 9. Nous nous intéressons maintenant aux alternatives que le point de référence dictateur ne permet pas de différencier, i.e. les paires $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ telles que $x \sim^{p^\alpha} y$. Posons $p^1 = p^\alpha$. Soit $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{p^1\}$. Considérons maintenant $(\mathcal{X}^2)_{\sim p^1}$ l'ensemble des paires $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ telles que $x \sim^{p^1} y$. On dit alors que l'ensemble $K \subseteq \mathcal{P}'$ est décisif dans $\mathcal{P}'$ pour une paire (x, y) de $(\mathcal{X}^2)_{\sim p^1}$ si [$\forall p \in K$, $x \succ^p y$ et $\forall p \notin K$, $y \succ^p x$] entraîne $x \succ y$. Par ICRI, un ensemble décisif pour une paire sera décisif pour toute paire de $(\mathcal{X}^2)_{\sim p^1}$.

Puisque $\succsim$ vérifie l'axiome d'unanimité stricte sur les points de référence, $\mathcal{P}'$ est décisif dans $\mathcal{P}'$. Soit K un plus petit ensemble décisif dans $\mathcal{P}'$ au sens de l'inclusion. De manière analogue à la démonstration du théorème 9, on montre que l'ensemble K contient un singleton, que nous noterons p^2. Ce point p^2 se comporte comme un dictateur sur l'ensemble $(\mathcal{X}^2)_{\sim p^1}$, ce qui signifie : $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \sim^{p^1} y$ et $x \succ^{p^2} y \Rightarrow x \succ y$.

Nous nous intéressons ensuite aux aux alternatives que les points de référence p^1 et p^2 ne permet pas de différencier, i.e. les paires $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ telles que $x \sim^{p^1} y$ et $x \sim^{p^2} y$. On trouve alors un troisième point dictateur sur l'espace réduit, et la preuve continue ainsi jusqu'au dernier point de référence, où l'unanimité implique la conclusion désirée. $\square$

Montrons sur un exemple comment fonctionne une règle d'agrégation lexicographique de préférences.

Exemple 39 *Reprenons le cadre des exemples 9 et 31. Soient les alternatives* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{X}$ *et les points de référence* p^1, p^2 *décrits par le tableau suivant :*

	1	2	3	4
x_1	60	$***$	C	$+$
x_2	60	$**$	B	$+$
x_3	80	$****$	B	$=$
x_4	80	$***$	A	$=$
p^1	60	$****$	A	$+$
p^2	70	$***$	B	$=$

Supposons que les préférences du décideur sont telles que $x_1 \succ x_2$ *et* $x_4 \succ x_3$*. Les différents ensembles* X^i *à considérer sont les suivants :*

	p_1	p_2
x_1	$X_1^1 = \{1, 4\}$	$X_1^2 = \{1, 2, 4\}$
x_2	$X_2^1 = \{1, 4\}$	$X_2^2 = \{1, 3, 4\}$
x_3	$X_3^1 = \{2\}$	$X_3^2 = \{2, 3, 4\}$
x_4	$X_4^1 = \{3\}$	$X_4^2 = \{2, 3, 4\}$

L'égalité $X_1^1 = X_2^1$ *implique que* $x_1 \sim^{p^1} x_2$*. D'après le mode d'agrégation lexicographique, la préférence globale* $\succsim$ *entre* x^1 *et* x^2 *est alors la même que la préférence du point de vue du point de référence* p^2*. Comme* $x_1 \succ x_2$*, cela signifie que* $x_1 \succ^{p^2} x_2$*. De même, l'égalité* $X_3^2 = X_4^2$ *implique que* $x_3 \sim^{p^2} x_4$*, et comme* $x_4 \succ x_3$*, cela signifie que* $x_4 \succ^{p^1} x_3$*. Nous pouvons donc en déduire que* $\{1, 2, 4\} \rhd_{p^2} \{1, 3, 4\}$ *et* $\{3\} \rhd_{p^1} \{2\}$*.*

Soient les alternatives $x_5, x_6 \in \mathcal{X}$ *telles que :*

	1	2	3	4
x_5	70	$****$	C	$=$
x_6	70	$**$	A	$=$

Les ensembles X_5^i *et* X_6^i *sont les suivants :*

	p_1	p_2
x_5	$X_5^1 = \{2\}$	$X_5^2 = \{1, 2, 4\}$
x_6	$X_6^1 = \{3\}$	$X_6^2 = \{1, 3, 4\}$

D'après les renseignements déjà en notre possession, nous avons les préférences partielles suivantes : $x_6 \succ^{p^1} x_5$ *et* $x_5 \succ^{p^2} x_6$*. La préférence globale entre* x_5 *et* x_6 *dépend alors de l'ordre d'agrégation :*

- *si l'ordre lexicographique est* p_1 *puis* p_2*, alors* $x_6 \succ x_5$ *car* $x_6 \succ^{p^1} x_5$*.*
- *si l'ordre lexicographique est* p_2 *puis* p_1*, alors* $x_5 \succ x_6$ *car* $x_5 \succ^{p^2} x_6$*.*

L'agrégation lexicographique n'est pas sans lien formel avec la méthode ELECTRE TRI. En effet, l'ordre d'agrégation sur les points de référence rappelle l'ordre de filtrage d'ELECTRE TRI, pour lequel il existe deux options : le filtrage ascendant et le filtrage descendant. Le filtrage ascendant d'ELECTRE TRI consiste à comparer l'alternative à classer avec des seuils de plus en plus haut : le premier seuil auquel l'alternative n'est pas préférée donne la catégorie où classer l'alternative. Inversement, le filtrage descendant d'ELECTRE TRI consiste à comparer l'alternative à classer avec des seuils de plus en plus bas : le premier seuil qui n'est pas préféré à l'alternative donne la catégorie où classer l'alternative. De manière similaire, on peut imaginer une agrégation lexicographique "ascendante" ou "descendante". Une lexicographie "ascendante" consiste à comparer deux alternatives à partir des points de référence les plus bas : cela consiste à dire qu'une alternative a est préférée à une alternative b parce qu'elle possède moins de critères avec des mauvaises valeurs (l'ensemble des critères où a est préféré à un point de référence bas est plus important que l'ensemble semblable pour b). Une lexicographie "descendante" consiste à comparer deux alternatives à partir des points de référence les plus haut : cela consiste à dire qu'une alternative a est préférée à une alternative b parce qu'elle possède plus de critères avec des bonnes valeurs (l'ensemble des critères où a est préféré à un point de référence haut est plus important que l'ensemble semblable pour b). En résumé, la lexicographie "descendante" favorisera les alternatives dotées de très bonnes valeurs sur un petit nombre de critères, la lexicographie "ascendante" favorisera les alternatives dénuées de très mauvaises valeurs. Il est bien évidemment possible de choisir un ordre lexicographique ni ascendant, ni descendant : par exemple, dans le cas de trois points de référence, commencer par comparer les alternatives du point de vue du point de référence médian, puis du point de vue du point de référence supérieur et ensuite du point de vue du point de référence inférieur. Ces différentes approches sont détaillées sur des exemples dans le chapitre 4.

2.5.6 Révélation de l'ordre lexicographique des points de référence

Nous avons vu en section 2.1.2 un axiome suffisant pour exhiber les points de référence si ceux-ci sont inconnus *a priori*. Dans le cadre des relations de préférence lexicographiques suivant la règle présentée au théorème 10, il est possible non seulement de déterminer ces points de référence mais aussi leur ordre d'importance. Pour cela, il faut comparer en priorité des alternatives aux profils très disparates : en particulier, la comparaison des alternatives "homogènes" avec celles très "déséquilibrées" permet de déterminer facilement l'ordre lexicographique d'agrégation des préférences. Plus précisément, il s'agit de comparer deux alternatives qui se comportent de la même manière du point de vue de tous les points de référence sauf deux, de telle manière que chaque alternative soit préférée à l'autre sur un des deux points de référence. A partir de ces comparaisons, nous pouvons en déduire la permutation σ sur les points de référence donnant l'ordre lexicographique. L'algorithme est semblable à un algorithme de tri classique. Il existe donc plusieurs façon de procéder pour obtenir l'ordre lexicographique sur les points de référence.

Montrons sur un exemple comment nous pouvons procéder.

Exemple 40 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$ l'espace des alternatives avec $\forall i = 1, \ldots, 4$, $\mathcal{X}_i = \{0, 1, 2, 3\}$. Supposons que les trois points de référence $p^1 = (3, 3, 3, 3)$, $p^2 = (2, 2, 2, 2)$ et $p^3 = (1, 1, 1, 1)$ soient connus (ou révélés peu avant). Nous supposons également que l'axiome d'unanimité stricte est vérifié, ce qui implique que pour tout couple d'alternatives (x, y), et tout point de référence p^i, $X^i \subset Y^i \Rightarrow x \prec y$. En particulier, cet axiome implique que pour tout point de référence p^i, et pour tout sous-ensemble $A \subset N$ non vide, $N \rhd_{p^i} A \rhd_{p^i} \emptyset$. Les alternatives suivantes permettent alors de détecter l'ordre d'importance des points de référence :*

	1	2	3	4
a	3	3	1	1
b	2	2	2	2
c	2	2	0	0
d	1	1	1	1
e	3	3	0	0
f	2	2	1	1

Les relations de préférence du point de vue de chaque point de référence sont alors les suivantes :

	p^1	p^2	p^3
$a?b$	$a \succ^{p^1} b$	$a \prec^{p^2} b$	$a \sim^{p^3} b$
$c?d$	$c \sim^{p^1} d$	$c \succ^{p^2} d$	$c \prec^{p^3} d$
$e?f$	$e \succ^{p^1} f$	$e \sim^{p^2} f$	$e \prec^{p^3} f$

il suffit alors de connaître la préférence entre a et b pour déterminer l'ordre d'importance de p^1 et p^2, celle entre c et d pour déterminer l'ordre d'importance de p^2 et p^3, et celle entre e et f pour déterminer l'ordre d'importance entre p^1 et p^3.

Nous proposons ci-dessous à l'algorithme 2 une formalisation à la manière du tri par bulle descendant, qui impose $N \rhd_p A \rhd_p \emptyset$. L'idée générale est de détecter en premier le point de référence qui sera le dernier dans l'ordre lexicographique (i.e. qui ne sera jamais en mesure d'imposer sa préférence du point de vue d'un autre point de référence), puis l'avant-dernier, etc, et de finir par le premier point de référence dans l'ordre lexicographique. Rappelons tout d'abord que les points de référence se dominent les uns les autres : $\forall j \in N$, $p^i_j \succ_j p^{i+1}_j$. Les points de référence sont naturellement numérotés dans l'ordre $p^1, p^2, \ldots, p^m$. Il s'agit donc de trouver une permutation σ sur

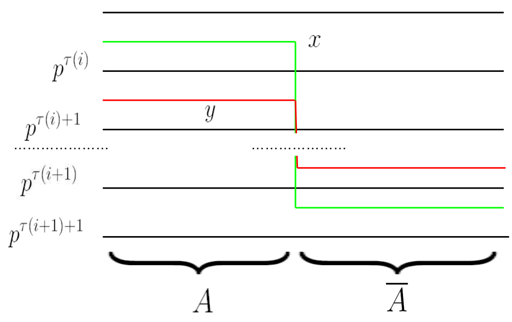

FIG. 2.1 – Exemple de comparaison de deux points de référence

$\{1, \ldots, m\}$ telle que $\sigma(i)$ donne le rang du point de référence p^i dans la lexicographie. La permutation τ, inverse de σ, est telle que $\tau(i)$ donne le i-ème point dans la lexicographie : c'est cette permutation que l'on va révéler. Pour cela, nous allons nous baser sur la comparaison de deux alternatives particulières pour évaluer l'ordre d'agrégation entre $p^{\tau(i)}$ et $p^{\tau(i+1)}$ dans le tri par bulle comme dans la figure 2.1.

Les deux alternatives ont été choisies de telle manière que :

- $\forall p^k \in \mathcal{P}$, $k < \tau(i)$, $C(x, p^k) = C(y, p^k) = \emptyset$, et donc $x \sim^{p^k} y$
- $C(x, p^{\tau(i)}) = A$ et $C(y, p^{\tau(i)}) = \emptyset$, donc $C(x, p^{\tau(i)}) \rhd C(y, p^{\tau(i)})$ et $x \succ^{p^{\tau(i)}} y$
- $\forall p^k \in \mathcal{P}$, $\tau(i) < k < \tau(i+1)$, $C(x, p^k) = C(y, p^k) = A$, et donc $x \sim^{p^k} y$
- $C(x, p^{\tau(i+1)}) = A$ et $C(y, p^{\tau(i+1)}) = N$, donc $C(y, p^{\tau(i+1)}) \rhd C(x, p^{\tau(i+1)})$ et $y \succ^{p^{\tau(i+1)}} x$
- $\forall p^k \in \mathcal{P}$, $\tau(i+1) < k$, $C(x, p^k) = C(y, p^k) = N$, et donc $x \sim^{p^k} y$

Les deux alternatives x et y se comportent donc de la même manière du point de vue de tous les points de référence, sauf du point de vue de $p^{\tau(i)}$ et $p^{\tau(i+1)}$ où ils se comportent de manière opposée. Par définition de l'agrégation lexicographique, nous ne pouvons avoir $x \sim y$. Donc soit $x \succ y$, ce qui signifie que $p^{\tau(i)}$ est avant $p^{\tau(i+1)}$ dans l'ordre lexicographique, ce qui est correct, soit $y \succ x$, ce qui signifie que $p^{\tau(i+1)}$ est avant $p^{\tau(i)}$ dans l'ordre lexicographique et qui amène à) intervertir $\tau(i)$ et $\tau(i+1)$.

2.5.7 Oligarchies de points de référence

Les théorèmes 9 et 10 se placent dans le cadre où la relation de préférence $\succsim$ est transitive. Cependant, il existe de nombreuses situations où la relation de préférence n'est pas transitive mais seulement quasi-transitive : seule la partie stricte de la relation de préférence est transitive, mais la relation d'indifférence ne l'est pas forcément. On

Algorithme 2 Révélation de l'ordre lexicographique

1) Initialisation :
Pour $i = 1$ à $|\mathcal{P}|$
  $\tau(i) = i$
fin *Pour* i
2) tri :
Pour $k = 1$ à $|\mathcal{P}| - 1$
  Pour $i = 1$ à $|\mathcal{P}| - k$
    Prendre $x \in \mathcal{X}$ tel que $\forall j \in A$, $x_j = p_j^{\tau(i)}$ et $\forall j \in \overline{A}$, $x_j = p_j^{\tau(i+1)+1}$
    Prendre $y \in \mathcal{X}$ tel que $\forall j \in A$, $y_j = p_j^{\tau(i)+1}$ et $\forall j \in \overline{A}$, $y_j = p_j^{\tau(i+1)}$
    Si $x \prec y$ *Alors*
      échange$(\tau(i); \tau(i+1))$
    fin *Si*
  fin *Pour* i
fin *Pour* k

fin

parle alors de relations quasi-transitives, et dans ces cas là, il est possible d'avoir trois alternatives $a, b, c \in \mathcal{X}$ telles que $a \sim b$, $b \sim c$ et $a \succ c$. Si $\succsim$ n'est pas un pré-ordre mais une relation quasi-transitive, les théorèmes 9 et 10 ne sont plus valables, et il n'y a alors plus de point de référence dictateur mais une autre forme de procédure d'agrégation, qu'on appelle oligarchie de points de référence. Dans le cadre de la théorie du choix social, une oligarchie est un ensemble V de votants tels que l'unanimité de préférence sur V entraîne la préférence globale, et que chaque votant de V possède un pouvoir de veto (voir Gibbard (1969), Fishburn (1976a), Weymark (1984)). Autrement dit, dans le cadre des procédures d'agrégation multicritères ordinales avec points de référence que nous étudions, nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}$ est une oligarchie de points de référence si $\forall x, y \in \mathcal{X}$:

1. $[\forall p \in \mathcal{O}, x \succ^p y] \Rightarrow x \succ y$
2. $[\exists p \in \mathcal{O}, x \succ^p y] \Rightarrow \neg(y \succ x)$

A la suite de Weymark (1984), nous pouvons distinguer deux types d'oligarchies, dont la différence se manifeste par le pouvoir de veto : les α-oligarchies impliquent que si deux éléments de l'oligarchie ont des préférences strictes incompatibles entre elles sur deux alternatives, les deux alternatives sont indifférentes entre elles, alors que les β-oligarchies impliquent la non-comparaison des deux alternatives. Dans notre cas, nous nous intéresserons aux α-oligarchies, menant à des relations de préférence complètes et quasi-transitives.

Montrons sur un exemple simple comment fonctionne une oligarchie sur les points de référence :

Exemple 41 *Reprenons le cadre de l'exemple 39, avec les points de référence suivants :*

	1	2	3	4
p^1	80	$**$	C	$-$
p^2	70	$***$	B	$=$
p^3	60	$****$	A	$+$

On supposera que $x \succsim^p y \iff |X^p| \geq |Y^p|$. *Considérons que les points de référence* $\{p^1, p^2\}$ *forment une oligarchie. Soient les alternatives suivantes :*

	1	2	3	4
x_1	60	$****$	D	$=$
x_2	60	$***$	C	$-$
x_3	60	$****$	D	$-$
x_4	70	$****$	B	$=$
x_5	80	$***$	C	$=$
x_6	90	$***$	D	$=$

Nous constatons que nous avons les relations suivantes :
- $x_1 \succ^{p^1} x_2$ *et* $x_1 \succ^{p^2} x_2$. *Nous avons donc* $x_1 \succ x_2$.
- $x_1 \succ^{p^1} x_2$ *et* $x_2 \succ^{p^2} x_1$. *Nous avons donc* $x_1 \sim x_2$ *(cas d'une* α*-oligarchie).*
- $x_1 \sim^{p^1} x_2$ *et* $x_1 \sim^{p^2} x_2$. *Il faut alors constater que* $x_1 \succ^{p^3} x_2$ *pour dire que* $x_1 \succ x_2$.

Nous pouvons alors présenter un théorème de caractérisation des relations de préférence à oligarchie de points de référence :

Théorème 11 *Soit* $\mathcal{P}$ *un ensemble de points de référence possédant au moins trois éléments. Si la relation de préférence* $\succsim$ *sur* $\mathcal{X}$

1. *satisfait les axiomes SEP et ICRI*
2. *est une relation de préférence quasi-transitive complète satisfaisant l'axiome de monotonie MON*

alors il existe une oligarchie $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}$ *de points de référence telle que*

1. $[\forall p \in \mathcal{O}, x \succ^p y] \Rightarrow x \succ y$
2. $[\exists p \in \mathcal{O}, x \succ^p y] \Rightarrow \neg(y \succ x)$

La preuve de ce théorème est inspirée de la preuve donnée par Weymark (1984) dans le cas de l'agrégation ordinale sans point de référence, et reprend les notations et définitions de la preuve du théorème 9.

Preuve du théorème 11 Comme dans le cas du théorème 9, MON et MIPR entraînent que $[\forall p \in \mathcal{P},\ x \succ^p y] \Rightarrow x \succ y$. Cela montre que $\mathcal{P}$ est un ensemble décisif. Soit G un plus petit ensemble décisif. Si $|G| = 1$, G est évidemment une oligarchie. Si $|G| \geq 2$, nous définissons pour $x, y \in \mathcal{X}$ les ensembles $A = \{p \in G \mid x \succ^p y\}$, $B = \{p \in G \mid y \succ^p x\}$ et $C = \{p \in G \mid x \sim^p y\}$. Considérons la situation suivante, avec $x, y, z \in \mathcal{X}$:

$$\begin{cases} \forall p \in A, & x \succ^p z \succ^p y \\ \forall p \in B, & y \succ^p x \succ^p z \\ \forall p \in C, & x \sim^p y \succ^p z \\ \forall p \in \overline{G}, & z \succ^p y \end{cases}$$

Une telle situation est possible, comme indiqué dans l'exemple 42 détaillé ci-dessous. Supposons que $A \neq \emptyset$ et $B \cup C \neq \emptyset$, sinon les cas sont triviaux. Puisque G est décisif, $x \succ z$. Supposons que $y \succ x$. La transitivité de $\succ$ entraîne $y \succ z$. Mais si $y \succ z$, alors $B \cup C$ est décisif, ce qui contredit le fait que G est le plus petit ensemble décisif. Donc $\neg(y \succ x)$. Comme G est décisif, cela montre que G est une oligarchie. $\square$

Exemple 42 *Soit $\mathcal{P} = \{p^1, p^2, p^3, p^4\}$ et $N = \{1, 2, 3\}$. Chaque alternative peut prendre une valeur dans l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ sur chaque critère, avec $\forall j \in N$, $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3 \succ_j \alpha_4 \succ_j \alpha_5$.*

	1	2	3
p^1	α_1	α_1	α_1
p^2	α_2	α_2	α_2
p^3	α_3	α_3	α_3
p^4	α_4	α_4	α_4
x	α_1	α_3	α_4
y	α_2	α_2	α_4
z	α_4	α_4	α_2

Supposons que $\forall p^i \in \mathcal{P}$,

$$\{1,2,3\} \rhd_{p^i} \{1,2\} \rhd_{p^i} \{1,3\} \rhd_{p^i} \{2,3\} \rhd_{p^i} \{1\} \rhd_{p^i} \{2\} \rhd_{p^i} \{3\} \rhd_{p^i} \emptyset$$

$$\textit{Alors} \begin{cases} X^1 \rhd_{p^1} Z^1 \rhd_{p^1} Y^1 & \Rightarrow & x \succ^{p^1} z \succ^{p^1} y \\ Y^2 \rhd_{p^2} X^2 \rhd_{p^2} Z^2 & \Rightarrow & y \succ^{p^2} x \succ^{p^2} z \\ X^3 \overset{\triangle}{\sim}_{p^3} Y^3 \rhd_{p^3} Z^3 & \Rightarrow & x \sim^{p^3} y \succ^{p^3} z \\ Z^3 \rhd_{p^4} X^3 \overset{\triangle}{\sim}_{p^3} Y^3 & \Rightarrow & z \succ^{p^3} x \sim^{p^3} y \end{cases}$$

Révélation de l'oligarchie de points de référence

Dans le cas d'une oligarchie de points de référence, on peut révéler l'appartenance d'un point de référence à l'oligarchie en détectant le pouvoir de veto des membres de l'oligarchie, comme il est montré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 43 *Reprenons le cadre de l'exemple précédent. Soit* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$ *l'espace des alternatives avec* $\forall i = 1, \ldots, 4$, $\mathcal{X}_i = \{0, 1, 2, 3\}$. *Supposons que les trois points de référence* $p^1 = (3, 3, 3, 3)$, $p^2 = (2, 2, 2, 2)$ *et* $p^3 = (1, 1, 1, 1)$ *soient connus (ou révélés avant). Nous supposons également que l'axiome d'unanimité stricte est vérifié, ce qui implique que pour tout couple d'alternatives* (x, y), *et tout point de référence* p^i, $X^i \subset Y^i \Rightarrow x \prec y$. *En particulier, cet axiome implique que pour tout point de référence* p^i, *et pour tous sous-ensembles* $A, B \subset N$ *non vides tels que* $N \subset A \subset B$, $N \rhd_{p^i} A \rhd_{p^i} B \rhd_{p^i} \emptyset$. *Les alternatives suivantes permettent alors de révéler l'oligarchie.*

	1	2	3	4
a	3	3	2	2
b	3	3	3	0
c	3	3	1	1
d	2	2	2	0
e	3	3	0	0
f	1	1	1	0

Les relations de préférence du point de vue de chaque point de référence sont alors les suivantes :

	p^1	p^2	p^3
$(a?b)$	$a \prec^{p^1} b$	$a \succ^{p^2} b$	$a \succ^{p^3} b$
$(c?d)$	$c \succ^{p^1} d$	$c \prec^{p^2} d$	$c \succ^{p^3} d$
$(e?f)$	$e \succ^{p^1} f$	$e \succ^{p^2} f$	$e \prec^{p^3} f$

Si $b \succ a$, *cela veut dire que le point* p^1 *est l'oligarchie, car aucun autre point n'a un pouvoir de veto. L'algorithme s'arrête alors là. Sinon, si* $a \sim b$, *cela signifie alors que le point* p^1 *a un pouvoir de veto, et donc qu'il fait partie de l'oligarchie. Si* $a \succ b$, *cela signifie que l'oligarchie est un sous-ensemble de* $\mathcal{P} - \{p^1\}$, *et donc que* p^1 *ne fait pas partie de l'oligarchie. Dans ces deux derniers cas, on passe alors à l'étude du point* p^2. *Si* $d \succ c$, *cela signifie alors que le point* p^2 *est l'oligarchie, car aucun autre point n'a un pouvoir de veto. L'algorithme s'arrête alors là. Si* $c \sim d$, *cela signifie que le point* p^2 *a un pouvoir de veto, et donc qu'il fait partie de l'oligarchie. Si* $c \succ d$, *cela signifie que l'oligarchie est un sous-ensemble de* $\mathcal{P} - \{p^2\}$, *et donc que* p^2 *ne fait pas partie de l'oligarchie. Dans ces deux derniers cas, on passe alors à l'étude du point* p^3. *Si* $f \succ e$, *cela signifie alors que le point* p^3 *est l'oligarchie, car aucun autre point n'a un pouvoir de veto. Si* $e \sim f$, *cela signifie que le point* p^3 *a un pouvoir de veto, et donc qu'il fait partie de l'oligarchie. Si* $e \succ f$, *cela signifie que l'oligarchie est un sous-ensemble de* $\mathcal{P} - \{p^3\}$, *et donc que* p^3 *ne fait pas partie de l'oligarchie. L'oligarchie est alors parfaitement déterminée. Par exemple, si* $a \sim b$, $c \succ d$ *et* $e \sim f$, *cela signifie que l'oligarchie est constituée des points de référence* p^1 *et* p^3.

Cette procédure peut se formaliser comme indiqué dans l'algorithme ci-dessous, en supposant qu'il existe deux sous-ensembles A et B de N tel que $N \rhd A \rhd B \rhd \emptyset$. Nous définissons également l'élément minimum, non forcément unique, $\underline{x}_j = \min(x_j \in \mathcal{X}_j)$ par $\forall x_j \in \mathcal{X}_j$, $x_j \succsim_j \underline{x}_j$. L'oligarchie est constituée de tous les points de référence p^i tels que

---

Algorithme 3 Révélation de l'oligarchie

1) Initialisation :
$m = |\mathcal{P}|$
Pour $i = 1$ à m
    $O(i) = 0$
fin *Pour* i
2) révélation :
Pour $i = 1$ à m
    soit $x \in \mathcal{X}$ tel que $\forall j \in A$, $x_j = p_j^i$ et $\forall j \in \overline{A}$, $x_j = \underline{x}_j$
    soit $y \in \mathcal{X}$ tel que $\forall j \in B$, $y_j = p_j^1$ et $\forall j \in \overline{B}$, $y_j = p_j^{i+1}$
    Si $x \succ y$ *Alors*
        O(i)=1 et i=m (sortie de la boucle) *Sinon si* $x \sim y$ *Alors*
            O(i)=1
        fin *Si*
    fin *Si*
fin *Pour* i

fin

$O(i) = 1$.

2.6 Extension floue des modèles de préférences à points de référence

Nous avons pu constater dans les parties précédentes que la base des modèles d'agrégation proposés sont les comparaisons critère par critère des alternatives x et y à comparer avec les points de référence p, à travers les ensembles $X^p = C(x, p)$ et $Y^p = C(y, p)$. Or il s'avère que ces ensembles sont particulièrement sensibles à de petites variations autour du point de référence : on peut avoir $x_j + \epsilon/2 \succ_j p_j$ et $x_j - \epsilon/2 \prec_j p_j$, ce qui implique que le critère $j \in N$ sera un élément de l'ensemble X^p ou non à ϵ près. En particulier, si l'échelle des valeurs sur un critère n'est pas discrète mais continue, l'appartenance ou non d'un critère à une coalition X^p peut dépendre de la précision avec laquelle est connue la valeur sur le critère : cette précision n'est pas toujours disponible. Il peut donc être intéressant d'introduire dans les modèles proposés des relations de préférence floues sur les critères, ce qui permettra d'introduire de la progressivité dans l'appartenance ou non d'un critère à une coalition. Nous étudierons donc dans cette partie l'apport de la modélisation floue des préférences pour certains modèles de relations de préférence avec points de référence. L'introduction de la logique floue n'est pas toujours pertinente pour tous les modèles présentés précédemment, par exemple quand elle aboutit à une complexification exagérée du modèle pour un résultat parfois peu différent. C'est pourquoi nous nous intéresserons principalement aux modèles décomposables, additivement ou non, et au modèle lexicographique.

2.6.1 Modélisation floue des préférences

Logique floue

La logique binaire (principe du tiers exclu) a fait la preuve de son efficacité, depuis les fondements posés par Aristote jusqu'aux travaux de Boole. Cependant, il n'est pas toujours possible de raisonner en termes purement binaires (vrai/faux, oui/non, 0/1, etc.). En présence de situations intermédiaires entre le tout et le rien, par exemple dans le cas où le passage d'un état à un autre se fait graduellement, ou dans celui de l'utilisation de catégories mal définies, la logique classique ne peut représenter fidèlement la situation. La logique floue permet alors de manipuler des objets imprécis ou mal connus dans un cadre formel bien défini. Depuis les travaux fondateurs de Zadeh (1965), la théorie des ensembles flous, ou logique floue, a connus de nombreux développements, en particulier dans le domaine de l'aide à la décision (voir par exemple Bouchon (1995) pour une introduction, ou Dubois et Prade (1998-2000) pour une revue exhaustive du sujet). L'aide à la décision multicritère a pu bénéficier des apports de la logique floue sur les points suivants :

- Cas où les objets manipulés sont mal définis. Dans certains cas, les différentes classes d'objets manipulés ne sont pas bien délimitées : il existe une graduation entre l'appartenance et la non-appartenance d'un objet à un ensemble, même quand cet objet est bien connu. Par exemple, dans l'implication logique "s'il faut chaud, baisser le chauffage", le caractère "chaud" de la température est progressif : une température inférieure à 15 degrés ne sera pas considérée comme chaude, une température supérieure à 25 degrés sera considérée comme chaude à 100%, et les températures intermédiaires seront considérées comme chaude à un certain point. L'ensemble des températures chaudes est donc mal défini, et ceci même si la température est parfaitement connue.
- Cas où les objets manipulés sont mal connus. D'autres certains autres cas, il peut exister une imprécision sur l'appartenance ou non de l'élément à l'ensemble considéré, même si l'ensemble est bien défini, à cause de l'absence de certitudes sur l'objet. Considérons par exemple la composition d'un futur conseil municipal juste

avant l'élection : on ne peut affirmer avec certitude que telle ou telle personne fera partie de l'ensemble des élus. Cependant, la possibilité de faire partie du conseil n'est pas identique pour tout les candidats : la tête de liste sera très certainement élue, contrairement au dernier de la liste.

Dans l'un et l'autre cas on peut modéliser les ensembles considérés par des ensembles flous. Il ne faut cependant pas perdre de vue que même si les procédures de calcul sont identiques, il existe une différence de signification sémantique entre ces deux modélisations. Notons de plus qu'il est possible qu'un ensemble soit mal défini et mal connu à la fois ! Dans le cadre des relations de préférence à points de référence, l'introduction de préférences floues sur les critères doit permettre d'obtenir des relations de préférence globales plus "robustes", c'est à dire moins sensibles à de petites variations des données initiales.

Formalisme

Formellement, un ensemble flou est défini de la façon suivante :

Définition 17 *Soit E un ensemble de référence. Un sous-ensemble flou A de E est caractérisé par une fonction d'appartenance à valeurs dans $[0,1]$: $f_A : E \to [0,1]$, qui a tout élément $e \in E$ associe $f_A(e)$ représentant le degré d'appartenance de e à l'ensemble A avec les conventions suivantes : $f_A(e) = 1$ si $e \in A$ avec certitude, $f_A(e) = 0$ si $e \notin A$ avec certitude.*

Il est nécessaire alors de préciser la définition de deux relations binaires de manière spécifique pour les sous-ensembles flous :

Définition 18 Relations binaires.
Soient A, B deux sous-ensembles flous de E
- **Egalité :** $A = B \iff \forall x \in E,\ f_A(x) = f_B(x)$
- **Inclusion :** $A \subseteq B \iff \forall x \in E,\ f_A(x) \leq f_B(x)$

Ensembles flous et modélisation des préférences

L'utilisation d'ensembles flous permet, comme nous l'avons vu ci-dessus, de modéliser des préférences imprécises ou mal connues. On pourra utilement se reporter à Perny (1992) pour une étude complète de la modélisation et l'agrégation de préférences floues. La relation de préférence floue $\succsim$ (et donc $\succ$ et $\sim$) est une fonction de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, ensemble des fonctions d'appartenance, vers $[0,1]$. Schématiquement, on peut avoir recours à des relations binaires floues dans deux cas distincts :

1. relations floues pour modéliser des préférences graduelles : il s'agit dans ce cas d'admettre un continuum de situations entre la préférence et la non-préférence,

représenté par une fonction d'appartenance graduelle. On obtient alors des relations $\succsim_j$, $\sim_j$ et $\precsim_j$ floues, à partir des valeurs des critères x_j et y_j, indiquant avec quel degré x_j est préféré ou indifférent à y_j.

2. relations floues utilisées pour étendre une relation nette en présence d'évaluations mal connues : il s'agit dans ce cas de considérer que les alternatives sont décrites non par des valeurs exactes sur chacun des critères, mais par des sous-ensembles flous caractérisés par des fonctions d'appartenance f_j, $j = 1, \ldots, n$. Chaque valeur $f_j(a_j)$ peut alors être considérée comme la possibilité que le critère j prenne effectivement la valeur a_j. On peut alors ensuite définir la préférence floue comme la possibilité de l'événement $x_j \succsim_j y_j$. On consultera pour plus de détails Fodor et al. (1998) ou Grabisch et Perny (2003).

Points de référence et relations floues

Comme indiqué ci-dessus, l'introduction de la logique floue dans la modélisation des relations de préférence peut se faire dans le cas où les laternatives ont aml connues, ou dans le cas où les relations de préférence sont mal définies. La présence de points de référence permet de préciser ces possibilités. On peut en effet envisager l'introduction d'ensembles flous dans trois cas différents. Les alternatives peuvent être mal connus et donc décrites à l'aide d'ensembles flous sur les critères. De même, être mal connus et donc décrites à l'aide d'ensembles flous sur les critères. Enfin, les relations de préférence entre les alternatives et les points de référence peuvent être graduelles, et représentées par des ensembles flous. Les modèles de relations de préférence avec points de référence que nous avons étudié jusqu'à présent utilisaient tous les ensembles $C(x,p) = \{j \in N | x_j \succsim_j p_j\}$ comme base. Nous souhaitons maintenant étudier des relations de préférence où les ensembles $C(x,p)$ sont des ensembles flous. Dans la suite de l'étude, nous supposerons que le caractère flou des relations étudiées provient du fait que les relations de préférence sur les critères sont mal définies.

2.6.2 Alternatives floues

La règle AMPR que nous avons étudiée jusqu'à présent est basée sur l'utilisation des ensembles $C(x,p) = \{j \in N | x_j \succsim_j p_j\}$. l'extension floue de cette règle est obtenue en faisant correspondre aux relations $x_j \succsim_j p_j$ les relations floues $\succsim_j (x_j, p_j)$ qui indiquent avec quelle intensité x_j est dans l'ensemble $C(x,p)$. En posant $q_j = p_j - \epsilon$, la fonction $\succsim_j$ est telle que, comme illustré en figure 2.2,

$$\begin{cases} \succsim_j (x_j, p_j) = 0 \text{ si } x_j \precsim_j q_j \\ \succsim_j (x_j, p_j) \in]0, 1[\text{ si } q_j \prec_j x \prec_u p_j \\ \succsim_j (x_j, p_j) = 1 \text{ si } x_j \succsim p_j \end{cases}$$

De même, l'extension floue du modèle à points de référence fait correspondre aux en-

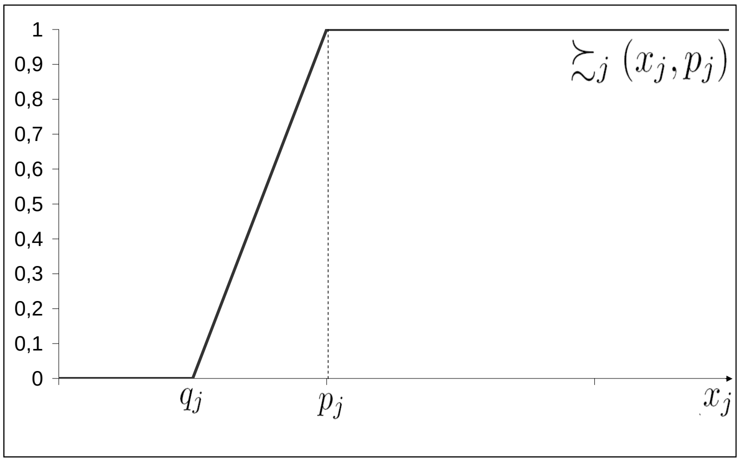

FIG. 2.2 – Construction de relations de préférences floues

sembles $C(x,p) = \{j \in N | x_j \succsim_j p_j\}$, les ensembles $C(x,p)$ sous-ensembles flous de N, tels que $f^j_{C(x,p)} = \succsim_j (x_j, p_j)$ avec $\succsim_j (x_j, p_j) \in [0,1]$.

L'introduction de préférences floues dans le cadre des règles d'agrégation étudiées précédemment est intéressante en particulier dans le cas où l'ensemble $\mathcal{X}_j$ est un ensemble infini, discret ou continu : on ne peut envisager de travailler avec un nombre infini de points de référence. Il devient donc intéressant d'étudier l'introduction de relations de préférence floues construites à partir de points de référence. Nous développons cette étude dans les paragraphes suivants, en regardant successivement les règles obtenues en finissant soit par la comparaison de scores obtenus pour chaque alternative, soit par l'agrégation des comparaisons critère par critère de deux alternatives.

Remarque : il est à noter que l'introduction de préférences floues ne signifie pas que toutes les valeurs $\succsim_j (x_j, p_j)$ sont comprises strictement entre 0 et 1. Au contraire, la quasi-totalité des valeurs de $\succsim_j (x_j, p_j)$ obtenues valent 0 ou 1. Sous l'hypothèse raisonnable que les points de référence sont suffisamment distincts pour qu'il y ait toujours une préférence nette entre deux points de référence sur chacun des critères, on peut alors constater que, pour toute alternative $x \in \mathcal{X}$, il existe au maximum un point de référence p_j tel que $\succsim_j (x_j, p_j)$ est différent de 0 ou 1. Il ne peut y avoir de préférence floue que par rapport à un seul point de référence au maximum.

2.6.3 Cas particulier : un seul point de référence

Introduisons tout d'abord l'extension floue des règles de préférences n'utilisant qu'un seul point de référence :

Définition 19 Modèle à un point de référence
On définit une relation de préférence floue à base d'un point de référence par :

$$x \succsim y \iff \Psi(C(x,p)) \geq \Psi(C(y,p)) \tag{2.17}$$

avec $C(x,p) = \{\succsim_1 (x,p), \succsim_2 (x,p), \ldots, \succsim_n (x,p)\}$ *et* Ψ *une fonction d'agrégation de* $[0,1]^n$ *dans* $[0,1]$ *telle que*

$$\Psi(C(x,p)) = C_\nu(x,p)$$

où C_ν *est une intégrale de Choquet définie par :*

$$C_\nu(x,p) = \sum_{j\in N} \mu(A_{(j)})(\succsim_{(j)} (x_{(j)}, p_{(j)}) - \succsim_{(j-1)} (x_{(j-1)}, p_{(j-1)})) \tag{2.18}$$

où les valeurs $\succsim_{(j)}$ *ont été classées par ordre croissant, où* $A_{(j)}$ *est l'ensemble des critères* $j \in N$ *tels que* $\succsim_j (x_j, p_j)$ *soit supérieur ou égal à* $\succsim_{(j)} (x_{(j)}, p_{(j)})$ *et* μ *est une fonction de mesure sur les sous-ensembles de* N*, avec par convention* $\succsim_0 (x_{(0)}, p_{(0)}) = 0$*.*

Dans le cas où pour tout $j \in N$, les valeurs $\succsim_j (x_j, p_j)$ valent 0 ou 1, alors $\Psi(C(x,p)) = \nu(C(x,p))$, ce qui montre que notre définition est cohérente avec celle de l'équation (2.10) dans le cas où les préférences $\succsim_j$ sont nettes.

Nous introduisons maintenant un exemple de relation de préférence où la mesure de la capacité est additive : c'est le cas de la moyenne pondérée.

Capacité additive

Il s'agit dans ce cas d'effectuer la moyenne, pour chaque alternative, des valeurs floues obtenues sur chacun des critères, pondérée éventuellement par un poids particulier attribué à chaque critère en fonction de son importance. Soit $\Psi(C(x,p)$ une fonction de $[0,1]^n \mapsto [0,1]$ telle que $\Psi(C(x,p)) = \sum_{j=1}^n \omega_j \succsim_j (x_j, p_j)$, où les coefficients ω_j représentent des poids donnés à chaque critère, tels que $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$.

Exemple 44 *Soit un ensemble d'étudiants notés sur 3 matières : (1) Math, (2) Physique, (3) Économie. L'échelle des notes va de 0 à 20. On estime qu'un bon étudiant (point de référence) est celui qui est au niveau d'une mention assez bien, soit 12/20 dans toutes les matières. On va donc prendre comme point de référence le point* $p = (12, 12, 12)$*. Cependant, il est admis que l'imprécision de la notation fait que le niveau de référence à*

12 ne peut pas être considéré de manière aussi nette. C'est pourquoi il est fait appel des fonction $\succsim_j$ de $\mathcal{X}$ dans $[0,1]$ telle que

$$\forall j=1,2,3,\ \forall x \in \mathcal{X}, \begin{cases} \succsim_j (x_j,p_j) = 0 \ si \ x_j \leq 11,5 \\ \succsim_j (x_j,p_j) = 2 \times (x_j - 11,5) \ si \ 11,5 \leq x_j \leq 12 \\ \succsim_j (x_j,p_j) = 1 \ si \ x_j \geq 12 \end{cases}$$

Prenons comme coefficients pour la moyenne pondérée les valeurs suivantes : $\omega_1 = 1/3$, $\omega_2 = 1/3$ *et* $\omega_3 = 1/3$.

Considérons les étudiants suivants :

Etudiant	*Math (1)*	*Physique (2)*	*Economie (3)*
A	*12*	*12,5*	*12,5*
B	*12*	*13,3*	*11,7*
C	*12*	*14,5*	*10,5*
D	*11,9*	*11,9*	*11,9*

Tout d'abord, regardons ce que donne l'application d'une règle non-floue. Nous obtenons :

- $C(A,p) = \{1,2,3\}$
- $C(B,p) = \{1,2\}$
- $C(C,p) = \{1,2\}$
- $C(D,p) = \emptyset$

En considérant que la relation d'importance sur les ensembles de critères vérifie la stricte monotonie par inclusion, cela entraîne que $A \succ B \sim C \succ D$. *Or il y a une certaine différence entre l'alternative B, qui sur le critère "économie" est proche du niveau de référence, et l'alternative C qui en est franchement plus éloignée. De même, l'alternative D est très proche du niveau de référence sur tous les critères, sans jamais l'égaler cependant. Utilisons maintenant les relations floues vues ci-dessus. Nous obtenons :*

	$\succsim_1 (x_1,p_1)$	$\succsim_2 (x_2,p_2)$	$\succsim_3 (x_3,p_3)$	$\Psi(x)$
A	1	1	1	$\Psi(A) = 1$
B	1	1	0.4	$\Psi(B) = 0,8$
C	1	1	0	$\Psi(C) = 0,66$
D	0.9	0.9	0.9	$\Psi(D) = 0,9$

Ces ensembles flous entraînent que $A \succ D \succ B \succ D$ *: les alternatives B et C sont différenciées, et l'alternatives D est considérée comme "presque" égale à l'alternative A.*

L'introduction d'ensembles flous permet de gagner de la souplesse autour du seuil : le passage de "moins bon que le point de référence" à "meilleur que le point de référence" n'est plus brutal mais progressif. Montrons maintenant l'apport des préférences floues dans le cas où il y a plusieurs points de référence.

2.6.4 Plusieurs points de référence

Nous présentons dans cette partie l'introduction de préférences floues dans les modèles à points de référence présentés précédemment : en premier lieu, les règles finissant par la comparaison, puis les règles finissant par l'agrégation.

Cadre général des règles finissant par la comparaison

Le modèle général de relations de préférence suivant "agréger puis comparer" a été présenté à l'équation (2.7). L'adaptation du modèle (2.7) au cas de préférences floues donne l'équation suivante :

$$x \succsim y \iff \Psi(C(x,p^1),\ldots,C(x,p^m)) \geq \Psi(C(y,p^1),\ldots,C(y,p^m)) \qquad (2.19)$$

Dans ce modèle, le passage de données floues à des préférences nettes se fait à l'aide de la fonction d'agrégation Ψ : elle permet en effet d'obtenir un score pour x et pour y permettant de les comparer directement. Comme dans le cas des préférences nettes, nous étudions le cas où $\Psi(x) = \Psi(\phi(C_{\succsim}(x,p^1)),\ldots,\phi(C(x,p^n)))$: il s'agit d'obtenir un score pour x par rapport à chaque point de référence, puis d'agréger ces scores. Il existe de nombreuses fonctions d'agrégations Ψ : nous présentons ci-dessous trois de ces règles utilisant trois techniques d'agrégation de préférences floues : le minimax, la moyenne pondérée et l'intégrale de Choquet.

1. **Opérateurs basés sur le minimum et le maximum.** Ce sont des opérateurs du type minimax ou maximin. L'agrégation des valeurs de chaque critère est ici trop grossière pour être intéressante dans le cadre de nos applications. Le maximin consiste à prendre la valeur maximale sur les points de référence (resp. sur les critères) des valeurs minimales de $\succsim_j (x_j,p_j^j)$ obtenues par critère (resp. point de référence), suivant que l'opérateur d'agrégation est de catégorie 2 ou 3. Le minimax consiste à prendre la valeur minimale sur les points de référence (resp. sur les critères) des valeurs maximales de $\succsim_j (x_j,p_j^j)$ obtenues par critère (resp. point de référence), suivant que l'opérateur d'agrégation est de catégorie 2 ou 3. L'un comme l'autre de ces opérateurs privilégie les alternatives irrégulières (celle possédant un seul très bon critère par exemple) aux alternatives très régulières (celle dont aucune valeur n'est extrême), comme le montre l'exemple suivant :

   Exemple 45 *Prenons $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$, avec $\mathcal{X}_j = \{1,\ldots,10\}$ $(10 \succ \ldots \succ 1)$, et $p^1 = (7,7,7)$, $p^2 = (3,3,3)$. Prenons le tableau suivant. On pose à titre d'exemple minimax$(x) = \min_{p\in\mathcal{P}}(\max_{j\in N}(\succsim_j (x_j,p_j))$ et maximin$(x) = \max_{p\in\mathcal{P}}(\min_{j\in N}(\succsim_j (x_j,p_j))$. La fonction $\succsim$ considérée ici n'a pas d'importance : on ne considèrera que les valeurs 0 ou 1 pour l'exemple.*

x	x_1	x_2	x_3	$C_{\succsim}(x,p^1)$	$C(x,p^2)$	*minimax*	*maximin*
a	8	8	8	$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	1	1
b	5	5	5	$(0,0,0)$	$(1,1,1)$	0	1
c	2	2	2	$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	0	0
d	8	8	2	$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	1	0
e	8	2	2	$(1,0,0)$	$(1,0,0)$	1	0

L'opérateur minimax ne fait aucune différence entre les alternatives b et c, alors que l'une domine p^2 et que l'autre est dominée par p^2, ou encore entre a et e. L'opérateur maximin ne fait aucune différence entre a et b, alors que l'une domine p^1 et que l'autre est dominée par p^1, ou encore entre c et d. Cet exemple montre le caractère très frustre de ces opérateurs.

Nous n'étudierons donc pas plus avant les opérateurs de type minimax ou maximin.

2. **Opérateurs basés sur la moyenne pondérée.** Il s'agit de prendre comme score pour chacune des alternatives la moyenne des valeurs $\succsim_j (x_j, p^j_j)$, éventuellement pondérées par critère ou points de référence. Cette approche mérite d'être étudiée plus en détail. C'est ce que nous faisons dans la partie ci-dessous.

Utilisation de la moyenne

Les valeurs floues $\succsim_j (x_j, p_j)$ obtenues pour chaque alternative sont toutes comprises entre 0 et 1. Elles sont donc commensurables. Faire la moyenne de ces valeurs permet de comparer deux alternatives entre elles ; l'alternative qui a le plus de critères meilleurs que ceux des points de référence aura une meilleure moyenne que l'alternative qui en aura moins. Si l'on suppose que tous les critères et tous les points de référence jouent le même rôle, il suffit de prendre la moyenne. Sinon, il est nécessaire de s'intéresser à une moyenne pondérée sur les critères ou sur les points de référence. Dans la lignée des possibilités présentées au paragraphe 2.2, nous choisissons ici d'agréger les valeurs obtenues par critère puis par point de référence. L'équation (2.19) devient

$$x \succsim y \iff \sum_{p\in\mathcal{P}} \omega_p\Big(\sum_{j\in N} \lambda_j \succsim_j (x_j, p_j)\Big) \geq \sum_{p\in\mathcal{P}} \omega_p\Big(\sum_{j\in N} \lambda_j \succsim_j (y_j, p_j)\Big)$$

Illustrons cette règle par un exemple.

Exemple 46 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$, où $\mathcal{X}_j = [0, 10]$. Soient les alternatives suivantes :*

	1	2	3
a	8	7	2
b	8	6,5	2.5
c	8	2	6,5
d	5	5	5
p^1	7	7	7
p^2	3	3	3

Nous souhaitons graduer un peu de le passage de la non-préférence à la préférence, et nous choisissons par exemple comme fonction d'appartenance la fonction $\succsim (x_j, p_j)$ telle que

$$\succsim (x_j, p_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_j \leq p_j - 1 \\ \frac{p_j - x_j}{p_j - 1} \text{ si } p_j - 1 \leq x_j \leq p_j \\ 1 \text{ si } x_j \geq p_j \end{cases}$$

Supposons que le deuxième critère soit deux fois plus important que chacun des deux autres, autrement dit : $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$. Supposons que les deux points de référence aient la même importance, et donc $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$. La règle d'agrégation devient alors : $\Psi(x) = 0.5 \times (\succsim (x_1, p_1^1) + 2 \times \succsim (x_2, p_2^1) + \succsim (x_3, p_3^1)) + 0.5(\succsim (x_1, p_1^2) + 2 \times \succsim (x_2, p_2^2) + \succsim (x_3, p_3^2))$. Nous obtenons les scores suivants pour les alternatives considérées :

	$\succsim (x_1, p_1^1)$	$\succsim (x_2, p_2^1)$	$\succsim (x_3, p_3^1)$	$\succsim (x_1, p_1^2)$	$\succsim (x_2, p_2^2)$	$\succsim (x_3, p_3^2)$	Ψ
a	1	1	0	1	1	0	3
b	1	0.5	0	1	1	0.5	2.75
c	1	0	0.5	1	0	1	1.75
d	0	0.5	0	1	1	1	2.5

Ces scores aboutissent au classement suivant : $a \succ b \succ d \succ c$. Avec les mêmes poids, mais en l'absence d'ensemble flou, la relation de préférence aurait été $a \succ b \sim d \succ c$. Nous constatons donc que l'introduction des fonctions $\succsim_j (x_j, p_j)$ a permis de raffiner la relation de préférence étudiée.

Intégrale de Choquet

L'intégrale de Choquet permet de modéliser les interactions possibles entre les différents critères par une fonction d'agrégation non additive, comme présenté en 2.4.2. Nous avons vu dans le cas à un seul point de référence que pour tout $p \in \mathcal{P}$, pour tout $x \in \mathcal{X}$, nous pouvons définir une valeur $\Psi(C(x,p))C_\nu(x,p)$ où C_ν est une intégrale de Choquet. Il s'agit maintenant d'agréger les différentes valeurs obtenues $\Psi(C(x,p))$ obtenues pour chaque point de référence pour obtenir un score global pour l'alternative x. Il est bien sûr possible ici aussi d'utiliser une fonction d'agrégation de préférences floues telle qu'une intégrale de Choquet avec une mesure sur les parties de $\mathcal{P}$ afin d'agréger les valeurs $\Psi(C(x,p))$ en un ensemble flou représentant la comparaison de l'alternative x avec les points de référence. Cela aboutit à pouvoir considérer une relation $\succsim$ floue sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Cependant, nous pensons que cela s'effectue au prix d'une complexité accrue au niveau des calculs, complexité déraisonnable au vu de l'amélioration potentielle de la précision de la relation d'importance. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser une fonction d'agrégation permettant d'obtenir une valeur unique pour chaque alternative, ou, en d'autres termes, nous proposons de "défuzzifier" à ce stade. Nous montrons ci-dessous un exemple où la relation de préférence est obtenue à partir de fonctions Ψ qui sont des intégrales de Choquet, agrégées en une valeur unique par une fonction de type moyenne pondérée.

Exemple 47 *Reprenons l'exemple 46. Nous supposons, comme dans cet exemple, que* $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$. *Supposons de plus que le critère 2 est deux fois plus important que chacun des autres critères, mais que ceux-ci réunis possèdent une synergie positive telle que :* $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{1\}) = \mu(\{3\}) = 0.25$, $\mu(\{2\}) = 0.5$, $\mu(\{1,2\}) = 0.75$, $\mu(\{2,3\}) = 0.75$, $\mu(\{1,3\}) = 0.95$ *et* $\mu(\{1,2,3\}) = 1$.

Nous obtenons les scores suivants pour les alternatives considérées :

	$\succsim (x_1, p_1^1)$	$\succsim (x_2, p_2^1)$	$\succsim (x_3, p_3^1)$	$\succsim (x_1, p_1^2)$	$\succsim (x_2, p_2^2)$	$\succsim (x_3, p_3^2)$	$C(x)$
a	1	1	0	1	1	0	0.75
b	1	0.5	0	1	1	0.5	0.6875
c	1	0	0,5	1	0	1	0.7375
d	0	0.5	0	1	1	1	0.625

Les détails du calcul des $C(x)$ *figurent dans le tableau ci-dessous :*

	Ψ
a	$0.5 \times (0.75 \times 1) + 0.5 \times (0.75 \times 1) = 0.75$
b	$0.5 \times (0.75 \times 0.5 + 0.25 \times 0.5) + 0.5 \times (1 \times 0.5 + 0.75 \times 0.5) = 0.6875$
c	$0.5 \times (0.9 \times 0.5 + 0.25 \times 0.5) + 0.5 \times (0.9 \times 1) = 0.7$
d	$0.5 \times (0.5 \times 0.5) + 0.5 \times (1 \times 1) = 0.625$

On obtient alors la relation de préférence : $a \succ c \succ b \succ d$.

Cadre des règles finissant par l'agrégation

Le modèle général de relations de préférence suivant "comparer puis agréger" a été présenté à l'équation (2.11). L'adaptation du modèle (2.11) au cas de préférences floues donne l'équation suivante :

$$x \succsim y \iff C_\nu(\overset{\triangleright}{\succsim}_p (C(x,p), C(y,p)),\ p \in \mathcal{P}) \geq C_\nu(\overset{\triangleright}{\succsim}_p (C(y,p), C(x,p)),\ p \in \mathcal{P}) \quad (2.20)$$

Il s'agit de comparer point de référence par point de référence les deux alternatives, puis d'agréger ces comparaisons en une comparaison unique. Comme dans le cas où l'on finit par la comparaison (paragraphe ci-dessus), il faut d'abord d'agréger les valeurs $\succsim_j (x_j, p_j)$ afin d'obtenir une valeur floue pour $C(x,p)$ avec, par exemple, une intégrale de Choquet. Il faut ensuite comparer ces valeurs deux à deux, ce qui est immédiat et conduit donc à obtenir m relations de préférences $\stackrel{\triangleright}{\sim}_p (C(x,p), C(y,p))$ entre les deux alternatives. Il s'agit enfin d'agréger ces relations de préférence du point de vue de chaque point de référence, comme dans le cas net, en utilisant par exemple une capacité ou une lexicographie sur les points de référence. Comme dans le cas où l'on finit par la comparaison, l'intérêt d'obtenir une relation de préférence globale floue ne nous semble pas suffisant au regard de la complexité des règles étudiées. Nous proposons cependant l'étude des propriétés des relations de préférence globales floues comme piste de recherche ultérieure. Nous allons montrer sur un exemple comment peuvent se comporter des règles où l'on obtient des relations nettes par rapport à chaque point de référence. Nous présentons l'extension floue des règles lexicographiques présentées dans l'exemple 39.

Exemple 48 *Reprenons le cadre de l'exemple 39 : les alternatives sont décrites sur 4 critères, dont seul le premier (prix) est continu. Nous proposons donc de n'introduire une préférence floue que sur ce premier critère, en posant, pour* $x_1 \in [p_1, p_1+5]$, $\succsim_1 (x_1, p_1) = \frac{x_1 - p_1}{5}$. *Soient les alternatives* $x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathcal{X}$ *et les points de référence* p^1, p^2 *décrits par le tableau suivant :*

	1	2	3	4
x^1	60	$***$	B	$+$
x^2	62	$****$	C	$+$
x^3	80	$****$	B	$=$
x^4	73	$***$	A	$-$
p^1	60	$****$	A	$+$
p^2	70	$***$	B	$=$

Dans le cadre des comparaisons "nettes", nous obtenons les ensembles $X_1^i, X_2^i, X_3^i, X_4^i$ *suivants :*

	p_1	p_2
x^1	$X_1^1 = \{1,4\}$	$X_1^2 = \{1,2,3,4\}$
x^2	$X_2^1 = \{2,4\}$	$X_2^2 = \{1,2,4\}$
x^3	$X_3^1 = \{2\}$	$X_3^2 = \{2,3,4\}$
x^4	$X_4^1 = \{3\}$	$X_4^2 = \{2,3\}$

Dans le cadre des comparaisons "floues", nous obtenons les valeurs suivantes pour

$\succsim_j (x_j, p_j)$:

	$\succsim_1 (x,p^1)$	$\succsim_2 (x,p^1)$	$\succsim_3 (x,p^1)$	$\succsim_4 (x,p^1)$	$\succsim_1 (x,p^2)$	$\succsim_2 (x,p^2)$	$\succsim_3 (x,p^2)$	$\succsim_4 (x,p^2)$
x^1	1	0	0	1	1	1	1	1)
x^2	0.6	1	0	1	1	1	0	1
x^3	0	1	0	0	0	1	1	1
x^4	0.2	0	1	0	0	1	1	0

Supposons que tous les critères soient équivalents. Dans le cas "net", nous avons :

- $x_1 \succ x_2$ *car :*
  1. $|X_1^1| = |X_2^1| \Rightarrow x_1 \sim^{p_1} x_2$
  2. $|X_1^2| > |X_2^2| \Rightarrow x_1 \succ^{p_2} x_2$
- $x_3 \succ x_4$ *car :*
  1. $|X_3^1| = |X_4^1| \Rightarrow x_3 \sim^{p_1} x_4$
  2. $|X_3^2| > |X_4^2| \Rightarrow x_3 \succ^{p_2} x_4$

Dans le cas "flou", nous avons, en prenant une capacité additive simple, $\Psi(x,p) = \sum_j \succsim_j (x_j, p_j)$*, ce qui entraîne :*

- *Pour* x_1 *et* x_2 *:*
  1. $\Psi(x_1, p^1) = 2 < \Psi(x_2, p^1) = 2,6 \Rightarrow x_1 \prec^{p_1} x_2$
  2. $\Psi(x_1, p^2) = 4 > \Psi(x, p^2) = 3 \Rightarrow x_1 \succ^{p_2} x_2$
- *Pour* x_3 *et* x_4 *:*
  1. $\Psi(x_3, p^1) = 1 < \Psi(x_4, p^1) = 1,2 \Rightarrow x_3 \prec^{p_1} x_4$
  2. $\Psi(x_3, p^2) = 3 < \Psi(x_4, p^2) = 2 \Rightarrow x_3 \succ^{p_2} x_4$

Nous obtenons alors la conclusion suivante :

- *si l'ordre lexicographique est* p_1 *puis* p_2*, alors* $x_2 \succ x_1$ *et* $x_4 \succ x_3$.
- *si l'ordre lexicographique est* p_2 *puis* p_1*, alors* $x_1 \succ x_2$ *et* $x_3 \succ x_4$.

2.7 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre montré l'intérêt de l'introduction de points de référence en décision multicritère ordinale. Les différents modèles proposés permettent de décrire naturellement des relations de préférence à partir des points de référence. En particulier, nous avons proposé deux approches principales (ca/CA et ca/AC) pour agréger les informations contenues dans les alternatives et les points de référence en une relation de préférence globale. Ces deux approches contiennent chacune des règles d'agrégation originales utilisant des modèles très récents (capacités et k-capacités) ou plus anciens (lexicographie). Dans le cas où la relation de préférence $\succsim$ est transitive, il est intéressant de noter que les deux approches permettent d'interpréter l'utilisation des points de référence de manières différentes. D'un côté, les points de référence permettent d'associer un score à chaque alternative, basé sur une fonction, additivement décomposable ou non, des ensembles de critères où l'alternative est considérée comme meilleure que les points de référence. On considère alors la valeur intrinsèque de chaque alternative, comparativement à des références pré-établies, pour obtenir une préférence globale. D'un autre côté, l'utilisation des points de référence pour obtenir des relations de préférence partielles (du point de vue de chaque point de référence) entre deux alternatives mène au dépassement du théorème d'Arrow par le déplacement du niveau d'agrégation : dans ce cas il n'y a pas de critère dictateur, mais un point de référence dictateur, ou même une lexicographie de points de référence, ce qui apparaît comme plus naturel. Nous proposons au chapitre 4 des applications concrètes de ces règles d'agrégation.

Les correspondances existantes entre le cadre de la décision multicritère et celui la décision dans l'incertain amènent naturellement à envisager d'étudier, à l'instar de ce qui a été fait ici pour la décision multicritère, l'introduction de points de référence dans les modèles pour la décision dans l'incertain.

Chapitre 3

Niveaux de référence en décision dans l'incertain [1]

Résumé. De la même manière que nous avons étudié l'apport des points de référence dans le domaine de la décision multicritère, nous nous proposons d'examiner ici l'utilisation de points de référence dans la comparaison d'actes au sens de Savage. Après avoir rappelé l'axiomatique de Savage (1954) pour la décision dans l'incertain, nous présentons un modèle général utilisant les niveaux de référence. Dans une deuxième partie, nous étudions la caractérisation axiomatique de ce modèle général, en particulier dans les cas où la relation de préférence est transitive ou quasi-transitive. Dans une troisième partie, nous étudions les liens entretenus par le modèle exposé avec d'autres modèles de la décision dans l'incertain, et en particulier avec le cas des relations de concordances, le cas possibiliste, et le cas des relations utilisant l'intégrale de Sugeno.

[1] Ce chapitre s'appuie en partie sur les travaux présentés dans Perny et Rolland (2006).

De la même manière que nous avons étudié l'apport des points de référence dans le domaine de la décision multicritère, nous nous proposons d'examiner ici l'utilisation de points de référence dans la comparaison d'actes au sens de Savage. En particulier, nous étudions l'apport de niveaux de référence dans le cadre de la théorie de la décision qualitative dans l'incertain. Il s'agit, comme proposé à plusieurs reprises en piste de recherche (Fargier et Perny (2000), Bouyssou et al. (2006)), d'étudier dans le cadre de l'axiomatique de Savage adaptée au cas de l'incertain ordinal l'introduction de niveaux de référence afin de comparer les actes non pas deux à deux mais par l'intermédiaire d'une partie tierce.

De manière analogue au cadre de la décision multicritère, nous proposons de noter r un niveau de référence sur l'espace des conséquences, $\mathcal{R}$ l'ensemble des niveaux de référence, et $F_r = \{s \in S, f(s) \succsim_X r\}$ l'ensemble des états de la nature où l'acte f conduit à obtenir une conséquence au moins aussi bonne que r. Avec ces notations, le modèle général de relation de préférence que nous proposons, noté MINR (modèle de préférence dans l'incertain avec niveaux de référence), se formalise de la façon suivante :

$$f \succsim g \iff \Psi(F_{r_1}, \ldots, F_{r_q}, G_{r_1}, \ldots, G_{r_q}) \geq 0 \tag{3.1}$$

où Ψ est une fonction d'ensemble à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemple 49 *A titre d'illustration, la règle suivante, de type "dominance possibiliste" suit le modèle général 3.1 :*

$$x \succsim y \iff \forall r \in \mathcal{R}, F_r \succsim_\Lambda G_r$$

avec

$$F_r \succsim_\Lambda G_r \iff \Pi(\{s \in S, f(s) \succsim_X r\}) - \Pi(\{s \in S, g(s) \succsim_X r\}) \geq 0$$

où Π *est une mesure de possibilité sur l'ensemble des états de la nature. La fonction* Ψ *est alors la fonction qui à* $(F_{r_1}, \ldots, F_{r_q}, G_{r_1}, \ldots, G_{r_q})$ *associe* $\Pi(\{s \in S, f(s) \succsim_X r\}) - \Pi(\{s \in S, g(s) \succsim_X r\})$.

3.1 Cadre axiomatique des relations avec niveaux de référence

Nous présentons dans cette partie la caractérisation axiomatique des relations de préférence vérifiant le modèle fondamental à niveaux de référence MINR présenté en équation (3.1). Il s'agit de proposer un corpus d'axiomes tel que toute relation vérifiant ces axiomes vérifie le modèle MINR. Par la suite, nous affinerons ce modèle en proposant des caractérisations axiomatiques conduisant à des modèles particuliers. Nous plaçons ici nos travaux dans le cadre de la théorie de la décision axiomatisée par Savage comme décrite en partie 1.3 : S est l'ensemble (fini) des états de la nature, X est l'ensemble des conséquences possibles, $\mathcal{A} = X^S$ est l'ensemble des actes potentiels, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : S \to X$, et $\succsim$ est une relation de préférence sur $\mathcal{A}$. Sous certains axiomes détaillés ci- dessous, la relation de préférence sur les actes induit une relation de préférence sur les conséquences $\succsim_X$ définie par $x \succsim_X y \iff f_x \succsim f_y$, où f_x est l'acte constant tel que $\forall s \in S,\ f_x(s) = x$.

3.1.1 Axiomatique de Savage et points de référence

Nous présentons dans cette partie les axiomes fondamentaux introduits par Savage (1954) pour caractériser le modèle de l'utilité espérée. Pour chacun d'entre eux, nous indiquons en commentaire s'il est encore valide dans le cadre de la décision dans l'incertain avec points de référence et, le cas échéant, nous proposons alors un axiome adapaté.

Dans le cadre originel, Savage suppose que les préférences du décideur possèdent une structure de pré-ordre total. C'est l'axiome P1.

Axiome P1 : $\succsim$ est un pré-ordre complet sur $\mathcal{A}$, i.e., $\succsim$ est réflexive, complète et transitive.

Afin d'étudier des relations qui ne sont pas transitives, nous introduisons également ici une version affaiblie de cet axiome, qui ne suppose plus la transitivité, mais simplement la quasi-transitivité. C'est l'axiome WP1.

Axiome WP1 : $\succsim$ est réflexive, quasi-transitive et sa restriction aux actes constants est un ordre complet. Les préférences du décideur étant supposées vérifier WP1, elles induisent donc un ordre complet $\succsim_X$ sur l'espace des conséquences par :

$$\forall x, y \in X, \quad (x \succsim_X y \iff f_x \succsim f_y) \tag{3.2}$$

Nous supposerons par la suite que l'axiome WP1 est vérifié par la relation de préférence $\succsim$. Nous étudierons dans la partie 3.2.1 les relations de préférence transitives, c'est-à-dire qui satisfont l'axiome P1.

Le deuxième axiome de Savage est connu sous le nom de "principe de la chose sûre" (Sure-Thing Principle, ou STP). Il signifie que les préférences entre deux actes ne dépendent pas des états où les conséquences de ces deux actes sont identiques.

Axiome P2 (ou STP) : $\forall f, g, h, h' \in \mathcal{A}, \forall A \subseteq S$,

$$fAh \succsim gAh \iff fAh' \succsim gAh'$$

Cet axiome n'est pas toujours vérifié par les relations de préférence observées en pratique, comme nous l'avons indiqué dans l'exemple 13 du chapitre 1 avec les boules de couleurs d'Ellsberg. En particulier, les relations de préférence avec points de référence ne vérifient pas l'axiome P2 comme indiqué au paragraphe 1.4.4.

Savage introduit ensuite l'axiome P3, qui garantit que la définition de $\succsim_X$ vue ci-dessus induit une relation cohérente sur X, en demandant à ce que la préférence d'une conséquence sur une autre joue toujours dans le même sens dans la comparaison de deux actes.

Axiome P3 : $\forall A \subseteq S, \forall h \in \mathcal{A}$, $\forall x, y \in X$,

$$x \succsim_X y \iff f_x A h \succsim f_y A h$$

la préférence stricte d'une conséquence sur l'autre ($x \succ_X y$) n'est pas toujours suffisante pour justifier une préférence du type $f_x A h \succ f_y A h$. Par exemple, si A est un événement très peu probable, on peut tout à fait avoir $f_x A h \sim f_y A h$ pour un h, même si $x \succ_X y$. Cependant, un retournement complet de préférence ($x \succ_X y$ et $f_x A h \prec f_y A h$) serait incohérent avec une définition de $\succsim_X$, d'où l'axiome WP3 présenté ci-dessous.

Axiome WP3 : $\forall A \subseteq S, \forall h \in \mathcal{A}$, $(x \succ_X y \Rightarrow f_x A h \succsim f_y A h)$

Cet axiome est fondamental pour pouvoir établir un lien entre une relation de préférence sur les conséquences et une relation de préférence sur les actes, comme nous le verrons en partie 3.1.2. En effet, si les préférences sur les conséquences sont telles que $x \succ_X y$, alors il est logique de penser que le décideur ne préférera pas l'acte qui donne comme conséquence y à l'acte qui donne comme conséquence x. En outre, l'axiome WP3 sera utile pour la caractérisation des préférences transitives que nous détaillerons en partie 3.2.1.

Le quatrième axiome P4 est introduit par Savage pour révéler une relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ sur les ensembles d'événements à partir de la relation $\succsim$. L'axiome s'écrit de la manière suivante :

Axiome P4 : $\forall A, B \subseteq S, \forall x, y, x', y' \in X : x \succ_X y$ et $x' \succ_X y'$,

$$xAy \succsim xBy \iff x'Ay' \succsim x'By'$$

Sous l'hypothèse que P4 est vérifié, on peut révéler une relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ sur l'ensemble des événements 2^S par

$$\forall A, B \subseteq S,\ A \succsim_\Lambda B \iff \exists x, y \in X,\ x \succ_X y \text{ and } xAy \succsim xBy \tag{3.3}$$

Nous verrons en partie 3.1.3 que l'axiome P4 est vérifié dans le cadre de nos travaux, car il est contenu dans la combinaison des axiomes fondamentaux indiquant la présence de niveaux de référence dans les relations de préférence.

Le cinquième axiome introduit par Savage demande simplement que les préférences sur les actes constants ne soient pas triviales.

Axiome P5 : $\exists, x, y \in X$ tels que $f_x \succ f_y$ (i.e. $x \succ_X y$). Nous introduisons ici une version renforcée de l'axiome P5 demandant que la relation $\succsim$ soit plus riche :

Axiome SP5 : $\exists, x, y, z, w \in X$ tels que $f_x \succ f_y \succ f_z \succ f_w$
Les axiomes P5 et SP5 indiquent simplement que la relation de préférence sur les conséquences est suffisamment riche en actes constants pour que son étude présente un intérêt : si l'axiome P5 n'est pas vérifié, cela indique que toutes les conséquences sont équivalentes : la recherche d'une préférence n'a alors pas de sens. L'axiome SP5 indique lui qu'il existe au moins 4 niveaux différents sur les conséquences. Cela implique qu'il existe au moins trois niveaux de référence différents. Cet axiome est important en particulier dans le cas où la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de relations de préférence partielles vis-à-vis de niveaux de référence (cf infra partie 3.2.1). Dans ce cas-là, s'il y a moins de 3 niveaux (c'est à dire un ou deux), il y a alors moins de trois relations de préférence vis-à-vis des niveaux de référence à agréger, ce qui ne pose pas de problème particulier. Dans la suite de notre étude, nous travaillerons principalement sur des situations avec strictement plus de deux niveaux de référence, ce qui signifie au moins quatre niveaux distincts sur les conséquences, ce que spécifie SP5.

3.1.2 Niveaux de référence en décision dans l'incertain : modèle de base

Introduction des niveaux de référence

Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $\mathcal{A}$. Si $\succsim$ vérifie WP1, P3 et P5, alors $\sim_X$, partie symétrique de la relation $\succsim_X$ sur X est une relation d'équivalence possédant au moins deux classes. Supposons qu'il existe $q+1$ classes d'équivalence distinctes ($1 \leq q < |X|$) sur X pour la relation $\succsim_X$. Soit r_i un élément de X représentant la classe i, de telle manière que $f_{r_i} \succ_X f_{r_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, q$. L'ensemble de tous les représentants des classes (hormis la plus basse) est noté $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_q\}$ et représente l'ensemble des éléments séparant les différents niveaux de X. Nous définissons les *événements de référence* de la manière suivante :

$$\forall r \in \mathcal{R}, F_r = \{s \in S, f(s) \succsim_X r\} \tag{3.4}$$

Pour les actes $g, h, \ldots$, nous utiliserons respectivement les notations $G_r, H_r, \ldots$ Afin de simplifier les notations, l'événement F_{r_k} sera noté F_k, pour $k = 1, \ldots, q$. Il est à noter que dans un cadre prescriptif, ces niveaux peuvent être indiqués par le décideur.

Introduisons maintenant un axiome spécifique indiquant que les préférences sur les actes ne dépendent pas des positions respectives de leurs conséquences sur chaque état, mais de positions de leurs conséquences relativement à ces *niveaux de référence*. Cet axiome est la contrepartie dans l'incertain de l'axiome IC$\mathcal{P}$ dans le multicritère proposé dans la partie 2.1.1.

Axiome de dépendance vis-à-vis des niveaux de référence (DNR)
$\forall f, g, f', g' \in \mathcal{A}$,

$$\left.\begin{array}{l} \forall r \in \mathcal{R}, \quad F_r = F'_r \\ \forall r \in \mathcal{R}, \quad G_r = G'_r \end{array}\right\} \Rightarrow [f \succsim g \iff f' \succsim g']$$

L'axiome DNR spécifie que la préférence entre deux actes ne dépend que de la position respective de leurs conséquences (pour chaque état) par rapport aux niveaux de référence de $\mathcal{R}$. Nous pouvons alors caractériser le modèle de relations de préférence dans l'incertain avec niveaux de référence présenté en MINR comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 5 *Sous WP1, P3 et P5,*
$\succsim$ *vérifie DNR* $\iff$ $\succsim$ *satisfait le modèle (MINR)*

Preuve de la proposition 5
($\Rightarrow$) Soit une relation $\succsim$ vérifiant l'axiome DNR. Définissons une relation Ψ de $(2^S)^{(2q)}$ vers $\{-1, 0, 1\}$ par :

$$\begin{cases} f \succ g \Rightarrow \Psi(F_1, \dots F_q, G_1, \dots G_q) = 1 \\ f \sim g \Rightarrow \Psi(F_1, \dots F_q, G_1, \dots G_q) = 0 \\ f \prec g \Rightarrow \Psi(F_1, \dots F_q, G_1, \dots G_q) = -1 \end{cases}$$

Montrons que la relation Ψ ainsi définie est bien une fonction univoque de $(2^S)^{(2q)}$ vers $\{-1, 0, 1\}$. Soient $f, g \in X$ tels que $\forall r \in \mathcal{R}$, $F_r = F'_r$ et $G_r = G'_r$. Si $f \succsim g$, alors par DNR $f' \succsim g'$, ce qui montre que l'élément $(F_1, \dots F_q, G_1, \dots G_q)$ de $(2^S)^{(2q)}$ possède une image et une seule dans $\{-1, 0, 1\}$ par la relation Ψ. Ψ est donc bien une fonction de $(2^S)^{(2q)}$ vers $\{-1, 0, 1\}$, ce qui montre que le modèle MINR est vérifié par $\succsim$.
($\Leftarrow$) : Supposons que $\succsim$ vérifie le modèle MINR. Soient $f, f', g, g' \in \mathcal{A}$ tels que $\forall r \in \mathcal{R}$, $F_r = F'_r$ et $G_r = G'_r$. Alors si $f \succsim g$, cela signifie que $\Psi(F_1, \dots, F_q, G_1, \dots, G_q) \geq 0$ et donc que $\Psi(F'_1, \dots, F'_q, G'_1, \dots, G'_q) \geq 0$ ce qui entraîne $f' \succsim g'$. □

La relation de préférence sur les actes permet également d'établir une relation de vraisemblance relative sur l'espace des événements à partir d'actes particuliers, que nous appelons actes binaires par rapport à un niveau de référence. Un acte binaire par rapport à un niveau de référence r_i est un acte f tel que $F_{r_i} = A$, $F_{r_{i+1}} = S$ et $F_{r_{i-1}} = \emptyset$, comme représenté à la figure 3.1.

On peut déduire une relation de vraisemblance sur l'espace des événements par la comparaison des conséquences de deux actes binaires f et g par rapport à un niveau de référence. Une relation de vraisemblance relative $\succsim_\Lambda$ sur les ensembles d'événements $\Lambda = 2^S$ peut être obtenue à partir de $\succsim$ en posant, pour tout $A, B \subseteq S$:

$$A \succsim_\Lambda B \iff \exists f, g \in \mathcal{A}, \exists r \in \mathcal{R}, \begin{cases} F_r = A, G_r = B \\ \forall t \in \mathcal{R} - \{r\}, \; F_t = G_t \\ f \succsim g \end{cases} \tag{3.5}$$

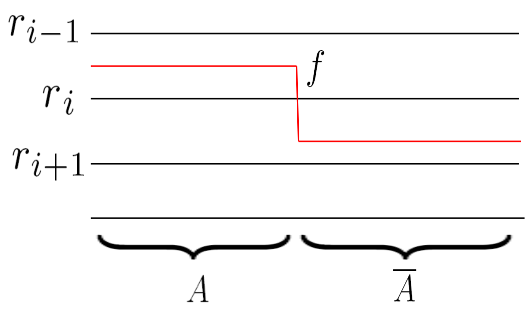

FIG. 3.1 – Exemple d'acte binaire

Une telle construction n'a de sens que s'il n'existe pas de paires d'actes antagonistes (f, g) et (f', g') qui induisent respectivement $A \succsim_\Lambda B$ et $B \succ_\Lambda A$ à partir de l'équation (3.5). Il est à noter que DNR n'empêche pas l'existence de paires antagonistes comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 50 *Supposons que $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et considérons x, y, z 3 conséquences de X telles que $x \succ_X y \succ_X z$. Considérons deux niveaux de référence $r_1 = x$, $r_2 = y$ et quatre actes $f, g, f', g' \in \mathcal{A}$ tels que :*

	s_1	s_2	s_3	s_4
f	x	y	y	z
g	x	y	z	y
f'	y	x	y	z
g'	y	x	z	y

Nous avons $F_1 = G_1 = \{s_1\}$, $F'_1 = G'_1 = \{s_2\}$, $F_2 = F'_2 = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $G_2 = G'_2 = \{s_1, s_2, s_4\}$. Si $f \succ g$, alors par (3.5), $\{s_1, s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_2, s_4\}$. Si $g' \succ f'$, ce qui est compatible avec DNR on a alors par (3.5), $\{s_1, s_2, s_4\} \succ_\Lambda \{s_1, s_2, s_3\}$, ce qui introduit une contradiction dans la définition de la relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$.

L'axiome SNR proposé ci-dessous empêche l'existence de paires antagonistes, quels que soient les niveaux de référence considérés, afin de pouvoir définir une relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ unique sur tous les niveaux de référence.

Axiome de séparabilité vis-à-vis des niveaux de référence (SNR)
$\forall f, g, f', g' \in \mathcal{A}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$,

$$\left.\begin{array}{r} F_i = F'_j, \quad G_i = G'_j \\ \forall k \neq i, F_k = G_k \\ \forall k \neq j, F'_k = G'_k \end{array}\right\} \Rightarrow [f \succsim g \iff f' \succsim g']$$

Supposons que deux sous-ensembles de S, A et B sont tels qu'il existe $f, g \in X$ tels que $\exists r \in \mathcal{R}$, $F_r = A$, $G_r = B$ et $\forall p \neq r$, $F_p = G_p$. Supposons que $f \succsim g$. D'après l'équation (3.5), cela signifie que $A \succsim_\Lambda B$. Supposons qu'il existe $f', g' \in X$ tels que $\exists r' \in \mathcal{R}$, $F'_{r'} = A$, $G'_{r'} = B$ et $\forall p \neq r'$, $F'_p = G'_p$. L'axiome SNR implique alors que $f' \succsim g'$, ce montre qu'il n'y a pas de contradiction possible dans la définition de la relation $\succsim_\Lambda$ par l'équation (3.5).

A partir de la relation de préférence sur les actes, nous avons donc déduit :

- une relation de préférence sur les conséquences $\succsim_X$ à partir des actes constants en équation (3.2),
- une relation de vraisemblance sur les événements $\succsim_\Lambda$ à partir d'actes binaires en équation (3.5).

La relation de vraisemblance sur les événements $\succsim_\Lambda$ va nous permettre de définir des relations de préférence partielles vis-à-vis de chaque niveau de référence comme indiqué en partie 3.1.3. L'axiome SNR nous permet donc de décomposer la relation $\succsim$ en plusieurs relations de préférence dépendant des ensembles $F_1, \dots F_n$ et $G_1, \dots G_n$. Cependant, l'axiome SNR ne garantit pas que le processus de décomposition se fait sans perte d'information. En particulier il n'est pas forcément possible de retrouver la relation de préférence originelle $\succsim$ à partir des relations partielles vis-à-vis des niveaux de référence. En effet, l'axiome SNR n'implique pas l'axiome DNRṄous présentons donc dans la partie suivante les conditions axiomatiques pour que la relation de préférence $\succsim$ puisse s'obtenir par recomposition des relations partielles.

3.1.3 Préférences partielles vis-à-vis de niveaux de référence

Le modèle MINR de relations de préférence utilisant des niveaux de référence est un modèle très général. Il présente des variantes intéressantes en fonction des propriétés de la fonction Ψ. En particulier, on peut s'inspirer des règles de concordance généralisées (Dubois et al. (2003b)) dans le domaine de la décision multicritère pour proposer un modèle de préférences ordinales basées sur l'utilisation de niveaux de référence. Précisément, ces règles sont basées sur le fait que les préférences entre deux actes ne dépendent que de la position relative de ces actes dans les q relations de préférence vis-à-vis des niveaux de référence.

Pour définir explicitement ce type de règles, il nous faut au préalable introduire des relations de préférence ordinales du point de vue de chaque niveau de référence $\succsim^r$, ce que nous faisons de la façon suivante : pour tout acte $f \in \mathcal{A}$ et tout niveau de référence $r \in \mathcal{R}$, on peut établir l'ensemble des événements où la conséquence de f est préférée au niveau de référence r, noté $F_r = \{s \in S, f(s) \succsim_X r\}$. La relation $\succsim_\Lambda$ permet alors de comparer la vraisemblance relative de deux ensembles d'événements liés à deux actes, pour un même niveau de référence. Autrement dit, on définit une relation de préférence particulière $\succsim^r$ sur les actes par :

$$f \succsim^r g \text{ si } F_r \succsim_\Lambda G_r \tag{3.6}$$

On peut alors définir formellement un modèle pour les relations de préférence pouvant être obtenues par agrégation des profils $(\succsim^{r_1}, \ldots, \succsim^{r_q})$, inspiré par les relations de concordance :

$$f \succsim g \iff \{r, f \succsim^r g\} \succsim_\mathcal{R} \{r, g \succsim^r f\} \tag{3.7}$$

où $\succsim_\mathcal{R}$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de $\mathcal{R}$.

Pour signifier explicitement que la relation $\succsim$ ne dépend que de la position relative des actes dans les q relations de préférence vis-à-vis des niveaux de référence, nous introduisons un axiome d'invariance ordinale vis-à-vis des préférences basées sur les niveaux de référence, IONR, que nous présentons ci dessous :

Axiome d'invariance ordinale vis-à-vis des niveaux de référence (IONR)
$\forall f, g, f', g' \in \mathcal{A}$:

$$\forall r \in \mathcal{R}, \left.\begin{array}{c} f \succsim^r g \iff f' \succsim^r g' \\ g \succsim^r f \iff g' \succsim^r f' \end{array}\right\} \Rightarrow [f \succsim g \iff f' \succsim g']$$

Cet axiome est la transposition aux préférences basées sur les niveaux de référence de l'axiome d'invariance ordinale proposé dans Dubois et al. (2003a) pour caractériser les règles de dominance. En l'absence de l'axiome IONR, rien ne garantit que les préférences entre deux actes f et g ne dépendent que de l'état des relations $\succsim^{r_j}, j = 1, \ldots, q$ sur la paire (f, g), comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 51 *Soient x, y, z, w quatre conséquences de X telles que $x \succ_X y \succ_X z \succ_X w$. Soient x, y et z trois niveaux de référence, et f, g, f', g' quatre actes de $\mathcal{A}$ tels que :*

	s_1	s_2	s_3
f	x	y	w
g	y	y	z
f'	x	w	w
g'	y	z	z

Supposons que les croyances du décideur à propos des événements possibles sont telles que $A \succsim_\Lambda B \iff |A| \geq |B|$. *Nous avons alors* $f \succ^x g$, $f \sim^y g$, $f \prec^z g$ *et* $f' \succ^x g'$, $f' \sim^y g'$, $f' \prec^z g'$. *Supposons que les préférences du décideur sont telles que* $f \succ g$ *et* $g' \succ f'$. *Cela ne rentre pas en contradiction avec l'axiome SNR puisque nous n'avons ni* $F_y = F'_y$, *ni* $G_y = G'_y$. *Aucune information dans le profil* $(\succsim^x, \succsim^y, \succsim^z)$ *ne peut alors expliquer le statut différent des paires* (f, g) *et* (f', g') *pour la relation* $\succsim$. *L'axiome IONR empêche précisément ce type de situation. En fait, cet axiome prévient les situations où une préférence entre deux actes dépend d'autres actes de* $\mathcal{A}$, *ce qui est une idée proche de l'axiome d'indépendance vis-à-vis des alternatives tierce d'Arrow.*

Les axiomes SNR et IONR caractérisent exactement les relations définies par l'équation (3.7), comme l'indique le théorème ci-dessous :

Théorème 12 *La relation de préférence* $\succsim$ *sur* $\mathcal{A}$ *satisfait les axiomes SNR et IONR si et seulement si il existe une relation d'importance* $\succsim_\mathcal{R}$ *définie sur* $2^\mathcal{R}$ *telle que :*

$$f \succsim g \iff \{r \in \mathcal{R}, f \succsim^r g\} \succsim_\mathcal{R} \{r \in \mathcal{R}, g \succsim^r f\} \tag{3.8}$$

La relation $\succsim_\mathcal{R}$ reflète l'importance relative donnée aux ensembles de conséquences de référence par le décideur. La règle à base de niveaux de référence donnée par l'équation (3.8) ressemble à une règle de dominance de vraisemblance, proposée par Dubois et al. (1997), Fargier et Perny (1999) et Dubois et al. (2003a). Cette règle stipule que :

$$f \succsim g \iff \{s \in S, f(s) \succsim_X g(s)\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \succsim_X f(s)\}$$

Dans (3.8), ce sont les niveaux de référence qui jouent le rôle des états. La règle de dominance de vraisemblance est la contrepartie dans l'incertain de la règle de concordance dans l'environnement multicritère : on préfère l'acte f à l'acte g s'il est plus vraisemblable d'obtenir une meilleure conséquence avec f qu'avec g. En appliquant cette règle aux relations dépendant des niveaux de référence $\succsim^r$ à la place des relations dépendant des états $\succsim_s$, on obtient bien la relation proposée au théorème 12.

Preuve du théorème 12

($\Rightarrow$) Grâce à l'axiome SNR, une relation d'importance $\succsim_\Lambda$ sur les sous-ensembles de S peut être obtenue à partir de la relation $\succsim$ (cf équation 3.5). Nous pouvons ensuite définir une relation $\succsim_\mathcal{R}$ sur les sous-ensembles de $\mathcal{R}$ comme suit : considérons Q et Q' deux sous-ensembles de $\mathcal{R}$:

$$Q \succsim_\mathcal{R} Q' \iff \exists f, g \in \mathcal{A}, \begin{cases} Q = \{r \in \mathcal{R}, F_r \succsim_\Lambda G_r\} \\ Q' = \{r \in \mathcal{R}, G_r \succsim_\Lambda F_r\} \\ f \succsim g \end{cases}$$

Supposons qu'il existe deux couples de $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ f,g et f',g' tels que $Q=\{r\in\mathcal{R},F_r\succsim_\Lambda G_r\}=\{r\in\mathcal{R},F'_r\succsim_\Lambda G'_r\}$ et $Q'=\{r\in\mathcal{R},G_r\succsim_\Lambda F_r\}=\{r\in\mathcal{R},G'_r\succsim_\Lambda F'_r\}$. Grâce à l'axiome IONR, nous avons $f\succsim g \iff f'\succsim g'$, ce qui montre que la relation $\succsim_\mathcal{R}$ est définie de manière cohérente : nous ne pouvons pas avoir $Q\succsim_\mathcal{R} Q'$ avec une paire (f,g) et $Q\prec_\mathcal{R} Q'$ avec une autre paire (f',g').
($\Leftarrow$) par construction, les axiomes SNR et IONR sont naturellement vérifiés si la relation $\succsim$ vérifie l'équation 3.7. □

Remarques

- l'axiome WP3 n'est pas formellement nécessaire à l'établissement du théorème 12. Cependant, il est naturel d'interpréter les résultats obtenus en considérant qu'il est vérifié. En effet, un retournement complet de préférence ($x\succ_X y$ et $f_xAh\prec f_yAh$) serait incohérent avec une définition de $\succsim_X$.
- la combinaison des axiomes SNR, IONR et WP3 implique alors une propriété de monotonie stricte, ainsi que l'axiome P4 comme indiqué dans les propositions 6 et 7 ci-dessous.

Définissons la propriété de monotonie stricte de la façon suivante :

Axiome MON : Monotonie stricte
La relation de préférence $\succsim$, vérifiant les axiomes SNR et IONR est dite monotone stricte si $\forall f,g\in\mathcal{A}$:

$$\left.\begin{array}{r}\forall r\in\mathcal{R}, f\succsim^r g\\ \exists r^*\in\mathcal{R}, f\succ^{r^*} g\end{array}\right\}\Rightarrow f\succ g$$

Cette propriété de monotonie de $\succsim$ est obtenue à partir de l'axiome WP3 comme l'indique la proposition 6.

Proposition 6 *Si SNR et IONR sont vérifiés, alors WP3 $\Rightarrow$ MON*

Preuve de la proposition 6 Soient deux niveaux de référence $r_i,r_{i+1}\in\mathcal{R}$. Par définition, $r_i\succsim_X r_{i+1}$. En prenant $A=\emptyset$ dans la définition de WP3, nous voyons que $f_{r_i}\succsim f_{r_{i+1}}$. Les niveaux de référence étant des représentants de classes d'équivalence, on ne peut avoir, par définition, $f_{r_i}\sim f_{r_{i+1}}$. Nous avons donc $f_{r_i}\succ f_{r_{i+1}}$. De même, par construction, $\{s,f_{r_i}(s)\succsim_X r_i\}=S$, $\{s,f_{r_{i+1}}(s)\succsim_X r_i\}=\emptyset$ et pour tout $r\neq r_i$, $\{s,f_{r_i}(s)\succsim_X r\}=\{s,f_{r_{i+1}}(s)\succsim_X r\}$. Donc $\forall r\in\mathcal{R}-\{r_i\}$, $f_{r_i}\sim^r f_{r_{i+1}}$. Supposons que $f_{r_i}\sim^{r_i} f_{r_{i+1}}$. Alors $\forall r\in\mathcal{R}$, $f_{r_i}\sim^r f_{r_{i+1}}$ et par SNR, nous aurions alors $f_{r_i}\sim f_{r_{I+1}}$. Comme ce n'est pas le cas, cela signifie que $f_{r_i}\succ^{r_i} f_{r_{i+1}}$. Le couple $(f_{r_i},f_{r_{i+1}})$ est donc tel que $\forall r\in\mathcal{R}, f_{r_i}\succsim^r f_{r_{i+1}}$, $f_{r_i}\succ^{r_i} f_{r_{i+1}}$ et $f_{r_i}\succ f_{r_{i+1}}$. L'axiome IONR stipule alors que c'est le cas pour tout autre couple (f,g) dans la même situation, et donc, pour tout $f,g\in\mathcal{A}$, $\forall r\in\mathcal{R}, f\succsim^r g$ et $f\succ^{r_i} g\Rightarrow f\succ g$. Ceci étant valable pour tout $r_i\in\mathcal{R}$ montre que la propriété MON est vérifiée. □

L'axiome P4 est alors lui aussi obtenu à partir des axiomes SNR et IONR comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 7

$$(SNR, IONR \text{ et } WP3) \Rightarrow P4$$

Preuve de la proposition 7 : Soient $x, y, x', y' \in X$ tels que $x \succ_X y$ et $x' \succ_X y'$. Comme les niveaux de référence sont des représentants de chaque classe d'équivalence de $\sim_X$, cela signifie qu'il y a au moins un niveau de référence r tel que $x \succsim_X r \succ_X y$ et au moins un niveau de référence r' tel que $x' \succsim_X r' \succ_X y'$. Soient A, B deux sous-ensembles de S. Considérons les fonctions $a = xAy$, $b = xBy$, $a' = x'Ay'$ et $b' = x'By'$. Nous avons alors, $\forall r \in \mathcal{R}$,

$$\{s, a(s) \succsim_X r\} = \begin{cases} \emptyset \text{ si } r \succ_X x \\ A \text{ si } x \succsim_X r \succ_X y \\ S \text{ si } y \succsim_X r \end{cases} \tag{3.9}$$

et

$$\{s, b(s) \succsim_X r\} = \begin{cases} \emptyset \text{ si } r \succ_X x \\ B \text{ si } x \succsim_X r \succ_X y \\ S \text{ si } y \succsim_X r \end{cases} \tag{3.10}$$

De même, $\forall r \in \mathcal{R}$,

$$\{s, a'(s) \succsim_X r\} = \begin{cases} \emptyset \text{ si } r \succ_X x' \\ A \text{ si } x' \succsim_X r \succ_X y' \\ S \text{ si } y' \succsim_X r \end{cases} \tag{3.11}$$

et

$$\{s, b'(s) \succsim_X r\} = \begin{cases} \emptyset \text{ si } r \succ_X x' \\ B \text{ si } x' \succsim_X r \succ_X y' \\ S \text{ si } y' \succsim_X r \end{cases} \tag{3.12}$$

Supposons que $xAy \succsim xBy$. Montrons par l'absurde qu'alors, $A \succsim_\Lambda B$: supposons que $B \succ_\Lambda A$. Les égalités (3.9) et (3.10) indiquent alors que $xBy \succsim^r xAy$ pour tout r, et qu'il existe au moins un niveau r tel que $xBy \succ^r xAy$. La propriété de monotonie MON, conséquence des axiomes SNR, IONR et WP3 indique alors que $xBy \succ xAy$, ce qui est impossible. Nous savons donc que $A \succsim_\Lambda B$. Cela implique aussi, par l'équation (3.6) et les égalités (3.11) et (3.12), que $\forall r \in \mathcal{R}$, $x'Ay' \succsim^r x'By'$. Nous avons donc $xAy \succsim xBy \iff x'Ay' \succsim x'By'$, ce qui montre que P4 est vérifié. □

La combinaison des axiomes SNR et IONR permet donc d'obtenir la relation de préférence globale $\succsim$ comme une agrégation des relations de préférences partielles vis-à-vis des niveaux de référence $\succsim^r$. Comme les relations $\succsim^r$ ne dépendent que des ensembles F_r et G_r, $r \in \mathcal{R}$, comme indiqué dans le modèle (3.7), cela montre qu'une relation de préférence vérifiant SNR et IONR vérifie aussi naturellement l'axiome DNR. Autrement dit, l'axiome DNR indique que la relation de préférence ne dépend que des niveaux de référence, et les axiomes SNR et IONR indiquent comment cette relation dépend des niveaux de préférence.

3.1.4 Score global avec niveaux de référence

Le modèle 3.7 représente la contrepartie dans l'incertain des modèles de concordance avec niveaux de référence développés en multicritère. De même, nous pouvons imaginer un modèle de décision dans l'incertain utilisant des niveaux de référence qui soit la contrepartie des modèles finissant par la comparaison en décision multicritère. Cette approche peut être modélisée par l'équation suivante, sous l'hypothèse que la relation $\succsim$ soit complète :

$$f \succsim g \iff \phi(\{F_1, \ldots, F_r\}) \geq \phi(\{G_1, \ldots, G_r\}) \tag{3.13}$$

où ϕ est une fonction de $(2^S)^r$ dans $\mathbb{R}$.

Nous supposons ici que nous sommes dans le cas où l'ensemble $\mathcal{A}$ est fini ou dénombrable. Comme dans le cadre de la décision multicritère, le caractère transitif de la relation $\succsim$ est *nécessaire* pour être représentable par le modèle présenté à l'équation (3.13), puisque la relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$ est transitive. Il est aussi *suffisant* dans le cas où l'axiome DNR est vérifié, comme l'indique la proposition ci-dessous.

Proposition 8 *$\succsim$ vérifie DNR et est transitif $\iff$ $\succsim$ satisfait le modèle de l'équation (3.13)*

Preuve de la proposition 8
($\Leftarrow$) si $\succsim$ satisfait le modèle de l'équation (3.13), alors par construction $\succsim$ vérifie l'axiome DNR puisque le score d'une alternative f ne dépend que de $\{F_1, \ldots, F_r\}$. De même, $\succsim$ est transitive car la relation possède la même structure que l'ordre de $\mathbb{R}$.
($\Rightarrow$) Comme $\succsim$ est transitive et que l'ensemble $\mathcal{A}$ est dénombrable, on peut attribuer une valeur réelle $\phi(.)$ à chaque alternative telle que $f \succsim g \iff \phi(f) \geq \phi(g)$. Supposons de plus que $\succsim$ vérifie DNR. Alors la relation de préférence relative entre deux actes f et g ne dépend que des ensembles $\{F_1, \ldots, F_r\}$ et $\{G_1, \ldots, G_r\}$, et donc $\phi(f) = \phi(\{F_1, \ldots, F_r\})$.
□

3.2 Structures de préférences résultant d'une procédure d'agrégation ordinale avec niveaux de référence

Les axiomes SNR et IONR présentés au théorème 12 ne sont pas totalement suffisants pour établir des règles de décision tout à fait opérationnelles. En fait, rien ne garantit dans la construction d'une relation de préférence $\succsim$ suivant l'équation (3.8) le caractère transitif (ou même seulement quasi-transitif) de cette relation. L'exemple suivant montre que des règles apparemment naturelles pour $\succsim_{\mathcal{R}}$ (par exemple, des règles majoritaires) peuvent conduire à des relations non transitives, puisque des triplets de Condorcet peuvent être obtenus dans un profil $(\succsim^{r_1}, \ldots, \succsim^{r_q})$.

Exemple 52 *Supposons l'axiome SP5 vérifié. Alors il existe $r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{R}$, $x, y, z, w \in X$ tels que $x \succsim_X r_1 \succ_X y \succsim_X r_2 \succ_X z \succsim_X r_3 \succ_X w$. Supposons que la relation $\succsim_\Lambda$ soit telle que $\{s_1, s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_2\} \succ_\Lambda \{s_1, s_3\} \succ_\Lambda \{s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1\} \succ_\Lambda \{s_2\} \succ_\Lambda \{s_3\} \succ_\Lambda \emptyset$. Soient $f, g, h \in \mathcal{A}$ tels que $f = (x, w, z)$, $g = (z, x, z)$ et $h = (y, y, w)$. Nous avons alors*

$$\begin{cases} F_1 = \{s_1\} & F_2 = \{s_1\} & F_3 = \{s_1, s_3\} \\ G_1 = \{s_2\} & G_2 = \{s_2\} & G_3 = \{s_1, s_2, s_3\} \\ H_1 = \emptyset & H_2 = \{s_1, s_2\} & H_3 = \{s_1, s_2\} \end{cases}$$

ce qui implique que $f \succ^1 g \succ^1 h$, $h \succ^2 f \succ^2 g$ et $g \succ^3 h \succ^3 f$

Nous pouvons noter que nous sommes en présence là d'un profil formant un triplet de Condorcet, qui induit $f \succ g, g \succ h$ et $h \succ f$ si la relation d'importance $\succsim_{\mathcal{R}}$ est telle que :

$$Q \succsim_{\mathcal{R}} Q' \iff |Q| \geq |Q'|$$

Une telle relation de préférence n'est pas très utile en décision dans l'incertain, car elle contient des circuits dans la partie stricte de la relation de préférence. Pour cette raison, nous étudions maintenant l'impact de la transitivité de $\succsim$ sur le cadre proposé.

3.2.1 Relation de préférence transitive

Si les axiomes SNR et IONR sont vérifiés, les axiomes P1 (transitivité) et WP3 permettent d'obtenir des propriétés intéressantes sur les relations d'importance $\succsim_\Lambda$ et de préférence $\succsim$. En particulier, la relation $\succsim_\Lambda$ est alors transitive, ce qui découle immédiatement de la définition de $\succsim_\Lambda$ (équation 3.5) et de la transitivité de $\succsim$.

Nous souhaitons maintenant caractériser axiomatiquement les règles de décision permettant d'obtenir une relation de préférence transitive $\succsim$ sur $\mathcal{A}$ définie par l'équation (3.8). Nous nous intéressons ici aux relations de préférence vérifiant les axiomes P1 (transitivité de la relation $\succsim$), WP3 (cohérence de la relation vis-à-vis des conséquences) et SP5 (richesse suffisante de l'ensemble des niveaux de référence).

L'étude des relations de préférence transitives présente des analogies formelles avec l'étude menée dans le cadre de l'agrégation multicritère. En particulier, le fait que les relations de préférence étudiées soient monotones et transitives suggère qu'il existe, sous condition de richesse suffisante de l'espace étudié, un niveau de référence dictateur qui déterminera la préférence entre deux actes. Le fait que la propriété de monotonie soit ici une propriété de stricte monotonie suggère, comme dans le cas de l'agrégation multicritère avec point de référence, l'existence d'une lexicographie de niveaux de référence permettant de déterminer la relation de préférence globale. Dans une telle structure, un niveau de référence est utilisé pour discriminer deux actes si tous les autres niveaux classés avant lui ne faisaient pas de distinction entre eux. Autrement dit, l'agrégation des relations de préférence partielles vis-à-vis de chaque niveau de référence s'effectue suivant un ordre lexicographique sur les niveaux de référence. L'exemple suivant montre une règle d'agrégation qui fonctionne suivant ce principe :

Exemple 53 *Soit* $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *et* $X = \{x, y, z, w\}$ *avec* $x \succ_X y \succ_X z \succ_X w$. *Soit* $\mathcal{R} = \{r_1, r_3, r_3\}$. *Prenons les actes suivantes :*

	s_1	s_2	s_3	s_4
f	x	y	y	w
g	x	y	z	z
f'	x	x	w	w
g'	y	y	y	y
r_1	x	x	x	x
r_2	y	y	y	y
r_3	z	z	z	z

Le tableau des ensembles F_r *est alors le suivant :*

	r_1	r_2	r_3
f	$\{s_1\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$
g	$\{s_1\}$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
f'	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$
g'	$\emptyset$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

Supposons que $A \succsim_\Lambda B \iff |A| \geq |B|$. *Nous avons alors* $f \sim^1 g$, $f \succ^2 g$ *et* $f \prec^3 g$. *De même nous avons* $f' \succ^1 g'$, $f' \prec^2 g'$ *et* $f' \prec^3 g'$. *Supposons que l'ordre lexicographique d'agrégation est* r_1 *puis* r_2 *puis* r_3. *Nous obtenons alors les préférences suivantes : comme* $f' \succ^1 g'$, *cela implique que* $f' \succ g'$ *(peut importe la relation* $\succsim^2$ *entre* f' *et* g'*). Comme* $f \sim^1 g$, *il faut regarder la relation entre* f *et* g *vis-à-vis du deuxième niveau de référence : comme* $f \succ^2 g$, *nous obtenons finalement* $f \succ g$.

Nous avons montré sur un exemple comment se comporte une règle d'agrégation lexicographique dans le cadre de la décision dans l'incertain avec niveaux de référence. Nous allons maintenant établir un théorème de caractérisation montrant, sous des hypothèses naturelles dans le cadre des règles à niveaux de référence, la structure lexicographique des préférences.

Théorème 13 *Soir* $\mathcal{R}$ *un ensemble de* q *niveaux de référence. Si la relation de préférence* $\succsim$ *sur* $\mathcal{A}$ *vérifie les axiomes P1, WP3, SP5, SNR et IONR, alors il existe une permutation*

σ sur $\{1, \ldots, q\}$, et une relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ sur les sous-ensembles de S telle que :

$$\begin{array}{rcl} f \succ g & \iff & F_{\sigma(1)} \succ_\Lambda G_{\sigma(1)} \\ & ou & F_{\sigma(1)} \sim_\Lambda G_{\sigma(1)} \text{ et } F_{\sigma(2)} \succ_\Lambda G_{\sigma(2)} \\ & \ldots & \\ & ou & \forall i < q,\ F_{\sigma(i)} \sim_\Lambda G_{\sigma(i)} \text{ et } F_{\sigma(q)} \succ_\Lambda G_{\sigma(q)} \\ f \sim g & \iff & \forall i = 1, \ldots, q, F_i \sim_\Lambda G_i \end{array}$$

La relation $\succsim_\Lambda$ est obtenue à partir de la relation $\succsim$ comme indiqué en équation (3.5). Un concept fondamental pour démontrer le théorème 13 est celui d'ensemble décisif. On définit un ensemble décisif de la façon suivante :

Définition 20 *$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ est dit décisif dans $\mathcal{A}$ pour un couple $(f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ si $\{r \in \mathcal{R},\ f \succ^r g\} = \mathcal{Q}$, $\{r \in \mathcal{R},\ g \succ^r f\} = \mathcal{R} - \mathcal{Q}$ et $f \succ g$.*

Par l'axiome IONR, si $\mathcal{Q}$ est décisif pour un couple (f, g), il est décisif pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. On dit alors que $\mathcal{Q}$ est totalement décisif.

Preuve du théorème 13 Si les axiomes P1 et SP5 sont vérifiés, nous savons qu'il existe au moins $q \geq 3$ niveaux de référence dans $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_q\}$ tels que $f_{r_1} \succ \ldots \succ f_{r_q}$. La preuve du théorème est alors inspirée de celle du théorème 10. Le cadre de la relation de préférence est cependant différent : la structure de produit cartésien de l'ensemble des alternatives dans le cadre multicritère est ici remplacé par une forme d'universalité (comme dans le cadre original d'Arrow (1951)). La richesse de la structure de l'ensemble produit exploitée dans le cadre multicritère est obtenue ici par la diversité des relations entre les actes due à l'existence de triplets de Condorcet comme indiqué dans l'exemple 52. Nous devons montrer également que la relation $\succsim_{\mathcal{R}}$ vérifie le principe d'unanimité stricte, c'est à dire :

$$(\forall r \in \mathcal{R},\ f \succ^r g) \Rightarrow f \succ g$$

Cela est immédiat et dérive de MON, qui est vérifiée par WP3.
Le principe d'unanimité stricte dit que $(\forall r \in \mathcal{R},\ f \succ^r g) \Rightarrow f \succ g$, ce qui signifie que $\mathcal{R}$ est un ensemble décisif. Soit K un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-ensemble de $\mathcal{R}$ décisif. Supposons que K possède plus d'un élément. Soient $f, g, h \in \mathcal{A}$, et $i \in K$ tels que

$$\begin{array}{ll} & f \succ^{r_i} g \succ^{r_i} h \\ \forall k \in K - \{i\} & g \succ^{r_k} h \succ^{r_k} f \\ \forall j \notin K & h \succ^{r_j} f \succ^{r_j} g \end{array}$$

Une telle situation est tout à fait possible comme le montre l'exemple 54 ci-dessous pour un ensemble $\mathcal{R}$ particulier. Alors $g \succ h$ puisque K est décisif. Si $h \succsim f$ alors $g \succ f$ par transitivité, mais cela viole le fait que K soit le plus petit ensemble décisif, car alors

$K - \{i\}$ est décisif. Donc $f \succ g$ mais ceci aussi viole le fait que K soit un plus petit ensemble décisif. Donc K ne contient qu'un élément, que nous notons r_1.
Montrons que le niveau de référence r_1 est bien un dictateur, c'est à dire que pour tout $f, g \in \mathcal{A}$, $f \succ^{r_1} g$ implique $f \succ g$. Soient $f, g, h \in \mathcal{A}$ tels que $f \succ^{r_1} g \succ^{r_1} h$, et pour chaque $r \neq r_1$, $g \succ^r f$ et $g \succ^r h$. Alors $f \succ g$ car $\{r_1\}$ est décisif, $g \succ h$ par unanimité, et alors $f \succ h$ par transitivité. Puisque $f \succ^{r_1} h$ et puisque f, h peuvent être choisis de telle manière que $f \succ^r h$, $h \succ^r f$ ou $f \sim^r h$ soit vérifié pour tout $r \neq r_1$, l'axiome IONR implique que pour tout $f, g \in \mathcal{A}$, $f \succ^{r_1} g \Rightarrow f \succ g$.
Nous nous intéressons maintenant aux actes que le niveau de référence r_1 n'a pas permis de différencier. Soit $\mathcal{R}' = \mathcal{R} - \{r_1\}$. Considérons l'ensemble $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$ l'ensemble des paires $(f, g) \in \mathcal{A}^2$ telles que $f \sim^{r^1} g$. K est dit décisif dans $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$ pour un couple (f, g) de $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$ si $f \succ g$ alors que $f \sim^{r_1} g$, $\forall r \in K$, $f \succ^r g$ et $\forall r \in \mathcal{R}' - K$, $g \succ^r h$. Par IONR, si un ensemble est décisif pour un couple $(f, g) \in (\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$, il est décisif pour tout couple de $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$. Puisque la relation de préférence vérifie la monotonie stricte, $\mathcal{R}'$ est alors décisif dans $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$. Comme précédemment, il existe alors un plus petit ensemble totalement décisif $K \subseteq \mathcal{R}'$ sur $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$. De manière analogue à la preuve ci-dessus, K contient un singleton, noté r_2. Ce singleton est alors un un dictateur sur l'ensemble $(\mathcal{A}^2)_{\sim^{r^1}}$.
La preuve continue ainsi jusqu'au dernier niveau de référence, où MON implique la conclusion désirée. □

Exemple 54 *Soit $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ et $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Chaque acte peut avoir une conséquence dans l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ pour chaque état, avec $\alpha_1 \succ_X \alpha_2 \succ_X \alpha_3 \succ_X \alpha_4$.*

	s_1	s_2	s_3
r_1	α_1	α_1	α_1
r_2	α_2	α_2	α_2
r_3	α_3	α_3	α_3
f	α_1	α_3	α_4
g	α_4	α_1	α_2
h	α_2	α_3	α_2

Supposons que $\{s_1, s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_2\} \succ_\Lambda \{s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1\} \succ_\Lambda \{s_2\} \succ_\Lambda \{s_3\} \succ_\Lambda \emptyset$. Alors

$$\begin{aligned} F_1 \succ_\Lambda G_1 \succ_\Lambda H_1 &\Rightarrow f \succ^{r_1} g \succ^{r_1} h \\ G_2 \succ_\Lambda H_2 \succ_\Lambda F_2 &\Rightarrow g \succ^{r_2} h \succ^{r_2} f \\ H_3 \succ_\Lambda F_3 \succ_\Lambda G_3 &\Rightarrow h \succ^{r_3} f \succ^{r_3} g \end{aligned}$$

Le théorème 13 montre que si l'axiome IONR est vérifié, et si $\succsim$ est transitive (i.e. vérifie l'axiome P1), les règles de préférence à base de niveaux de référence sont nécessairement basées sur une agrégation lexicographique des relations de préférence $\succsim^{r_i}$,

$i = 1, \ldots, q$, ce qui induit l'existence d'un "dictateur" sur les niveaux de référence (par transposition du théorème d'Arrow), et même l'existence d'une hiérarchie de niveaux de référence. Le niveau de référence r_i permet simplement de discriminer deux actes f et g si les niveaux de référence $r_k, k < i$ (placés plus haut dans la hiérarchie) n'ont pas permis de le faire. L'ordre hiérarchique est totalement déterminé par la permutation σ sur $\{1, \ldots, q\}$. Il peut facilement être révélé par l'observation des préférences sur certaines paires d'actes $(f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ telles que, pour deux niveaux de référence r_i, r_j avec $i < j$ et A un sous-ensemble strict non vide de S : $f = r_i A r_{j+1}$, $g = r_{i+1} A r_j$. En effet, nous avons alors $f \succ^{r_i} g$, $g \succ^{r_j} f$ et $\forall k \neq i, j$, $f \sim^{r_k} g$. Donc si $f \succ g$, cela signifie que $\sigma(i) < \sigma(j)$, et si $g \succ f$, cela signifie que $\sigma(j) < \sigma(i)$, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 55 *Soit $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ et $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Chaque acte peut avoir une conséquence dans l'ensemble $X = \{x, y, z, t\}$ pour chaque état, avec $x \succ_X y \succ_X z \succ_X t$. Comment déterminer l'ordre lexicographique d'agrégation des préférences vis-à-vis de chaque niveau de préférence ? Soient les alternatives a, b, c et a', b', c' suivantes :*

	s_1	s_2	s_3
a	x	x	z
a'	y	y	y
b	x	x	t
b'	y	y	z
c	y	y	t
c'	z	z	z

Les ensembles F et G sont les suivants :

	r_1	r_2	r_3
A	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$
A'	$\emptyset$	$\{s_1, s_2, s_3\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$
B	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$
B'	$\emptyset$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$
C	$\emptyset$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$
C'	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_1, s_2, s_3\}$

Nous obtenons donc les relations suivantes, en supposant que $\{s_1, s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_2\} \succ_\Lambda \emptyset$:

- $a \succ^{r_1} a'$, $a \prec^{r_2} a'$, $a \sim^{r_3} a'$.
- $b \succ^{r_1} b'$, $b \sim^{r_2} b'$, $b \prec^{r_3} b'$.
- $c \sim^{r_1} c'$, $c \succ^{r_2} c'$, $c \prec^{r_3} c'$.

Donc la comparaison de a et a' permet de déterminer l'ordre d'agrégation entre r_1 et r_2, la comparaison de b et b' l'ordre d'agrégation entre r_1 et r_3 et la comparaison de c et c' l'ordre d'agrégation entre r_2 et r_3.

Un exemple très naturel de règle de préférence est obtenue en choisissant $\sigma(k) = q+1-k$. Cela revient à comparer deux actes f et g en observant leurs potentiels respectifs à donner des conséquences meilleures qu'un niveau de référence minimal. Si ce niveau n'est pas suffisant pour discriminer les deux actes, un deuxième niveau est alors considéré, etc.

Le point crucial dans de telles procédures d'agrégation est que la structure hiérarchique ne s'applique pas aux états (comme c'est généralement le cas pour les règles vérifiant l'axiome OI, cf Dubois et al. (2003a)) mais aux conséquences. Cela laisse une grande possibilité de relations de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ monotones, comme par exemple celles induites par les capacités (additives ou non, décomposables ou non). De ce point de vue, cela permet une plus grande capacité descriptive que les règles de dominance de vraisemblance.

3.2.2 Cas des relations de préférence quasi-transitives

Si la relation de préférence $\succsim$ n'est pas transitive mais simplement quasi-transitive, alors la règle d'agrégation n'est pas une lexicographie stricte sur les niveaux de référence, mais une lexicographie d'oligarchies. Une α-oligarchie est un ensemble de niveaux de référence $\mathcal{O}$ tel que pour tout $f, g \in \mathcal{A}$:

1. $[\forall r \in \mathcal{O}, f \succ^r g] \Rightarrow f \succ g$
2. $[\exists r \in \mathcal{O},\ f \succ^r g] \Rightarrow f \succsim g$

En d'autres termes, l'oligarchie est décisive et chaque membre de l'oligarchie a un pouvoir de veto empêchant une préférence stricte contraire à sa propre préférence. La lexicographie d'oligarchie signifie que si tous les membres d'une oligarchie considèrent que $f \sim^r g$, alors il revient à l'oligarchie inférieure de statuer, et ainsi de suite. Dans le cadre de la théorie du choix social, la présence d'une oligarchie en cas de préférence quasi-transitive (faisant pendant à un dictateur en cas de préférence transitive) a été montré par Weymark (1984). L'adaptation de ce théorème dans notre cadre de travail se fait de la même manière que pour la lexicographie (cf section ci-dessus).

Théorème 14 *Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{A}$ vérifie les axiomes WP1, WP3, SP5, SNR et IONR alors il existe p sous-ensembles de $\mathcal{R}$ $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_p$, et une relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ sur les sous-ensembles de S tels que, pour tout ensemble $\mathcal{O}_j$:*

$$[\forall r \in \mathcal{O}_i, i < j,\ F_r \sim_\Lambda G_r]\ et\ \begin{cases} \forall r \in \mathcal{O}_j,\ F_r \succsim_\Lambda G_r \Rightarrow f \succ g \\ \exists r \in \mathcal{O}_j,\ F_r \succ_\Lambda G_r \Rightarrow f \succsim g \end{cases}$$

Preuve du théorème 14
Nous utiliserons dans cette démonstration les notations et résultats encore valides vus dans la démonstration du théorème 13.

Par MON, $\mathcal{R}$ est un ensemble décisif. Considérons $\mathcal{Q}$ un plus petit ensemble décisif. Nous allons montrer que $\mathcal{Q}$ est une oligarchie. Si $\mathcal{Q}$ contient un seul élément, c'est évidemment une oligarchie. Si $|\mathcal{Q}| \geq 2$, montrons que les deux points de la définition sont vérifiés :

1. Montrons que $\forall f, g \in \mathcal{A}$, $[\forall r \in \mathcal{Q}, f \succ^r g] \Rightarrow f \succ g$. Cela est immédiat par définition d'un ensemble décisif.
2. Montrons que $\forall f, g \in \mathcal{A}$, $[\exists r \in \mathcal{O},\ f \succ^r g] \Rightarrow f \succsim g$. Pour cela, on définit pour toute paire d'actes (f, g) les ensembles $T, U, V \subseteq \mathcal{R}$ par : $T = \{r \in \mathcal{Q},\ f \succ^r g\}$, $U = \{r \in \mathcal{Q},\ g \succ^r f\}$ et $V = \{r \in \mathcal{Q},\ f \sim^r g\}$. Considérons le profil de préférences suivant :
$$\begin{cases} \forall r \in T, & f \succ^r h \succ^r g \\ \forall r \in U, & g \succ^r f \succ^r h \\ \forall r \in V, & f \sim^r g \succ^r h \\ \forall r \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}, & h \succ^r g \end{cases}$$
Un tel profil existe, comme indiqué à l'exemple 56 ci-après. Supposons maintenant que $T \neq \emptyset$ et $U \cup V \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{Q}$ est décisif, nous avons $f \succ h$. Supposons alors que $g \succ f$. La transitivité de $\succ$ implique que $g \succ h$. Mais si $g \succ h$, alors $U \cup V$ est décisif, ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{Q}$ soit le plus petit ensemble décisif. Donc $f \succsim g$. Cela montre que si il existe $r \in \mathcal{Q}$ tel que $f \succ^r g$ (ce qui est le cas si $T \neq \emptyset$), alors $f \succsim g$. Le point 2. de la définition d'une oligarchie est alors vérifé par $\mathcal{Q}$.

L'ensemble $\mathcal{Q}$ vérifiant les deux points de la définition est une oligarchie.
Nous avons montré que sous l'hypothèse de quasi-transitivité, il n'y a pas de niveau de référence "dictateur" mais une oligarchie de niveaux de référence qui déterminent ensemble la relation de préférence. Le fait que la relation $\succsim$ vérifie la propriété de monotonie stricte permet, comme dans le cas vu ci-dessus de la lexicographie, de montrer qu'il existe une lexicographie d'oligarchies déterminant la relation de préférence $\succsim$. Notons $\mathcal{O}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}$ formant une oligarchie . Supposons que $\forall r_i \in \mathcal{O}_1,\ f \sim^{r_i} g$ et considérons l'ensemble réduit $\mathcal{R}' = \mathcal{R} - \mathcal{O}_1$. On dira que K est $\mathcal{R}'$-décisif pour un couple (f, g) si $f \succ g$ dès que : $\forall r_i \in \mathcal{O}_1,\ f \sim^{r_i} g$, $\forall r \in K,\ f \succ^r g$ et $\forall r \in \mathcal{R}' - K,\ g \succ^r f$.

Supposons que $\forall r \in \mathcal{O}_1,\ f \sim^r g$ et $\forall r \in \mathcal{R}', f \succ^r g$. L'axiome MON étant vérifié, nous avons $f \succ g$: l'ensemble $\mathcal{R}'$ est alors $\mathcal{R}'$-décisif. Comme précédemment, il existe alors un plus petit ensemble $\mathcal{R}'$-décisif K. Comme précédemment, nous pouvons montrer que K est une oligarchie, notée $\mathcal{O}_2$, pour l'ensemble des paires d'actes $(f, g) in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ tels que $\forall r \in \mathcal{O}_1,\ f \sim^r g$. Cet ensemble $\mathcal{O}_2$ est donc tel que

$$\forall a, b \in \mathcal{A},\ \text{tels que } \forall r \in \mathcal{O}_1, a \sim^r b \left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathcal{O}_2, a \succ^r b \Rightarrow a \succ b \\ \exists r \in \mathcal{O}_2 \text{ tel que } a \succ^r b \Rightarrow a \succsim b \end{array} \right\}$$

La preuve continue ainsi jusqu'au dernier ensemble de niveaux de référence, où MON implique la conclusion désirée. □

Exemple 56 *Soient* $S = \{s_1, \ldots, s_5\}$ *et* $A \succsim_\Lambda B$ *si et seulement si* $|A| \geq |B|$. *Prenons* $\mathcal{Q} = \{r_i, r_{i+1}, r_{i+2}\}$. *Soient* f, g, h *tels que*

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
f	r_i	r_i	r_{i+2}	r_{i-1}	r_{i+3}
g	r_{i+1}	r_{i+1}	r_{i+1}	r_i	r_p
h	r_i	r_{i+3}	r_{i+3}	r_1	r_{i+3}

Les ensembles F_r, G_r *et* H_r *sont alors les suivants :*

$$\begin{array}{lll} F_{r_i} = \{s_1, s_2, s_4\} & F_{r_{i+1}} = \{s_1, s_2, s_4\} & F_{r_{i+2}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \\ G_{r_i} = \{s_4\} & G_{r_{i+1}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} & G_{r_{i+2}} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \\ H_{r_i} = \{s_1, s_4\} & H_{r_{i+1}} = \{s_1, s_4\} & H_{r_{i+2}} = \{s_1, s_4\} \end{array}$$

Nous obtenons alors les préférences suivantes, qui correspondent bien au cas évoqué :

$$\begin{cases} f \succ^{r_i} h \succ^{r_i} g \\ g \succ^{r_{i+1}} f \succ^{r_{i+1}} h \\ f \sim^{r_{i+2}} g \succ^{r_{i+2}} h \\ \forall r_k \notin \mathcal{Q},\ h \succ^{r_k} g \end{cases}$$

Le cadre de la lexicographie d'oligarchies est plus étendu que celui de la simple lexicographie. En effet, en fonction de la taille de l'oligarchie, la règle recouvre des situations de règles de décision très variées. Par exemple, si chaque oligarchie ne contient qu'un unique élément, la règle revient à la lexicographie de niveaux de référence obtenue au théorème 13. Si au contraire tous les niveaux de référence sont dans une même oligarchie, la règle revient à l'unanimité, comme nous le détaillons ci-après.

Supposons que tous les niveaux de référence de $\mathcal{R}$ jouent le même rôle dans la détermination des préférences. Cela peut s'exprimer par une condition "d'anonymat" sur les niveaux de référence, présentée par l'axiome ci-dessous :

Axiome d'anonymat Soit $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$. On dit que $\succsim$ respecte l'anonymat des niveaux de référence si et seulement si

$$\forall \sigma \text{ permutation sur } \{1, \ldots, p\},\ \succsim^{r_1, \ldots, r_p} = \succsim^{r_{\sigma(1)}, \ldots, r_{\sigma(p)}}$$

Si l'on déplace légèrement le cadre de l'étude en abandonnant la propriété de complétude, mais en rajoutant la transitivité, l'oligarchie est alors une β-oligarchie qui, si elle vérifie l'axiome d'anonymat, revient à la contrepartie qualitative de la dominance stochastique. Une β-oligarchie est un ensemble de niveaux de référence $\mathcal{O}$ tel que pour tout $f, g \in \mathcal{A}$:

1. $[\forall r \in \mathcal{O}, f \succ^r g] \Rightarrow f \succ g$
2. $[\exists r \in \mathcal{O}, f \succ^r g] \Rightarrow$ non $(g \succ f)$

La différence avec une α-oligarchie réside dans le résultat en cas de deux préférences contradictoires entre deux actes à l'intérieur de l'oligarchie. Dans le cas d'une α-oligarchie, la relation globale est alors une indifférence entre les deux actes, alors que dans le cas d'une β-oligarchie, les deux actes ne sont simplement pas comparables, la relation $\succsim$ étant alors incomplète.

Soit une relation de préférence avec niveaux de référence $\succsim$ sur $\mathcal{A}$. Supposons qu'il existe une β-oligarchie de niveaux de référence déterminant la relation de préférence. Si la relation $\succsim$ vérifie l'axiome d'anonymat, cela implique que tous les niveaux de référence jouent le même rôle, et donc que l'oligarchie est constituée de tous les niveaux de référence. En important dans notre cadre le théorème proposé par Weymark (1984) pour caractériser la règle stricte de Pareto, nous obtenons une caractérisation de la règle d'unanimité suivante, que nous pouvons aussi appeler règle de dominance sur $\mathcal{R}$: $f \succsim g \iff \forall r \in \mathcal{R}, f \succsim^r g$.

La règle d'agrégation

$$f \succsim g \iff \forall r \in \mathcal{R}, \{s \in S, f(s) \succsim_X r\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \succsim_X r\}$$

est alors exactement la contrepartie qualitative de la dominance stochastique $\succsim_\Delta$ sur les niveaux de référence (voir par exemple Laffont (1991)). Montrons sur un exemple comment se comporte cette règle de décision :

Exemple 57 *Soit $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, r_3\}$ et $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Supposons que la relation $\succsim_\Lambda$ soit telle que*

$$\{s_1, s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1, s_2\} \succ_\Lambda \{s_1, s_3\} \succ_\Lambda \{s_1\} \sim_\Lambda \{s_2, s_3\} \succ_\Lambda \{s_2\} \succ_\Lambda \{s_3\}$$

Chaque acte peut avoir une conséquence dans l'ensemble $\{x, y, z, w\}$ pour chaque état, avec $x \succ_X y \succ_X z \succ_X w$. Soit la relation de préférence $\succsim$ construite selon la règle suivante :

$$f \succsim g \iff \forall r \in \mathcal{R}, \{s \in S, f(s) \succsim_X r\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \succsim_X r\}$$

Comparons alors les paires (a, b), (c, d) et (e, f) suivantes :

	s_1	s_2	s_3
a	x	y	z
b	w	x	y
c	y	y	x
d	y	x	z
e	x	y	z
f	z	x	x

Les paires (a,b), (c,d) et (e,f) se comparent alors de la manière suivante : prenons par exemple la paire (a,b) vis-à-vis du niveau de référence r_1 : $\{s \in S \mid a(s) \succsim_X r_1\} = \{s_1\}$, $\{s \in S \mid b(s) \succsim_X r_1\} = \{s_2\}$ donc $a \succ^{r_1} b$. De même, $a \succ^{r_2} b$ puisque $\{s \in S \mid a(s) \succsim_X r_2\} = \{s_1, s_2\}$ et $\{s \in S \mid b(s) \succsim_X r_2\} = \{s_2, s_3\}$ et $a \succ^{r_3} b$ puisque $\{s \in S \mid a(s) \succsim_X r_3\} = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $\{s \in S \mid b(s) \succsim_X r_3\} = \{s_2, s_3\}$; le détail pour les trois paires est donné ci-dessous :

r_1	r_2	r_3
$a \succ^{r_1} b$	$a \succ^{r_2} b$	$a \succ^{r_3} b$
$c \prec^{r_1} d$	$c \succ^{r_2} d$	$c \sim^{r_3} d$
$e \sim^{r_1} f$	$e \succ^{r_2} f$	$e \sim^{r_3} f$

On a donc $a \succ b$, $c \sim d$ et $e \succ f$.

3.3 Place des modèles à niveau de référence dans la décision dans l'incertain

Le modèle de relation de préférence à niveaux de référence que nous proposons n'est pas sans connection avec les modèles déjà existants. D'un côté, il permet de généraliser des modèles de relations de préférence dans l'incertain ne vérifiant pas l'axiome P2 de Savage. D'un autre côté, il permet d'obtenir la contrepartie dans un cadre purement qualitatif de modèles quantitatifs de préférence. Nous détaillons en particulier ci-dessous les liens qu'entretient le modèle que nous présentons avec les modèles décrits par des relations de concordance, avec les modèles probabilistes à niveaux de référence, ainsi qu'avec les modèles possibilistes. Nous évoquerons également les liens avec la décision séquentielle.

3.3.1 Cas des relations de concordance

Montrons tout d'abord que malgré leurs similitudes, les règles de concordance et les règles à base de niveaux de référence présentées en équation (3.7) ne décrivent pas les mêmes relations.

Soit $X = \{x, y, z\}$ avec $x \succ_X y \succ_X z$ et $S = \{s_1, s_2\}$.

Montrons un premier exemple où la relation de préférence peut être décrite à l'aide d'une règle avec niveaux de référence, mais pas avec une règle de concordance.

Exemple 58 *Soient les quatre actes suivants* $f, g, f', g' \in \mathcal{A}$*, avec* $f \succ g$ *et* $g' \succ f'$*.*

	s_1	s_2	s_3
f	x	y	x
g	y	x	x
f'	x	y	z
g'	y	x	z

Nous constatons alors que $\{s \in S,\ f(s) \succsim_X g(s)\} = \{s_1, s_3\} = \{s \in S,\ f'(s) \succsim_X g'(s)\}$ *et* $\{s \in S,\ g(s) \succsim_X f(s)\} = \{s_2, s_3\} = \{s \in S,\ g'(s) \succsim_X f'(s)\}$*. Donc, avec une règle de concordance du type*

$$f \succsim g \iff \{s \in S,\ f(s) \succsim_X g(s)\} \succsim_\Lambda \{s \in S,\ g(s) \succsim_X f(s)\}$$

nous obtenons les préférences $f \succsim g \iff f' \succsim g'$*, ce qui n'est pas le cas.*

Par contre, une telle préférence peut être décrite à l'aide d'une règle à partir de niveaux de référence. Prenons x, y *comme niveaux de référence. Si* $\{s_1, s_3\} \succ_\Lambda \{s_2, s_3\}$ *et* $\{s_2\} \succ_\Lambda \{s_1\}$*, alors on a :* $f \succ^x g$ *et* $f \sim^y g$*, et* $g' \succ^x f'$ *et* $f' \sim^y g'$*, ce qui n'introduit aucune contradiction dès lors que la relation* $\succsim_\Lambda$ *n'est pas additive, c'est à dire qu'il est possible d'avoir* A, B *et* C *disjoint de* $A \cup B$ *des sous-ensembles de* S *tels que* $A \succ_\Lambda B$ *et* $B \cup C \succ_\Lambda A \cup C$*.*

Montrons un deuxième exemple où la relation de préférence peut être décrite à l'aide d'une règle de concordance, mais pas avec une règle avec niveaux de référence telle que présentée en modèle (3.7), car ne vérifiant pas l'axiome $IONR$.

Exemple 59 *Soient les quatre actes suivants* $f, g, f', g' \in \mathcal{A}$ *avec* $f \succ g$ *et* $g' \succ f'$*.*

	s_1	s_2	s_3
f	x	x	z
g	y	y	y
f'	x	z	z
g'	y	y	y

Considérons également les trois actes suivants, avec $a \succ b \succ c$ *:*

	s_1	s_2	s_3
a	x	z	z
b	y	z	z
c	z	z	z

Une telle préférence peut être décrite à l'aide d'une règle de concordance. En effet, $\{s \in S,\ f(s) \succsim_X g(s)\} = \{s_1, s_2\}$ *et* $\{s \in S,\ g(s) \succsim_X f(s)\} = \{s_3\}$*. De même,* $\{s \in$

$S,\ f'(s) \succsim_X g'(s)\} = \{s_1\}$ et $\{s \in S,\ g'(s) \succsim_X f'(s)\} = \{s_2, s_3\}$. Ces relations ne sont pas incohérentes et peuvent par exemple être obtenues par une simple règle basée sur la comparaison des cardinaux des ensembles considérés. De même les préférences entre a, b et c peuvent se décrire à l'aide d'une règle de concordance.

Par contre, une telle préférence ne peut être décrite à l'aide d'une règle à partir de niveaux de référence. En effet, montrons que l'axiome $IONR$ n'est pas vérifié. Les relations $a \succ b$ et $b \succ c$ nous indiquent que x et y sont des niveaux de référence et que $\{s_1\} \succ_\Lambda \emptyset$. Par monotonie et inclusion, $\{s_1, s_2\} \succ_\Lambda \emptyset$. De même, la propriété MON nous dit que que $S \succ_\Lambda \{s_1, s_2\}$. Par monotonie et inclusion, $S \succ_\Lambda \{s_1\}$. Comme $F_x = \{s_1, s_2\}$ et $G_x = \emptyset$, on a : $f \succ^x g$. Comme $F_y = \{s_1, s_2\}$ et $G_y = S$, on a : $g \succ^y f$. Par ailleurs, comme $F'_x = \{s_1\}$ et $G'_x = \emptyset$, on a : $f' \succ^x g'$. Et comme $F'_y = \{s_1\}$ et $G'_y = S$, on a : $g' \succ^y f'$. On a donc $\forall r \in \mathcal{R},\ f \succsim^r g \iff f' \succsim^r g'$, et donc $f \succsim g \iff f' \succsim g'$, ce qui n'est pas le cas.

Dans l'exemple 58, nous avons montré une relation de préférence pouvant être décrite par une règle à niveau de référence, mais pas par une règle de concordance car l'axiome $P2$ n'est pas vérifié Dans l'exemple 59, nous avons montré une relation de préférence pouvant être décrite par une règle de concordance , mais pas par une règle à niveau de référence telle que présentée en équation (3.7) car l'axiome $IONR$ n'est pas vérifié

Approche duale

Nous avons présenté dans la section 3.1 une approche de la comparaison de deux actes par rapport à des niveaux de référence en commençant par comparer ces deux actes vis-à-vis de chaque niveau de référence sur l'ensemble des états de la nature, puis en agrégeant ces préférences partielles vis-à-vis de chaque niveau de référence en une relation de préférence globale (voir équation 3.7). Une approche duale de cette présentation est possible : elle consiste à comparer deux actes vis-à-vis de tous les niveaux de référence pour un état donné, puis d'agréger ces comparaisons en une comparaison unique sur l'ensemble des états de la nature. Le formalisme de cette approche duale est alors le suivant : on définit tout d'abord une relation de préférence sur chaque état de la nature $\succsim_s$ par rapport à un ensemble de niveaux de référence $\mathcal{R}$ par :

$$f \succsim_s g \iff \{r \in \mathcal{R},\ f(s) \succsim_X r\} \succsim_\mathcal{R} \{r \in \mathcal{R},\ g(s) \succsim_X r\} \tag{3.14}$$

La relation $\succsim_\mathcal{R}$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de $\mathcal{R}$. La relation $\succsim_s$ consiste à mesurer, pour un état donné, l'importance des ensembles de niveaux de référence auxquels les actes sont préférés. Si la relation $\succsim_X$ est complète et transitive, alors les ensembles $\{r \in \mathcal{R},\ f(s) \succsim_X r\}$ sont inclus les uns dans les autres : si la conséquence d'un acte f dans l'état s est preférée à un niveau r, elle sera aussi préférée à tous les niveaux inférieurs à r. La relation $\succsim_{\mathcal{R}}$ est alors simplement l'ordre induit par l'inclusion. Si $\succsim_X$ n'est ni complète, ni transitive, alors la relation $\succsim_{\mathcal{R}}$ est plus complexe et révélée par l'étude des comparaisons d'actes constants. Elle est aussi plus intéressante, car alors la comparaison directe des conséquences des deux actes f et g n'est pas forcément possible (incomplétude) ou induit des cycles (intransitivité).

Il faut ensuite agréger les relations $\succsim_s$ obtenues pour chaque état de S en une relation de préférence unique.

$$f \succsim g \iff \{s \in S,\ f \succsim_s g\} \succsim_\Lambda \{s \in S,\ g \succsim_s f\} \tag{3.15}$$

où $\succsim_\Lambda$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de S.

La forme duale du modèle (3.7) nécessite la même information que le modèle original. Elle permet cependant de retrouver des formes connues de règles d'agrégation si l'on se place dans certains cas particuliers, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 9 *Si $\mathcal{R} = X$ et si la relation $\succsim_X$ est complète et transitive, alors le modèle présenté en équation 3.15 est une règle de concordance.*

Preuve de la proposition 9 Si $\mathcal{R} = X$ et si la relation $\succsim_X$ est complète et transitive, cela signifie que $\forall f, g \in \mathcal{A}$, $f(s) \succsim_X g(s)$ ou $g(s) \succsim_X f(s)$ et $f \succsim_s g$ signifie simplement que $f(s) \succsim_X g(s)$. L'équation (3.15) devient alors

$$f \succsim g \iff \{s \in S,\ f(s) \succsim_X g(s)\} \succsim_\Lambda \{s \in S,\ g(s) \succsim_X f(s)\}$$

ce qui est la version dans l'incertain de la règle de concordance généralisée (voir Fargier et Perny (2000)). □

3.3.2 Cas probabiliste

Dans la lignée des travaux économiques de Kahneman et Tversky (1979) sur la *prospect theory*, Sugden (2003) a proposé un modèle de décision dans l'incertain tenant compte des niveaux de référence. Sa théorie est construite dans le cadre axiomatique de Savage, et autorise les préférences à varier en fonction du niveau de référence d'où sont vus les actes. En particulier, Sugden propose un modèle d'utilité espérée subjective avec des préférences dépendant de niveaux de référence. Dans son cadre de travail, il y a un unique niveau de référence, que nous noterons r, et la relation de préférence dépend de r si :

$$f \succsim g \iff E_p[v(f,r)] \geq E_p[v(g,r)] \tag{3.16}$$

où E_p représente l'espérance suivant la loi de probabilité p, et $v(.,.)$ est une fonction de comparaison relative. Dans le cadre purement ordinal où nous plaçons notre étude (axiome SNR), la fonction $v(f,r)$ ne peut *a priori* prendre que deux valeurs distinctes : 0 si $f(s) \prec_X r$ et 1 si $f(s) \succsim_X r$.

Le modèle présenté par Sugden dans l'équation (3.16) placé dans le cadre ordinal coïncide avec notre modèle présenté en équation (3.6) en se plaçant dans le cadre probabiliste. En effet, si à chaque état s_i est attachée la probabilité p_i, alors

$$E_p[v(f,r)] = \sum_{s_i \in S} p_i.v_i(f,r)$$

ce qui induit

$$\begin{aligned} f \succsim^r g &\iff E_p[v(f,r)] \geq E_p[v(g,r)] \\ &\iff \sum_{i: f_{s_i} \succsim_X r} p_i \geq \sum_{i: g_{s_i} \succsim_X r} p_i \\ &\iff p(F_r) \geq p(G_r) \\ &\iff F_r \succsim_\Lambda G_r \end{aligned}$$

avec $A \succsim_\Lambda B \iff p(A) \geq p(B)$.

3.3.3 Intégrale de Sugeno

Dans le cadre classique de la théorie de la décision dans l'incertain, la fonction d'utilité espérée permet de calculer, pour chaque acte, un score prenant en compte d'une part la valeur des conséquences de l'acte pour un état de la nature donné, et d'autre part une pondération de cet état de la nature (probabilité ou possibilité d'être dans cet état, importance de l'état pour le décideur...). L'utilité espérée est formalisée de la façon suivante :

$$U(f) = \sum_{s \in S} p(s).u(f(s))$$

avec $\sum_{s \in S} p(s) = 1$ et $u(.)$ une fonction d'utilité de l'échelle des conséquences dans un ensemble ordonné L .

Dans un cadre purement qualitatif, il n'est pas possible d'utiliser l'utilité espérée. L'intégrale de Sugeno, (voir Sugeno (1974), Sugeno (1977), Dubois et al. (1998)), contrepartie qualitative de l'intégrale de Choquet, propose un cadre large incluant une contrepartie qualitative de l'utilité espérée. L'intégrale de Sugeno est une fonction d'utilité qualitative, dont l'expression par rapport à une mesure v sur les parties de S et une fonction d'utilité u de l'ensemble des conséquences vers un ensemble ordonné L est donnée par :

$$Sug(f) = \bigvee_{x \in X} v(F_x) \wedge u(x) \tag{3.17}$$

où $F_x = \{s \in S, u(f(s)) \geq u(x)\}$

Dans le cas où l'ensemble des états de la nature S est fini, Dubois et al. (2001) ont proposé deux critères qualitatifs permettant de comparer les alternatives entre elles : un critère optimiste v^* et un critère pessimiste v_*, définis de la façon suivante, avec $v(.)$ une mesure sur les parties de S :

$$v^*(f) = \bigvee_{s\in S}[v(s) \wedge u(f(s))]$$
$$v_*(f) = \bigwedge_{s\in S}[(1 - v(s)) \vee u(f(s))]$$

Ces critères sont basés sur l'utilisation de l'intégrale de Sugeno (cf. Dubois et al. (2001), Dubois et Prade (1980) et Inuiguichi et al. (1989)). La fonction $v^*(.)$ permet d'obtenir un bon score pour f s'il existe un état plausible où f a une bonne conséquence : c'est une vision optimiste. La fonction $v_*(.)$ permet d'obtenir un bon score pour f si le fait pour f d'avoir de mauvaises conséquences est très peu plausible : c'est une vision pessimiste. La comparaison entre les alternatives se fait alors naturellement à travers la comparaison des valeurs du critère pour chaque alternative. Par exemple dans le cas optimiste nous avons le modèle suivant :

$$f \succsim g \iff Sug(f) \geq Sug(g)$$

Nous allons maintenant montrer les liens reliant les règles d'agrégation à base de niveaux de référence proposées et les modèles basés sur l'utilisation de l'intégrale de Sugeno. Reprenons le modèle (3.1) permettant d'obtenir une relation de préférence sur $\mathcal{A}$ à partir de la comparaison des conséquences avec des niveaux de référence. Le modèle basé sur l'intégrale de Sugeno rentre naturellement dans ce cadre très général. L'objectif de cette partie est d'étudier les liens entre les modèles plus spécifiques proposés antérieurement et les modèles basés sur l'utilisation de l'intégrale de Sugeno.

Modèle à agrégation lexicographique et intégrale de Sugeno

Nous avons vu au théorème 13 la caractérisation des relations de préférence dans l'incertain suivant une règle d'agrégation lexicographique des relations de préférence partielles vis-à-vis des niveaux de référence. Nous pouvons alors nous poser la question des liens entre ce modèle de relations et celui utilisant l'intégrale de Sugeno. Or, même si certaines relations de préférence peuvent être décrites par l'un ou l'autre de ces modèles, il apparaît que non seulement ils ne sont pas équivalents, mais que de plus ils ne recouvrent pas les mêmes situations. En effet, certaines relations de préférence obtenues à partir de l'intégrale de Sugeno ne peuvent être décrites par une relation de type lexicographique sur les relations induites par les niveaux de référence, et de même ces dernières peuvent induire des relations qui ne peuvent être décrites à l'aide de l'intégrale de Sugeno. Nous proposons ci-dessous deux exemples montrant donc que le modèle que nous proposons est bien différent de l'intégrale de Sugeno.

Exemple 60 Relation obtenue par une intégrale de Sugeno ne pouvant être décrite par lexicographie sur les ordres induits

Prenons le problème de décision dans l'incertain suivant. Soit $S = \{s_1, s_2\}$ deux états possibles et $X = \{0, 1, 2, 3\}$ les valeurs des conséquences possibles sur les deux états.

Les niveaux de référence sont $r_1 = 3$*,* $r_2 = 2$ *et* $r_3 = 1$*. Supposons que la procédure de comparaison des alternatives permettant d'obtenir une relation de préférence soit la suivante :*

$$f \succsim g \iff Sug(f) \geq Sug(g)$$

avec $Sug(f) = \bigvee_{x \in X} v(F_x) \wedge u(x)$ *et :*

$I \subseteq S$	$v(I)$
$\emptyset$	0
$\{s_1\}$	$0,5$
$\{s_2\}$	$0,5$
$\{s_1, s_2\}$	1

$x \in X$	$u(x)$
0	0
1	$0,2$
2	$0,7$
3	1

Avec cette règle, nous obtenons entre autres les scores suivant :

f	$Sug(f)$
$(1,1)$	$(v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(0)) \vee (v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(1)) \vee (v(\emptyset) \wedge u(2)) \vee (v(\emptyset) \wedge u(3)) = 0,2$
$(2,1)$	$(v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(0)) \vee (v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(1)) \vee (v(\{s_1\}) \wedge u(2)) \vee (v(\emptyset) \wedge u(3)) = 0,5$
$(2,2)$	$(v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(0)) \vee (v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(1)) \vee (v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(2)) \vee (v(\emptyset) \wedge u(3)) = 0,7$
$(3,0)$	$(v(\{s_1, s_2\}) \wedge u(0)) \vee (v(\{s_1\}) \wedge u(1)) \vee (v(\{s_1\}) \wedge u(2)) \vee (v(\{s_1\}) \wedge u(3)) = 0,5$

La relation de préférence $\succsim$ *complète et transitive sur* $\mathcal{A}$ *contient entre autre la relation suivante :* $(2,2) \succ (3,0) \sim (2,1) \succ (1,1)$*. Les ensembles* F_r *sont alors :*

f	F_3	F_2	F_1
$(1,1)$	$\{s_1, s_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$(2,1)$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1\}$	$\emptyset$
$(2,2)$	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	$\emptyset$
$(3,0)$	$\{s_1\}$	$\{s_1\}$	$\{s_1\}$

Si la relation $\succsim$ *est basée sur une agrégation lexicographique des relations partielles obtenues grâce aux ensemble* F_r*, alors le fait que* $(2,1) \sim (3,0)$ *montre que*

- $(2,1) \sim^1 (3,0)$*, et donc* $\emptyset \sim_\Lambda \{s_1\}$
- $(2,1) \sim^2 (3,0)$
- $(2,1) \sim^3 (3,0)$*, et donc* $\{s_1, s_2\} \sim_\Lambda \{s_1\}$

Cela implique alors que $\emptyset \sim_\Lambda \{s_1\} \sim_\Lambda \{s_1, s_2\}$*. Or ce n'est pas possible car cela conduirait à n'avoir sur* $\mathcal{A}$ *qu'une seule classe d'équivalence, ce qui est faux puisque* $(2,2) \succ (1,1)$*. La relation obtenue grâce à l'intégrale de Sugeno ne peut donc être décrite par une règle suivant le modèle lexicographique du théorème 13.*

Exemple 61 Relation obtenue par lexicographie sur les ordres induits ne pouvant être décrite par une intégrale de Sugeno
Prenons le problème de décision dans l'incertain suivant. Soit $S = \{s_1, s_2\}$ *deux états possibles et* $X = \{0, 1, 2\}$ *les valeurs des conséquences possibles sur les deux états. L'ensemble* $\mathcal{A}$ *est décrit dans le tableau suivant :*

f	00	01	10	11	02	20	12	21	22
$f(s_1)$	0	0	1	1	0	2	1	2	2
$f(s_2)$	0	1	0	1	2	0	2	1	2

Les niveaux de référence sont $r_1 = 2$ *et* $r_2 = 1$*. Supposons que la procédure de comparaison des alternatives permettant d'obtenir une relation de préférence soit la suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f \succ g & \Longleftrightarrow & \mid F_2 \mid > \mid G_2 \mid \\ & ou & \mid F_2 \mid = \mid G_2 \mid \;\; et \;\; \mid F_1 \mid > \mid G_1 \mid \\ f \sim g & \Longleftrightarrow & \mid F_2 \mid = \mid G_2 \mid \;\; et \;\; \mid F_1 \mid = \mid G_1 \mid \end{array}$$

Le tableau ci-dessous reprend les ensembles F_{r_i} *pour tous les actes de* $\mathcal{A}$ *:*

f	F_{r_2}	F_{r_1}	$\mid F_2 \mid$	$\mid F_1 \mid$
00	$\emptyset$	$\emptyset$	0	0
01	$\{s_2\}$	$\emptyset$	1	0
10	$\{s_1\}$	$\emptyset$	1	0
11	$\{s_1, s_2\}$	$\emptyset$	2	0
02	$\{s_2\}$	$\{s_2\}$	1	1
20	$\{s_1\}$	$\{s_1\}$	1	1
12	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_2\}$	2	1
21	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1\}$	2	1
22	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	2	2

Avec cette règle, la relation de préférence $\succsim$ *complète et transitive sur* $\mathcal{A}$ *est :*

$$22 \succ 21 \sim 12 \succ 20 \sim 02 \succ 11 \succ 10 \sim 01 \succ 00$$

Cette relation de préférence peut-elle être obtenue avec une intégrale de Sugeno ? Reprenons le calcul de l'intégrale de Sugeno : $Sug(f) = \bigvee_{x \in X} v(F_x) \wedge u(x)$*, avec* $v(\emptyset) = u(0) = 0$.

	F_x			$Sug(f)$
f	$x=0$	$x=1$	$x=2$	
00	$\{s_1,s_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(0) = 0$
01	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_2\}$	$\emptyset$	$v(\{s_2\}) \wedge u(1)$
10	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1\}$	$\emptyset$	$v(\{s_1\}) \wedge u(1)$
11	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1,s_2\}$	$\emptyset$	$v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(1)$
02	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_2\}$	$\{s_2\}$	$v(\{s_2\}) \wedge u(2)$
20	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1\}$	$\{s_1\}$	$v(\{s_1\}) \wedge u(2)$
12	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_2\}$	$(v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(1)) \vee (v(\{s_2\}) \wedge u(2))$
21	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1\}$	$(v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(1)) \vee (v(\{s_1\}) \wedge u(2))$
22	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1,s_2\}$	$\{s_1,s_2\}$	$v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(2)$

On a $22 \succ 11$*, donc* $Sug(22) = v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(2) > Sug(11) = v(\{s_1,s_2\}) \wedge u(1)$*. Si* $v(\{s_1,s_2\}) \leq u(1)$*, alors* $Sug(22) = v(\{s_1,s_2\}) = Sug(11)$*, ce qui n'est pas possible. Donc* $v(\{s_1,s_2\}) > u(1)$*. cela entraine que* $Sug(11) = u(1)$*. Si* $v(\{s_1\}) \geq u(1)$*, alors* $Sug(10) = u(1)$*, et donc* $Sug(1) = Sug(10)$ *et donc* $11 \sim 10$*, ce qui est faux. Donc* $v(\{s_1\}) < u(1)$*. On a alors* $Sug(20) = v(\{s_1\}) = Sug(10)$ *ce qui implique* $20 \sim 10$*, ce qui n'est pas le cas. La relation de préférence proposée ne peut être décrite avec l'intégrale de Sugeno.*

Ce résultat n'est pas une surprise suite aux travaux développés par Bouyssou et Marchant (2007b), qui ont proposé une caractérisation axiomatique des méthodes de tri non compensatoire dans le cadre de la décision multicritère. En particulier, en lien avec Slowinski et al. (2002), ils montrent qu'une partition peut être représentée par le modèle de tri non compensatoire si et seulement si elle peut être représentée en utilisant une intégrale de Sugeno. Or le modèle que nous proposons ne vérifie pas les mêmes axiomes que le modèle proposé par Bouyssou et Marchant (2007b), et donc que le modèle utilisant une intégrale de Sugeno. En particulier, l'axiome appelé "R-2 gradedness" dans Bouyssou et Marchant (2007b) n'est pas vérifié, comme nous l'avons indiqué en section 2.1.4. Il n'est donc pas étonnant que dans le cadre de la décision dans l'incertain, nous n'ayons pas d'équivalence entre la représentation lexicographique sur les ordres induits et celle obtenue par l'intégrale de Sugeno.

3.3.4 Modèle dual

Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent aux modèles basés sur la comparaison des événements sur lesquels "les conséquences de l'acte sont au moins aussi bonnes que le niveau de référence". Cependant, il existe une vision duale consistant à comparer, pour deux actes différents, les événements pour lesquels ces actes sont considérés comme moins bons qu'un niveau de référence, et regarder l'importance relative de ces événements pour statuer sur la préférence entre deux actes. De manière formelle, cette vision duale substitue à l'ensemble $F_r^+ = \{s \in S, f(s) \succsim_X r\}$ un ensemble $F_r^- = \{s \in S, r \succ_X f(s)\}$, et la comparaison de deux actes par l'intermédiaire d'un niveau de référence s'obtient suivant :

$$f \succsim_r^- g \iff G_r^- \succsim_\Lambda F_r^- \tag{3.18}$$

où $\succsim_\Lambda$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de S telle que $S \succsim_\Lambda \emptyset$. On peut alors définir formellement un modèle pour les relations de préférence pouvant être obtenues par agrégation des profils $(\succsim^{r_1}, \ldots, \succsim^{r_q})$, de la même manière qu'en (3.7) :

$$f \succsim^- g \iff \{r, f \succsim_r^- g\} \succsim_\mathcal{R} \{r, g \succsim_r^- f\} \tag{3.19}$$

où $\succsim_\mathcal{R}$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de $\mathcal{R}$.

Ce modèle possède de nombreuses propriétés identiques à celles développées dans le modèle initial : il suffit pour les obtenir de remplacer dans les axiomes nécessaires l'expression F_r par l'expression F_r^-. Les relations obtenues ne diffèrent pas, dans le fond, de celles obtenues avec le modèle initial, et les caractérisations obtenues pour l'une des formes restent vraies pour l'autre. Cependant, considérant une situation particulière, le fait de prendre l'une ou l'autre de ces formes peut modifier la relation de préférence globale. A titre d'exemple, nous proposons ci-dessous de montrer sur deux exemples (cas d'une relation d'importance autoduale et cas possibiliste) comment les résultats obtenus avec l'un ou l'autre modèle peuvent être identiques ou au contraire différents.

Cas d'une relation d'importance autoduale

Une relation d'importance $\succsim_\Lambda$ sur les événements de S est dite autoduale si $\forall A, B \subseteq S$, $A \succsim_\Lambda B \iff \overline{B} \succsim_\Lambda \overline{A}$. En particulier, est autoduale toute relation d'importance basée sur l'utilisation d'une mesure autoduale v, i.e. telle que $\forall A \subseteq S$, $v(\overline{A}) = 1 - v(A)$. Par exemple, une mesure de probabilité est autoduale. Dans le cas d'une relation d'importance $\succsim_\Lambda$ autoduale, le modèle (3.18) devient :

$$f \succsim_r^- g \iff \{s \in S, r \succ_X f(s)\} \precsim_\Lambda \{s \in S, r \succ_X g(s)\} \tag{3.20}$$

Comme $\{s \in S, f(s) \succsim_X r\} = S - \{s \in S, r \succ_X f(s)\}$, il est immédiat que $\{s \in S, r \succ_X f(s)\} \precsim_\Lambda \{s \in S, r \succ_X g(s)\}$ entraîne $\{s \in S, f(s) \succsim_X r\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \succsim_X r\}$, et donc le modèle proposé correspond exactement au modèle (3.6).

Montrons un exemple de relation non autoduale :

Exemple 62 *Soit $S = \{a, b, c\}$, $X = \{0, 1, 2\}$ et $r = 1$. Prenons la relation d'importance $\succsim_\Lambda$ suivante :*

$$\{a, b, c\} \succ_\Lambda \{b, c\} \succ_\Lambda \{a, b\} \succ_\Lambda \{a, c\} \succ_\Lambda \{b\} \succ_\Lambda \{a\} \succ_\Lambda \{c\} \succ_\Lambda$$

Cette relation n'est pas autoduale car $\{b,c\} \succ_\Lambda \{a,b\}$ *et* $\{a\} \succ_\Lambda \{c\}$. *Comparons alors les actes* $f = (0,2,2)$ *et* $g = (2,2,0)$. *Nous avons :*

- $F_r^+ = \{b,c\}$ *et* $G_r^+ = \{a,b\}$, *donc, comme* $F_r^+ \succ_\Lambda G_r^+$, $f \succ^+ g$
- $F_r^- = \{a\}$ *et* $G_r^- = \{c\}$, *donc, comme* $G_r^+ \prec_\Lambda F_r^-$, $g \succ^- f$

Nous pouvons donc constater que si la relation d'importance n'est pas autoduale, les deux modèles peuvent conduire à des préférences contraires.

Cas possibiliste

Une mesure de possibilité sur l'ensemble des états de la nature permet une description qualitative de l'incertitude (et non quantitative comme dans le cas d'une probabilité). Introduite par Dubois et Prade (1985) (voir aussi Dubois et Prade (1995), Dubois et al. (2001)), la théorie des possibilités permet de traiter le caractère incertain de l'information. Formellement, une distribution de possibilité π sur l'ensemble des états de la nature S est une fonction de S dans $[0,1]$. Elle décrit le degré de plausibilité de chaque état de la nature : si $\pi(s) = 1$, la situation est considéré comme tout à fait plausible ; si $\pi(s) = 0$, la situation est considérée comme impossible.

Exemple 63 *On peut considérer les situations extrêmes suivantes :*

- *connaissance parfaite :* $\exists s_0$ *tel que* $\pi(s_0) = 1$ *et* $\forall s \in S - \{s_0\}$, $\pi(s) = 0$
- *ignorance totale :* $\forall s \in S$, $\pi(s) = 1$

A partir d'une distribution de possibilités, on définit une mesure de possibilité Π sur les sous-ensembles de S en posant que le degré de possibilité d'un ensemble $A \subseteq S$ est égal au degré maximum atteint par un élément de A : $\Pi(A) = \bigvee_{s \in A} \pi(s)$. On pose par convention $\Pi(\emptyset) = 0$. A partir de cette mesure Π, on peut induire un pré-ordre possibiliste sur les sous-ensembles de S par $A \succsim_\pi B \iff \Pi(A) \geq \Pi(B)$. La mesure de possibilité de A indique que l'éventualité de la venue de A est envisageable, mais ne dit rien des autres événements. Or ce n'est pas la même chose de dire que A est le seul événement possible, ce qui fait qu'il devient nécessaire, ou si d'autres événements sont tout aussi plausibles. On regarde alors la mesure $\Pi(\overline{A})$, et on définit une mesure de nécessité par $N(A) = n(\Pi(\overline{A}))$, où n est une fonction décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. La nécessité de A est d'autant plus grande que la possibilité des autres événements est faible.

Supposons que l'on ait choisit de définir la relation $\succsim_\Lambda$ par une mesure de possibilité Π sur les événements de S, par $A \succsim_\Lambda B$ si $\Pi(A) \geq \Pi(B)$. Les modèles (3.6) et (3.18) deviennent alors :

$$f \succsim_r^+ g \iff \Pi(\{s \in S, f(s) \succsim_X r\}) \geq \Pi(\{s \in S, g(s) \succsim_X r\}) \tag{3.21}$$

et

$$\begin{aligned} f \succsim_r^- g &\iff N(\{s \in S, f(s) \succsim_X r\}) \geq N(\{s \in S, g(s) \succsim_X r\}) \\ f \succsim_r^- g &\iff \Pi(\{s \in S, g(s) \prec_X r\}) \geq \Pi(\{s \in S, f(s) \prec_X r\}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

L'exemple suivant montre que les préférences obtenues par les deux règles appliquées aux mêmes actes peuvent être semblables ou différentes suivant les cas :

Exemple 64 *Soit* $S = \{a, b, c, d\}$*, avec les possibilités associées suivantes :* $\pi(a) = 1$*,* $\pi(b) = 0.7$*,* $\pi(c) = 0.5$*,* $\pi(d) = 0.3$*. On suppose que les conséquences des actes s'évaluent sur une échelle ternaire* $\{x, y, z\}$ *avec* $x \succ_X y \succ_X z$*. Soient quatre actes* f, g, k, l *dont les conséquences sont présentées dans le tableau ci-dessous :*

	a	b	c	d
f	y	z	z	x
g	y	y	z	z
k	x	x	y	y
l	y	y	x	x

Supposons que les deux niveaux de référence sont $r_1 = x$ *et* $r_2 = y$*. La comparaison des actes et de niveaux de référence nous donne les possibilités suivantes :*

	f	g	k	l
$\Pi(F_1^+)$	0.3	0	1	0.5
$\Pi(F_1^-)$	1	1	0.5	1
$\Pi(F_2^+)$	1	1	1	1
$\Pi(F_2^-)$	0.7	0.5	0	0

Nous obtenons donc les relations $\begin{cases} f \succ_1^+ g & ; \quad f \sim_1^- g \\ f \sim_2^+ g & ; \quad f \prec_2^- g \end{cases}$ *et* $\begin{cases} k \succ_1^+ l & ; \quad k \succ_1^- l \\ k \sim_2^+ l & ; \quad k \sim_2^- l \end{cases}$.

Supposons que la règle d'agrégation des préférences partielles soit une lexicographie sur les niveaux de référence [2]*. Nous obtenons alors les relations de préférence globales suivantes :* $f \succ^+ g$ *et* $g \succ^- f$ *d'une part (préférence inversée), et* $k \succ^+ l$ *et* $k \succ^- l$ *d'autre part (préférence conservée).*

3.3.5 Décision séquentielle

La décision séquentielle en environnement incertain

Nous avons étudié jusqu'à présent le problème de la prise de décision en environnement incertain réduit au fait de prendre une décision unique ("one-shot"). Cependant, il arrive fréquemment que le décideur ait à planifier et optimiser une suite de décisions étalées dans le temps : à une décision particulière succède un changement de l'état de la nature, qui implique alors une nouvelle décision à prendre. 0n définit une règle décision d comme une fonction de l'ensemble des états S dans l'ensemble des actions $\mathcal{A}$. Une stratégie δ est une suite séquentielle de règles de décision. S'il existe N décisions à prendre , la stratégie

[2]Dans le cas précis exposé en exemple, l'ordre lexicographique n'a pas d'importance

δ peut s'écrire $\delta = [d_n]_{i \in N}$ signifiant qu'en suivant la stratégie δ, à l'instant de décision i la règle d_i est appliquée. Le problème de décision séquentielle est alors de déterminer une stratégie la meilleure possible.

On représente classiquement un problème de décision séquentielle par un arbre de décision :

Définition 21 *Un arbre de décision est un arbre formé de trois types de nœuds : les nœuds chances, les nœuds décisions et les nœuds feuilles. Le nœud racine est généralement un nœud décision. A un nœud décision, le décideur doit choisir une action à sa disposition, c'est-à-dire choisir un des nœuds fils. A un nœud chance, un événement se réalise suivant une certaine loi de probabilité, ce qui a un impact sur la situation de décision à laquelle le décideur fera face à l'étape suivante. Enfin à chaque nœud feuille est associée une situation finale particulière. Le choix en chaque nœud décision X d'une action parmi celles proposées au nœud X consitue une stratégie ou politique de décision.*

Exemple 65 *La figure 3.2 représente un arbre de décisions : il y a deux nœuds décision (A et B), et 4 nœuds chances correspondant aux événements E_1, E_2, E_3, E_4 et à leurs complémentaires. Il y a enfin 8 nœuds feuilles portant les conséquences x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Ici, les trois stratégies possibles sont $[d_1, d_3$ si $E_1]$, $[d_1, d_4$ si $E_1]$ et $[d_2]$.*

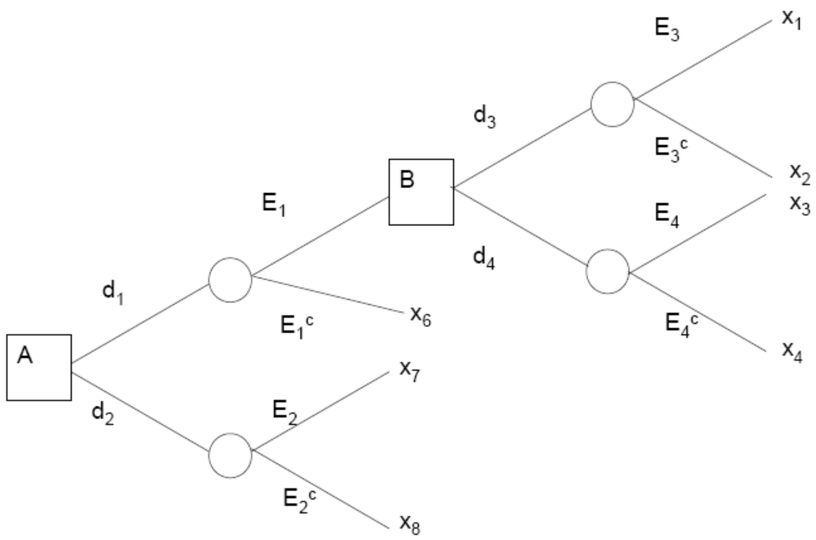

FIG. 3.2 – Exemple de graphe de décision dynamique dans l'incertain

Dans l'approche classique, les feuilles sont valuées à l'aide d'une fonction d'utilité, ce qui, associé à l'utilisation des probabilités de chaque branche issue des nœuds chance, permet de comparer entre elles les stratégies par l'intermédiaire des loteries qu'elles induisent. Or comparer systématiquement toutes les loteries entre elles est un processus coûteux compte tenu du nombre de stratégies possibles, qui croit exponentiellement avec le nombre de niveaux de décision. Le principe de l'induction arrière permet alors de déterminer la stratégie optimale sans comparer explicitement toutes les loteries. Un algorithme d'induction arrière calcule l'utilité associée à chaque action d'un nœud de décision en partant des nœuds feuilles. L'utilité d'un nœud chance est l'espérance des utilités de ses nœuds fils, et l'utilité d'un nœud décision est le maximum des utilités de ses nœuds fils. Le meilleur choix à un nœud de décision donné est de choisir l'action aboutissant à ce maximum.

Exemple 66 *Reprenons le graphe présenté à la figure 3.2 en valuant les conséquences à l'aide d'utilités, et les événements à l'aide de probabilité. Nous obtenons le graphe présenté à la figure 3.3. Appliquons maintenant l'algorithme de l'induction arrière pour choisir la meilleure stratégie de décision. Au nœud chance suivant la décision d_3, nous avons une probabilité de 0.3 d'obtenir une conséquence ayant une utilité de 5, et une probabilité de 0.7 d'obtenir une conséquence ayant une utilité de 2 : l'espérance de ce nœud chance est donc de 2.9. L'espérance du nœud chance suivant la décision d_4 est elle de 4.8. Nous devons donc choisir au nœud décision B d'appliquer la décision avec la plus grande espérance, c'est à dire la décision d_4. Remontons maintenant d'un niveau en arrière : l'espérance au nœud chance suivant la décision d_1 est égale à 0.5 multiplié par 4 plus 0.5 multiplié par l'espérance d'utilité maximale possible en B, c'est à dire ici 4.8 obtenue par le choix de la décision d_4. L'espérance d'utilité obtenue après le choix d_1 s'élève donc à 4.4. De même, l'espérance d'utilité suivant la décision d_2 est égale à 4.2. La stratégie de décision menant à l'espérance d'utilité maximale est donc la séquence de choix* (d_1, d_4).

L'algorithme d'induction arrière suppose que le décideur possède un comportement conséquentialiste : la décision qu'il prend à un instant donné ne dépend que des états futurs et non du passé ou d'autres événements hypothétiques. De plus, l'algorithme d'induction arrière suppose aussi que l'attitude du décideur est cohérente dynamiquement : les décision futures jugées optimales à la racine de l'arbre de décision sont aussi jugées optimales au nœud où elles doivent être effectivement prises. Plus généralement, le problème de la cohérence dynamique d'une procédure de décision est fondamental en décision séquentielle. En effet, si le comportement du décideur est conséquentialiste, une règle de décision non cohérente dynamiquement peut amener le décideur à choisir une stratégie sous-optimale, pouvant même entraîner une perte d'utilité par rapport à une situation initiale (argument de la *pompe monétaire*). On trouvera dans Jaffray (2003) une présentation de ces situations de manipulation du décideur et plus généralement une

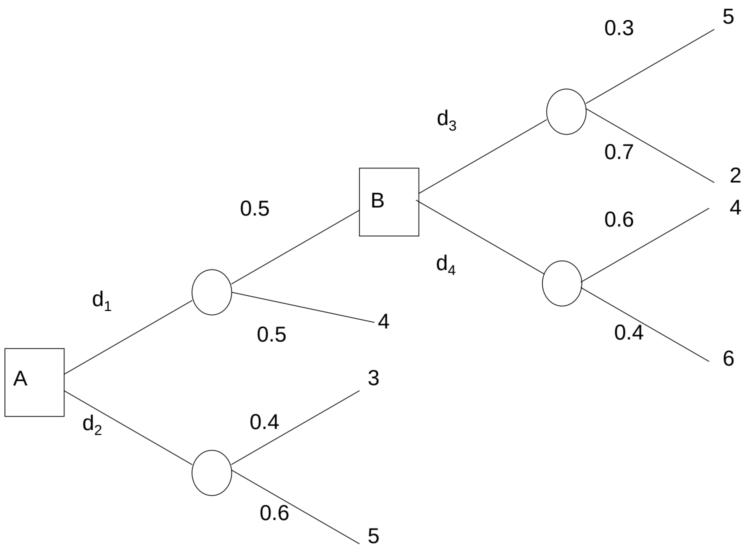

FIG. 3.3 – Exemple de graphe valué de décision dynamique dans l'incertain

présentation de la problématique de la décision séquentielle. En présence de préférences transitives et complètes, un comportement conséquentialiste allié à des préférences cohérentes dynamiquement sont des propriétés suffisantes pour éviter toute manipulation. Les préférences du décideur vérifient alors le principe de la chose sûre de Savage, ce qui permet d'arriver à l'existence de probabilités subjectives et au critère de l'utilité espérée. Il existe cependant d'autres procédures rationnelles de décision séquentielle, qui ne sont ni dynamiquement cohérentes, ni conséquentialistes, tel que par exemple le choix résolu (McClennen (1990)).

Nous nous intéressons maintenant à la décision séquentielle dans le cadre ordinal, et nous montrons l'apport des niveaux de référence pour retrouver des règles de décisions cohérentes dynamiquement.

La décision séquentielle en présence d'informations ordinales

Comme indiqué en section 1.2.5, l'information disponible sur les conséquences est parfois pauvre ou imprécise : il est alors délicat d'obtenir des valeurs précises et quantifiables permettant de mesurer une utilité précise pour chaque conséquence. On peut cependant souvent, dans ces situations, obtenir des informations sur le classement des conséquences les unes par rapport aux autres, et donc utiliser l'ordre induit sur les conséquences pour discriminer les actes possibles. Dans le cadre de la décision séquentielle dans l'incertain, ce manque d'informations fait que les conséquences sont difficilement évaluables à l'aide d'une fonction d'utilité, et que seules des informations sur l'ordre de préférence sur les conséquences peuvent être utilisées. On peut alors envisager l'utilisation de règles dérivées des règles de concordances.

Définition 22 Règle de décision utilisant le principe de concordance
Soit f et $g \in \mathcal{A}$ et $\succsim_\Lambda$ une relation d'importance sur les états de la nature. On dit que $f \succsim g$ si et seulement si :

$$\{s \in S, f(s) \succsim_X g(s)\} \succsim_\Lambda \{s \in S, g(s) \succsim_X f(s)\}$$

Par exemple, si la relation $\succsim_\Lambda$ utilise une distribution de probabilités P sur les états de S, on obtient la règle suivante :

$$f \succsim g \iff \sum_{s \in S} P(\{s, f(s) \succsim_X g(s)\}) \geq \sum_{s \in S} P(\{s, g(s) \succsim_X f(s)\})$$

Cependant, cette approche possède des limites dues à la non-transitivité des relations de préférences obtenues par des règles utilisant le principe de concordance. Comme le montre l'exemple suivant, l'utilisation d'une règle de concordance dans un problème de décision séquentiel avec l'algorithme d'induction arrière peut conduire à choisir une solution dominée. Introduisons juste avant l'exemple la notion de loterie :

Définition 23 *On appelle loterie simple une distribution de probabilité sur un ensemble fini de conséquences. Une loterie composée est une distribution de probabilité sur un nombre fini de loteries simple.*

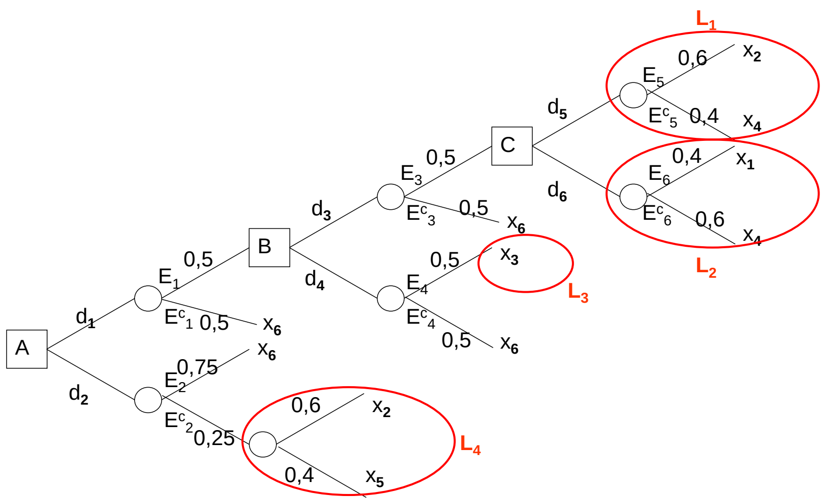

Fig. 3.4 – Exemple de décision dynamique - règle de concordance

Détaillons ici l'exemple présenté figure 3.4 en utilisant l'algorithme d'induction arrière. La relation de préférence sur les conséquences est la suivante : $x_1 \succ_X x_2 \succ_X x_3 \succ_X x_4 \succ_X x_5 \succ_X x_6$. Les quatre stratégies sont les suivantes :

- $\delta_1 = [d_1, d_3 \text{ si } E_1, d_5 \text{ si } E_3]$
- $\delta_2 = [d_1, d_3 \text{ si } E_1, d_6 \text{ si } E_3]$
- $\delta_3 = [d_1, d_4 \text{ si } E_1]$
- $\delta_4 = [d_2]$

Considérons les loteries suivantes :

- $L_1 = [0.6/x_2, 0.4/x_4]$
- $L_2 = [0.4/x_1, 0.6/x_4]$
- $L_3 = [1/x_3]$
- $L_4 = [0.6/x_2, 0.4/x_5]$

Les loteries L_i sont caractérisées par les loi de probabilités $P_i : X \to [0,1]$ qui à x associe $P_i(x)$. La relation de préférence sur les conséquences induit une relation de préférence $\succsim$ sur les actions possibles en un nœud :

$$d_i \succsim d_j \iff \sum_{(x,y):x \succsim_X y} P_i(x)P_j(y) \geq \sum_{(x,y):y \succsim_X x} P_i(x)P_j(y)$$

Appliquons l'algorithme d'induction arrière à cet arbre de décision. Nous obtenons les préférences suivantes :

En C, l'action d_6 mène à la loterie L_2, l'action d_5 à la loterie L_1. Nous avons donc :

$$\sum_{x \succsim_X y} P_6(x)P_5(y) = P_6(x_2) \times P_5(x_4) + P_6(x_4) \times P_5(x_4) = 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6 = 0.6$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{y \succsim_X x} P_6(x)P_5(y) &= P_6(x_2) \times P_5(x_1) + P_6(x_4) \times P_5(x_1) + P_6(x_4) \times P_5(x_4) \\ &= 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4 = 0.64\end{aligned}$$

Nous constatons donc la préférence suivantes sur les actions : $d_6 \succ d_5$. On choisira donc l'action d_6 en C.

En B, la variable aléatoire associée à l'action d_4 a pour distribution de probabilité $[0.5/L_3, 0.5/x_6]$, soit $[0.5/x_3, 0.5/x_6]$. La variable aléatoire associée à l'action d_3 a pour distribution de probabilité $[0.5/L_2, 0.5/x_6]$, soit $[0.2/x_1, 0.3/x_4, 0.5/x_6]$. Le calcul montre les préférences suivantes sur les actions : $d_4 \succ d_3$. On choisira donc l'action d_4 en B.

En A, la variable aléatoire associée à l'action d_2 a pour distribution de probabilité $[0.25/L_4, 0.75/x_6]$, soit $[0.15/x_2, 0.1/x_5, 0.75/x_6]$. La variable aléatoire associée à l'action d_1 a pour distribution de probabilité $[0.25/x_3, 0.75/x_6]$. Les calculs indiquent les préférences suivantes sur les actions : $d_2 \succ d_1$. On choisira donc l'action d_2 en A.

L'algorithme d'induction arrière conduit donc à choisir la stratégie $\delta_4 = [d_2]$. Comparons cette stratégie avec la stratégie $\delta_1 = [d_1, d_3 \text{ si } E_1, d_5 \text{ si } E_3]$. La variable aléatoire associée à la stratégie δ_4 a pour distribution de probabilité $[0.1/x_2, 0.15/x_5, 0.75/x_6]$.

La variable aléatoire associée à la stratégie δ_1 a pour distribution de probabilité $[0.1/x_2, 0.15/x_4, 0.75/x_6]$. Autrement dit, regardons pour les deux stratégies les probabilités $P(\{s : f(s) \succsim_X x_i\})$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
δ_4	0	0,1	0,1	0,1	0,25	1
δ_1	0	0,1	0,1	0,25	0,25	1

Nous constatons que la stratégie δ_1 domine stochastiquement la stratégie δ_4. L'algorithme d'induction arrière ne permet donc pas toujours d'obtenir une bonne stratégie avec la règle de concordance.

La décision dynamique et les niveaux de référence

Comme nous l'avons vu précédemment, l'introduction de niveaux de référence permet d'obtenir des relations de préférence transitives à partir de données ordinales sur les conséquences. Dans l'exemple précédent, l'introduction de niveaux de référence rétablit la transitivité des préférences comme nous l'illustrons via une règle lexicographique ci-dessous.

Définition 24 *Acte associé*
Soit S l'espace des états, c'est à dire des décompositions élémentaires des événements. On appelle acte f associé à une stratégie δ l'élément $f \in \mathcal{A}$ qui à tout état $s \in S$ fait correspondre la conséquence obtenue en appliquant la stratégie δ. On note fEg l'acte composé de l'acte f si l'événement E se réalise et de l'acte g si l'événement E ne se réalise pas.

Illustrons ces notions sur l'exemple de la figure 3.2. L'ensemble S est composé des 16 états $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4^c$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c$, ..., $E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4^c$. Les trois stratégies possibles sont $\delta_1 = [d_1, d_3 \text{ si } E_1]$, $\delta_2 = [d_1, d_4 \text{ si } E_1]$ et $\delta_3 = [d_2]$. Les trois actes associés sont donc f_1, f_2, f_3 dont les conséquences sont :

état	f_1	f_2	f_3
$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$	x_1	x_3	x_7
$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4^c$	x_1	x_4	x_7
$E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4$	x_2	x_3	x_7
$E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c$	x_2	x_4	x_7
...	...	...	...
$E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4^c$	x_6	x_6	x_6

Définition 25 *Règle de décision séquentielle lexicographique*
Une règle de décision séquentielle lexicographique vis-à-vis des niveaux de référence s'exprime de la manière suivante : soient δ_1 et δ_2 deux stratégies, dont les actes associés sont f_1 et f_2. Notons $f_1 \succsim^r f_2$ si et seulement si $\{s \in S | f_1(s) \succsim_X r\} \succsim_\Lambda \{s \in S | f_2(s) \succsim_X r\}$, où $\succsim_\Lambda$ est une relation de vraisemblance sur les ensembles d'états. Notons également $\delta_1 \succsim^r \delta_2 \iff f_1 \succsim^r f_2$ et $\delta_1 \succsim \delta_2 \iff f_1 \succsim f_2$. La règle lexicographique est alors :

$$\begin{aligned} \delta_1 \succ \delta_2 \quad \iff& \quad \delta_1 \succ^{r_1} \delta_2 \\ \textit{ou}& \quad \delta_1 \sim^{r_1} \delta_2 \textit{ et } \delta_1 \succ^{r_2} \delta_2 \\ \dots& \\ \textit{ou}& \quad \forall i < q,\ \delta_1 \sim^{r_i} \delta_2 \textit{ et } \delta_1 \succ^{r_q} \delta_2 \\ \delta_1 \sim \delta_2 \quad \iff& \quad \forall i = 1, \dots, q, \delta_1 \sim^{r_i} \delta_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Soient les trois niveaux de référence $r_1 = x_2$, $r_2 = x_3$, $r_3 = x_4$. la relation $\succsim_\Lambda$ utilisée dans la règle détaillée en équation (3.23) peut par exemple s'obtenir en utilisant les probabilités des états :

$$\forall a, b \subseteq S,\ A \succsim_\Lambda B \iff \sum_{s \in A} P(s) \geq \sum_{s \in B} P(s)$$

L'algorithme d'induction arrière appliqué à l'instance de décision considérée donne donc les préférences suivantes sur les stratégies pour chaque niveau de référence :
- par rapport à r_1 : la relation de préférence est $\delta_1 \sim^{r_1} \delta_4 \succ^{r_1} \delta_2 \succ^{r_1} \delta_3$.
- par rapport à r_2 : la relation de préférence est $\delta_3 \succ^{r_2} \delta_1 \sim^{r_2} \delta_4 \succ^{r_2} \delta_2$.
- par rapport à r_3 : la relation de préférence est $\delta_1 \sim^{r_3} \delta_2 \sim^{r_3} \delta_3 \succ^{r_3} \delta_4$.

L'agrégation lexicographique des relations de préférence vis-à-vis de chaque niveau de référence garantit alors le caractère transitif de la relation de préférence. Comme l'indique en conséquence le théorème 15 ci-dessous, cette règle de décision séquentielle permet alors d'utiliser le principe de l'induction arrière si la relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ sur les sous-ensembles de S est additive, i.e. si $\forall A, B, C \subset S$ avec $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ $A \succsim_\Lambda B \iff A \cup C \succsim_\Lambda B \cup C$.

Théorème 15 *Soit $\succsim$ une relation de préférence sur les actes $\mathcal{A}$ telle que décrite à l'équation (3.23). Si la relation de vraisemblance $\succsim_\Lambda$ sur les sous-ensembles de S est pré-additive, i.e. si $\forall A, B, C \subset S$ avec $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ $A \succsim_\Lambda B \iff A \cup C \succsim_\Lambda B \cup C$, alors la préférence vérifie le principe de la chose sûre (STP) qui s'écrit :*

$$\forall f, g \in \mathcal{A},\ \forall A \subseteq S, \forall h, h' \in \mathcal{A},\ fAh \succsim gAh \iff fAh' \succsim gAh'$$

Preuve du théorème 15 : Soient f, g, h trois actes de $\mathcal{A}$, et $A \subseteq S$ tels que $fAh \succ gAh$. Comme indiqué en équation (3.23), $fAh \succ gAh \Rightarrow \exists r_j \in \mathcal{R}$ tel que $\forall i < j$ $fAh \sim^{r_i} gAh$ et $fAh \succ^{r_j} gAh$. Soit $r \in \mathcal{R}$. Soient $F_r = \{s \in S | f(s) \succsim_X r\}$, $G_r = \{s \in S | g(s) \succsim_X r\}$

et $H_r = \{s \in S | h(s) \succsim_X r\}$. Alors $fAh \succsim^r gAh$ implique que $(F_r \cap A) \cup (H_r \cap \overline{A}) \succsim_\Lambda (G_r \cap A) \cup (H_r \cap \overline{A})$. Par additivité de $\succsim_\Lambda$, nous avons alors $(F_r \cap A) \succsim_\Lambda (G_r \cap A)$. Soit $h' \in \mathcal{A}$ un autre acte et $H'_r = \{s \in S | h'(s) \succsim_X r\}$. Alors par additivité de $\succsim_\Lambda$, nous avons $(F_r \cap A) \cup (H'_r \cap \overline{A}) \succsim_\Lambda (G_r \cap A) \cup (H'_r \cap \overline{A})$. Nous avons donc montré que $\forall f, g, h, h' \in \mathcal{A}$ et $\forall A \subseteq S$, $fAh \succsim^r gAh \iff fAh' \succsim^r gAh'$. Et donc si $\exists r_j \in \mathcal{R}$ tel que $\forall i < j$ $fAh \sim^{r_i} gAh$ et $fAh \succ^{r_j} gAh$, alors $\forall i < j$ $fAh' \sim^{r_i} gAh'$ et $fAh' \succ^{r_j} gAh'$, ce qui montre que

$$fAh \succ gAh \iff fAh' \succ gAh'$$

De même, si $fAh \sim gAh$, nous avons alors Nous retrouvons ici le principe de la chose sûre sur les actes. $\square$

Définissons la préférence conditionnelle à A $\succsim_A$ par $f \succsim_A g \iff \forall h \in \mathcal{A}$ $fAh \succsim gAh$. Comme le principe de la chose sûre est vérifiée, ces préférences conditionnelles sont cohérentes. Les préférences induites sur les actes par notre modèle correspondent aux préférences sur les stratégies vues de la racine de l'arbre. En vertu du principe de la chose sure, on peut alors définir des préférences conditionnelles en chaque nœud décison de l'arbre cohérentes avec la préférence vue de la racine. Pour trouver la solution préférée vue de la racine, on pourra procéder par induction arrière en utilisant en tout nœud décision d'un sous-arbre une relation de préférence locale, qui n'est rien d'autre que la relation de préférence vue de la racine conditionnée par les événements qui mènent à ce sous arbre. Ainsi dans l'arbre de la figure 3.4, pour choisir entre les stratégies $[d3]$ et $[d4]$, on doit utiliser la relation de préférence $\succsim_{E_1}$.

Nous avons montré que si la relation $\succsim_\Lambda$ est additive, la règle de décision séquentielle avec niveaux de référence permet de faire de l'induction arrière. En revanche, on se convaincra aisément que si $\exists A, B, C \subset S$ tels que $A \succ_\Lambda B$ et $A \cup C \prec_\Lambda B \cup C$, alors l'algorithme d'induction arrière ne peut s'appliquer. Partant, on pourrait se demander si la propriété de préadditivité définie par $A \succ_\Lambda B \Rightarrow A \cup C \succsim_\Lambda B \cup C$ suffit. Il n'en est malheureusement rien comme le mondre l'exemple 67.

Exemple 67 *: relation ne vérifiant pas le principe de la chose sûre.*

L'ensemble des conséquences est $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Supposons que les deux niveaux de référence, dans l'ordre lexicographique, soient $r_1 = x_2$ et $r_2 = x_3$. Nous supposons que la relation $\succsim_\Lambda$, préadditive, est telle que $S \succ_\Lambda E_3 \cup E_1^C$, $E_3 \succ_\Lambda E_4$ et $E_3 \cup E_1^C \sim_\Lambda E_4 \cup E_1^C$ et $E_3 \cup E_1^C \sim_\Lambda E_2$.

Regardons les stratégies en A : nous avons trois stratégies possibles : $\delta_1 = [d_1, d_3$ si $E_1]$, $\delta_2 = [d_1, d_4$ si $E_1]$ et $\delta_3 = [d_2]$. Soient f_1, f_2, f_3 les actes associés. Regardons les

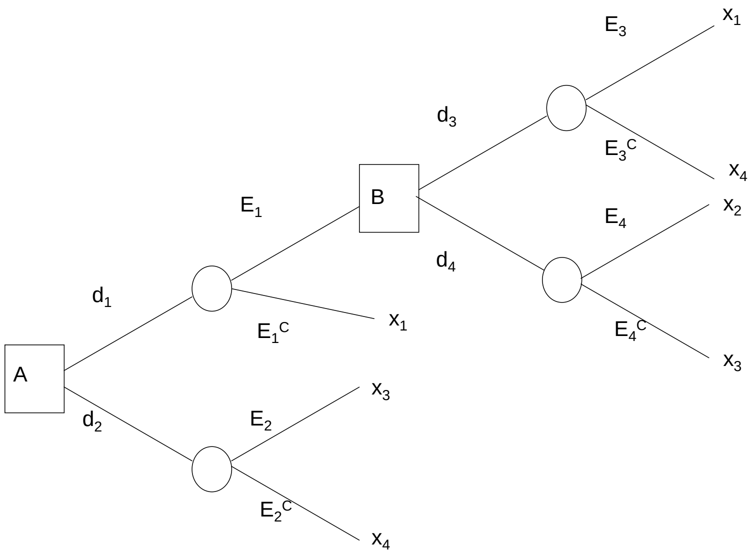

FIG. 3.5 – Exemple de décision dynamique - règle lexicographique avec $\succsim_\Lambda$ préadditive

événements $\{s \in S, f(s) \succsim_X r_i\}$ pour r_1 et r_2 :

	r_1	r_2
f_1	$E_1^C \cup E_3$	$E_1^C \cup E_3$
f_2	$E_1^C \cup E_4$	$E_1^C \cup E_1 = S$
f_3	$\emptyset$	E_2

Les préférences vis-à-vis de chaque niveau de référence sont donc : $\delta_1 \sim^{r_1} \delta_2 \succ^{r_1} \delta_3$ et $\delta_2 \succ^{r_2} \delta_1 \succ^{r_2} \delta_3$. Cela nous donne la relation de préférence globale : $\delta_2 \succ \delta_1 \succ \delta_3$.

Regardons maintenant les stratégies en B : nous avons deux stratégies possibles : $\delta'_1 = [d_3]$ et $\delta'_2 = [d_4]$. Soient f'_1 et f'_2 les restrictions des actes f_1 et f_2 à E_1. Regardons maintenant les événements $\{s \in S, f'(s) \succsim_X r_i\}$ pour r_1 et r_2 :

	r_1	r_2
f'_1	E_3	E_3
f'_2	E_4	E_1

Les préférences vis-à-vis de chaque niveau de référence sont donc : $\delta'_1 \succ^{r_1} \delta'_2$ et $\delta'_2 \succ^{r_2} \delta'_1$. Par agrégation lexicographique sur les niveaux de référence, cela nous donne la relation de préférence globale : $\delta'_1 \succ \delta'_2$. Nous voyons que les décisions prises en A et en B ne sont pas cohérentes dynamiquement, malgré la préadditivité de la relation $\succsim_\Lambda$.

3.4 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre montré l'intérêt de l'introduction de niveaux de référence en décision dans l'incertain. Nous avons présenté un modèle qualitatif à base de niveaux de référence en décision dans l'incertain. Ce modèle possède certaines caractéristiques particulières :

1. Quantité d'information requise : le modèle proposé et ses variantes prennent en compte des données pouvant être purement ordinales. La règle de décision est entièrement déterminée par la donnée de deux relations $\succsim_\Lambda$, relation de vraisemblance sur les événements, et $\succsim_X$, relation de préférence sur les conséquences. Cela différencie nos modèles de la grande majorité des modèles de décision dans l'incertain, qui sont basés sur des critères numériques (qualitatifs ou quantitatifs), nécessitant en particulier des équivalents certains permettant une commensurabilité des différentes échelles utilisées (voir Dubois et al. (2003a)).
2. Intérêt prescriptif : l'utilisation de niveaux de référence permet de dépasser les limites usuelles des méthodes d'agrégation ordinales, par le déplacement du théorème d'Arrow. L'introduction de l'axiome DNR de dépendance vis-à-vis des niveaux de référence à la place de l'axiome d'invariance ordinale classique permet d'échanger le rôle des événements et des conséquences dans l'agrégation ordinale. Alors, $\succsim$ est obtenue par agrégation des relations dépendant des niveaux de référence $\succsim^r, r \in \mathcal{R}$ au lieu des relation dépendant des états $\succsim^s, s \in S$. Une conséquence importante est alors le théorème 13 qui montre que la nécessité d'une structure lexicographique induite par la transitivité de $\succsim$ s'exprime sur l'espace des niveaux de référence plutôt que sur l'espace des événements, ce que nous trouvons plus satisfaisant.
3. Intérêt descriptif : plusieurs études en décision dans l'incertain s'intéressent à la violation du principe de la chose sûre (P2) et la nécessité de modèles pour décrire de telles préférences. De même que l'utilité espérée de Choquet (Schmeidler (1986)) offre cette possibilité, absente dans le modèle de l'utilité espérée, ou que l'utilité de Sugeno (Dubois et al. (1998)) enrichit l'utilité qualitative, les règles de dominances avec niveaux de référence permettent de décrire des relations violant l'axiome P2, ce qui n'existait pas dans les règles de concordance.

Chapitre 4

Exemples applicatifs en décision multicritère

Résumé. Nous présentons dans ce chapitre des exemples applicatifs de l'utilisation de procédures d'agrégation de préférence à partir de points de référence. Le premier exemple montre la procédure à suivre pour éliciter les paramètres de notre modèle permettant de décrire une relation de préférence donnée dans le cadre de l'aide à la décision multicritère. Le deuxième exemple concerne le classement des étudiants d'IUT en fin de formation en vue de poursuites d'études différenciées. Le troisième exemple concerne un classement d'exploitations agricoles en fonction du bien-être des animaux qui y sont élevés. Pour chaque exemple, nous nous attacherons à expliciter le cadre de travail ainsi que la problématique sous-jacente, avant de proposer des procédures concrètes d'agrégation des préférences sur chaque critère en une relation unique. Une analyse des variations des classements en fonction des différents paramètres permettra d'observer la variété des relations obtenues.

4.1 Exemple de processus d'élicitation

Le processus de modélisation des préférences consiste en premier lieu à établir la relation de préférence du décideur : c'est ce qu'on appelle l'élicitation des préférences. Au terme d'un processus interactif entre l'analyste et le décideur, la relation de préférence du décideur est explicitée afin de pouvoir être décrite précisément à l'aide d'un modèle particulier d'agrégation multicritère (voir par exemple Mousseau (2003)). En parallèle, la détermination des paramètres du modèle proposé permet d'obtenir à la fin du processus un modèle compatible avec la relation observée. L'objectif de cette partie est de montrer, sur un exemple concret, la procédure à suivre pour éliciter les paramètres de notre modèle permettant de décrire une relation de préférence donnée dans le cadre de l'aide à la décision multicritère. Nous supposerons que les points de référence sont connus *a priori*. Après avoir vérifié que la relation de préférence satisfait les axiomes nécessaires (en particulier IC$\mathcal{P}$ et SEP), il nous reste à trouver 1) la relation d'importance sur les coalitions de critères, que nous supposerons unique (i.e. ne dépendant pas du point de référence) et 2) la règle d'agrégation des relations de préférence vis-à-vis de chaque point de référence en une relation de préférence globale.

4.1.1 Procédure d'élicitation

1. **Relation d'importance sur les coalitions de critères.** La première étape consiste à retrouver la relation d'importance sur les coalitions de critères, notée $\stackrel{\triangleright}{\sim}$. Pour cela, il faut comparer deux à deux des alternatives qui se comportent de manières différentes par rapport à un point de référence, et de la même manière par rapport à tous les autres points de référence. Pour reprendre la terminologie formelle utilisée précédemment, il faut comparer deux à deux des alternatives x et y telles que pour un point de référence $p^i \in \mathcal{P}$, $C(x, p^i) \neq C(y, p^i)$ et $\forall p \neq p^i \in \mathcal{P}$, $C(x, p) = C(y, p)$. Si la relation de préférence $\succsim$ vérifie l'axiome SEP, les préférences observées sur les différentes paires impliquent une relation de préférence $\stackrel{\triangleright}{\sim}$ cohérente sur les coalitions de critères. Il importe ensuite d'étudier cette relation de préférence sur les ensembles de critères pour déterminer, éventuellement, une règle permettant de décrire cette relation en compréhension, par exemple une règle de majorité simple ou pondérée.

2. **Règle d'agrégation des préférences dépendant de chaque point de référence.** La deuxième étape consiste, une fois obtenue la relation d'importance sur les coalitions de critères, à obtenir les relations de préférence dépendant de chaque point de référence. Il s'agit ensuite de déterminer la règle d'agrégation des préférences dépendant de chaque point de référence en une relation de préférence unique. Les résultats théoriques exposés dans les chapitres précédents permettent

de proposer un type de règle en fonction des propriétés de la relation de préférence globale, telles que transitivité, décomposition, etc. Il importe ensuite d'expliciter les paramètres du modèle choisi : poids attachés aux points de référence dans le cadre d'un modèle additif, ordre d'agrégation dans le cas d'un modèle lexicographique, etc. Dans ce dernier cas, l'ordre d'agrégation entre p^1 et p^2 est déterminé par la relation de préférence entre deux alternatives x et y telles que $x \succ_{p^1} y$ et $x \prec_{p^2} y$.

A des fins didactiques, nous montrerons dans les trois exemples suivants comment le modèle que nous proposons permet de retrouver parfaitement la relation de préférence observée, dans le cas où elle est transitive ou quasi-transitive, ainsi que dans le cas d'une relation non additive. En règle générale, l'élicitation des paramètres d'un modèle décisionnel à partir des préférences données par un décideur s'effectue avec une certaine souplesse. En pratique, on cherche à calculer les paramètres qui minimiseront les différences entre les résultats donnés par un modèle théorique choisi et les relations de préférence observées, plutôt que de chercher le modèle exact au prix d'une complication excessive du modèle. Dans la réalité, un modèle décisionnel permettant d'expliquer une grande majorité (par exemple 90%) des préférences observées est considéré comme un bon modèle. On interroge alors le décideur pour lui demander s'il confirme ses préférences sur les préférences restantes (les 10%), ou s'il change d'avis et considère que les préférences données par le modèle ne lui apparaissent pas comme aberrantes. Cependant, pour mener à bien nos exemples, nous considérerons ici que les préférences observées ont bien été confirmées par le décideur. Nous n'interrogerons donc pas les préférences du décideur, mais nous rechercherons les paramètres permettant à notre modèle d'expliciter parfaitement ces préférences.

4.1.2 Cadre de l'exemple

Afin de tester notre procédure d'élicitation des paramètres, nous avons choisi de partir de données réelles : les données (présentées dans les tableaux 4.1 et 4.2) proviennent de mesures sur des portions de canalisation d'un réseau urbain d'assainissement. Le but du problème de décision est d'établir un classement, ou à tout le moins une relation de préférence complète sur les portions de tuyaux (= les alternatives) afin de pouvoir décider lesquelles nécessitent d'être changées en priorité. A partir des données ainsi collectées, nous allons appliquer une règle d'agrégation afin d'obtenir une relation de préférence, transitive ou quasi-transitive. Le but de notre démarche est de pouvoir expliciter la relation de préférence obtenue à partir de notre modèle, sans avoir connaissance de la règle d'agrégation utilisée initialement.

Concrètement, nous avons produit neuf relations différentes à partir des données considérées. Après tirage au sort d'une des relations, nous avons essayé d'éliciter les paramètres nécessaires à notre modèle pour pouvoir expliquer la relation obtenue. Nous avons sup-

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
p_2	0,2	2,23	37,53	37,96	40,67	0	2,5	1
p_1	15,24	36,96	126,7	128,09	315	7	3,5	1,6
a001	0	0	0	0	34,78	0	1	1
a002	0	0	0	0	128	0	1	1
a003	0	0	0	0	480	0	1	1
a004	0	0	6,9	6,9	6,9	0	3	1
a005	0	0	6,9	6,9	13,79	0	3	1
a006	0	0	6,9	6,9	13,79	0	3	1
a007	0	0	9,3	9,3	0	0	3	1
a008	0	0	10	10	30	0	3	1
a009	0	0	10,81	10,81	172,97	0	3	1
a010	0	0	11,43	11,43	45,71	0	4	1
a011	0	0	28,99	28,99	57,97	0	3	1
a012	0	0	57,14	57,14	38,1	0	3	1
a013	0	0	82,47	82,47	20,62	0	3	1
a014	0	0	83,12	83,12	0	0	1	1
a015	0	0	94,12	94,12	0	0	1	1
a016	0	0	95,52	95,52	0	0	1	1
a017	0	0	100	100	2000	0	3	1
a018	0	0	154,55	154,55	9,09	0	3	1
a019	0	0	177,78	177,78	180,56	0	1	1
a020	0	0	187,18	187,18	61,54	0	3	1
a021	0	0	259,46	259,46	0	0	1	1
a022	0	0	320	320	0	0	1	1
a023	0	0	345	345	100	0	3	1
a024	0	0	492,31	492,31	0	0	1	1
a025	0	1,43	0	0	0	0	1	1
a026	0	1,59	15,87	15,87	285,71	0	3	1
a027	0	1,82	0	0	7,27	0	1	1
a028	0	1,82	0	0	116,36	0	1	1
a029	0	1,89	0	0	120,75	0	1	1
a030	0	1,89	15,09	15,09	296,23	0	3	1
a031	0	2,44	156,1	156,1	60,98	0	1	1
a032	0	2,5	20	20	50	0	4	1
a033	0	2,56	0	0	0	0	1	1
a034	0	2,63	0	0	2,63	0	1	1
a035	0	2,78	11,11	11,11	11,11	0	3	1
a036	0	3,28	0	0	0	0	1	1
a037	0	4,76	0	0	0	0	1	1
a038	0	5	20	20	25	0	3	1
a039	0	5,13	0	0	2,56	0	1	1
a040	0	6,25	133,33	133,33	272,92	0	1	1
a041	0	7,02	28,07	28,07	49,12	0	3	1
a042	0	7,41	14,81	14,81	37,04	0	3	1
a043	0	7,55	30,19	30,19	664,15	0	4	1
a044	0	8,47	20,34	20,34	381,36	0	3	1
a045	0	8,62	6,9	6,9	800	0	4	1
a046	0	8,89	168,89	168,89	106,67	0	4	1
a047	0	9,09	18,18	18,18	81,82	0	4	1
a048	0	9,09	36,36	36,36	72,73	0	3	1
a049	0	9,52	19,05	19,05	76,19	0	3	1
a050	0	10	0	0	0	0	1	1
a051	0	10	320	320	2,5	0	1	1
a052	0	10,13	20,25	20,25	405,06	0	4	1
a053	0	11,43	0	0	14,29	0	1	1
a054	0	11,84	10,53	10,53	309,21	0	4	1
a055	0	12,5	7,14	7,14	175	0	4	1
a056	0	13,33	426,67	426,67	0	0	1	1
a057	0	14,29	0	0	535,71	0	1	1
a058	0	15	330	330	37,5	0	3	1
a059	0	15,63	215,63	215,63	93,75	0	3	1
a060	0	16,67	9,52	9,52	47,62	0	3	1
a061	0	22,22	44,44	44,44	266,67	0	4	1
a062	0	22,22	0	0	1433,33	0	1	1
a063	0	22,86	45,71	45,71	365,71	0	4	1
a064	0	23,53	438,24	438,24	64,71	0	3	1
a065	0	24,24	13,64	13,64	42,42	0	3	1
a066	0	25	233,33	233,33	458,33	0	4	1
a067	0	29,09	21,82	21,82	181,82	0	4	4
a068	0	30,77	107,69	107,69	292,31	0	4	1
a069	0	33,33	13,33	13,33	266,67	0	4	4
a070	0	33,33	0	0	711,11	0	1	1
a071	0	33,8	23,94	23,94	473,24	0	4	1
a072	0	34,48	15,52	15,52	1268,97	0	3	1
a073	0	37,35	15,66	15,66	1085,54	0	4	1
a074	0	38,1	11,9	11,9	2104,76	0	4	1
a075	0	38,71	25,81	25,81	206,45	0	4	3

TAB. 4.1 – liste des alternatives - partie 1

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
a076	0	40	210	210	340	0	4	4
a077	0	40,98	34,43	34,43	340,98	0	4	1
a078	0	42,55	0	0	308,51	0	1	2
a079	0	43,24	175,68	175,68	43,24	0	1	1
a080	0	43,24	2,7	2,7	64,86	0	1	1
a081	0	45	322,5	322,5	132,5	0	1	1
a082	0	45,71	194,29	194,29	68,57	0	3	1
a083	0	45,71	548,57	548,57	262,86	0	1	3
a084	0	46,51	172,09	172,09	67,44	0	4	1
a085	0	50	960	960	252,5	0	1	3
a086	0	50	184	184	330	0	4	3
a087	0	53,85	20,51	20,51	392,31	0	4	4
a088	0	54,55	488,64	488,64	327,27	0	3	1
a089	0	66,67	140,74	140,74	355,56	0	4	4
a090	0	69,23	361,54	361,54	235,9	0	3	1
a091	0	69,57	0	0	347,83	0	1	3
a092	0	70	233,33	233,33	83,33	0	3	1
a093	0	72,73	0	0	363,64	0	1	3
a094	0	80	40	100	520	0	3	4
a095	0	80	52,5	52,5	370	0	4	4
a096	0	81,25	68,75	68,75	418,75	0	4	3
a097	0	85,33	213,33	213,33	458,67	0	4	3
a098	0	92,5	120	120	392,5	0	3	4
a099	0	100	200	200	480	0	4	3
a100	0	106,67	295,56	295,56	453,33	0	3	3
a101	0	108,89	1008,89	1008,89	275,56	0	3	4
a102	0	128	0	0	384	0	1	3
a103	0	140	33,33	33,33	646,67	0	3	1
a104	0	143,48	26,09	26,09	1478,26	0	3	1
a105	0	150	44,74	44,74	576,32	0	1	4
a106	0	156,86	133,33	133,33	862,75	0	4	3
a107	0	161,9	123,81	123,81	866,67	0	4	4
a108	0	200	12,5	12,5	1000	0	1	1
a109	0	210,53	280,7	280,7	1171,93	0	4	4
a110	0	215,79	92,11	92,11	1097,37	0	4	4
a111	0	250	75	75	1300	0	4	4
a112	0	266,67	233,33	233,33	1219,05	0	4	3
a113	0	314,29	171,43	171,43	1600	0	4	3
a114	0	426,67	870	870	1346,67	0	3	4
a115	0	690	755	755	2355	0	3	4
a116	1,05	62,11	164,21	164,21	202,11	0	4	3
a117	1,33	0	26,67	26,67	64	0	4	1
a118	1,33	22,67	138,67	138,67	182,67	0	4	2
a119	2	208	36	36	442	0	1	4
a120	2,5	40	80	80	440	0	4	3
a121	2,63	5,26	52,63	84,21	26,32	0	1	1
a122	2,78	122,22	411,11	411,11	408,33	0	3	4
a123	3,03	203,03	121,21	193,94	1130,3	0	1	3
a124	5	92,5	90	90	475	0	3	4
a125	5,33	49,33	14,67	14,67	405,33	0	3	1
a126	7,02	14,04	35,09	35,09	154,39	7,02	4	1
a127	8,33	53,33	40	40	300	6,67	3	3
a128	8,62	27,59	56,9	56,9	110,34	0	1	3
a129	10	42	200	200	306	0	3	4
a130	12,12	9,09	257,58	257,58	21,21	0	3	1
a131	14,55	305,45	285,45	307,27	883,64	0	3	4
a132	19,28	0	19,28	19,28	424,1	19,28	1	1
a133	21,33	0	37,33	37,33	42,67	21,33	3	1
a134	22,54	0	33,8	33,8	405,63	22,54	4	1
a135	23,88	53,73	31,34	31,34	813,43	23,88	4	4
a136	29,09	21,82	101,82	101,82	232,73	0	4	1
a137	32	2	32	32	32	32	1	1
a138	34	98	288	288	610	0	1	4
a139	35,09	7,02	49,12	49,12	1010,53	35,09	4	1
a140	39,34	21,31	91,8	91,8	800	39,34	4	1
a141	42,11	21,05	52,63	52,63	721,05	42,11	4	1
a142	50	2,5	570	570	132,5	40	3	1
a143	103,23	0	103,23	103,23	77,42	103,23	1	1
a144	116,36	0	116,36	116,36	116,36	0	1	1
a145	116,36	436,36	370,91	370,91	1490,91	0	3	4
a146	142,22	0	142,22	142,22	35,56	142,22	1	1
a147	200	160	320	320	840	0	1	4
a148	262,69	0	191,04	191,04	1241,79	167,16	1	1
a149	338,46	0	338,46	338,46	1876,92	338,46	1	1
a150	461,54	0	461,54	461,54	1558,97	461,54	1	1
a151	462,5	0	462,5	462,5	1500	462,5	1	1
a152	552	0	456	456	1184	424	1	1

Tab. 4.2 – liste des alternatives - partie 2

classement	alternative	classement	alternative	classement	alternative
1	a145	52	a135	102	a12
2	a116	53	a148	102	a13
2	a122	53	a149	102	a41
2	a131	53	a150	102	a48
5	a118	53	a151	102	a49
5	a120	53	a152	102	a60
5	a129	58	a83	102	a65
5	a139	58	a85	109	a91
5	a140	60	a105	109	a93
5	a141	60	a79	109	a102
5	a142	60	a81	109	a132
12	a124	63	a126	113	a21
13	a127	63	a20	113	a22
13	a136	63	a23	113	a24
15	a76	63	a58	113	a78
15	a86	63	a31	113	a108
15	a89	63	a40	118	a10
15	a97	63	a125	118	a57
15	a99	63	a143	118	a62
15	a106	71	a17	118	a70
15	a109	71	a144	118	a80
15	a112	73	a121	123	a9
15	a113	74	a87	123	a11
15	a138	74	a134	123	a26
15	a147	74	a146	123	a30
26	a100	77	a75	123	a14
26	a114	77	a119	123	a15
26	a115	77	a73	123	a16
29	a66	77	a74	123	a35
29	a95	77	a77	123	a38
29	a96	82	a67	123	a42
29	a107	82	a69	133	a137
29	a110	82	a43	134	a3
29	a111	82	a45	135	a4
29	a123	82	a52	135	a5
29	a101	82	a71	135	a6
29	a84	82	a18	135	a7
29	a88	82	a19	135	a8
39	a46	82	a51	135	a2
39	a94	82	a56	135	a28
39	a98	82	a103	135	a29
39	a82	82	a104	135	a33
39	a90	82	a133	135	a34
39	a92	95	a32	135	a36
45	a63	95	a47	135	a37
45	a59	95	a54	135	a39
45	a64	95	a55	135	a50
45	a130	95	a117	135	a53
49	a128	95	a44	150	a1
49	a61	95	a72	150	a25
49	a68			150	a27

TAB. 4.3 – Classement 1

posé connus les deux points de référence utilisés par notre modèle : ils proviennent d'un expert qui a déterminé deux alternatives "types" : une bonne et une mauvaise. La question est donc de trouver les paramètres de notre modèle qui, si possible, conduisent à la relation de préférence considérée. Nous voulons ainsi montrer que le modèle que nous proposons permet de décrire des relations de préférence, et ce quelles que soient les procédures d'agrégation ayant conduit à leur obtention (ceci sous condition de vérification des axiomes nécessaires). Nous le montrons à travers les trois exemples suivants.

4.1.3 Exemple 1 : relation de préférence transitive

La première relation de préférence étudiée est transitive et présentée sous forme de classement au tableau 4.3.

Relation d'importance sur les coalitions de critères

Afin d'obtenir des renseignements sur la relation d'importance sur les coalitions de critères $\overset{\triangleright}{\sim}$, regardons les alternatives a001 et a004 : $C(a001, p^1) = C(a004, p^1) = \emptyset$, $C(a001, p^2) = \{c_6, c_8\}$, $C(a004, p^2) = \{c_6, c_7, c_8\}$. Comme $a004 \succ a001$, cela signifie que $\{c_6, c_7, c_8\} \triangleright \{c_6, c_8\}$.

Afin d'alléger l'écriture, nous n'indiquerons désormais que le couple d'alternatives considérées, ainsi que la conclusion pour la relation $\overset{\triangleright}{\sim}$ dérivée. De même, nous noterons ijk l'ensemble $\{c_i, c_j, c_k\}$. Nous avons donc déjà obtenu que $678 \triangleright 68$. Par l'observation des préférences sur les alternatives, nous obtenons les informations suivantes :

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{a002} & \sim & \text{a008} & \Rightarrow & 568 & \overset{\triangle}{\sim} & 678 \\
\text{a009} & \succ & \text{a002} & \Rightarrow & 5678 & \triangleright & 568 \\
\text{a004} & \succ & \text{a001} & \Rightarrow & 678 & \triangleright & 68 \\
\text{a011} & \sim & \text{a014} & \Rightarrow & 5678 & \overset{\triangle}{\sim} & 3468 \\
\text{a002} & \sim & \text{a033} & \Rightarrow & 568 & \overset{\triangle}{\sim} & 268 \\
\text{a011} & \sim & \text{a035} & \Rightarrow & 5678 & \overset{\triangle}{\sim} & 2678 \\
\text{a013} & \sim & \text{a041} & \Rightarrow & 34678 & \overset{\triangle}{\sim} & 25678 \\
\text{a012} & \succ & \text{a009} & \Rightarrow & 34678 & \triangleright & 5678 \\
\text{a121} & \succ & \text{a012} & \Rightarrow & 123468 & \triangleright & 34678 \\
\text{a010} & \succ & \text{a011} & \Rightarrow & 7 & \triangleright & \emptyset \\
\text{a061} & \succ & \text{a055} & \Rightarrow & 2345678 & \triangleright & 25678 \\
\text{a047} & \sim & \text{a117} & \Rightarrow & 25678 & \overset{\triangle}{\sim} & 15678 \\
\text{a077} & \succ & \text{a032} & \Rightarrow & 78 & \triangleright & 7 \\
\text{a020} & \succ & \text{a017} & \Rightarrow & 34 & \triangleright & 5 \\
\text{a043} & \succ & \text{a072} & \Rightarrow & 57 & \triangleright & 5 \\
\text{a043} & \sim & \text{a067} & \Rightarrow & 57 & \triangleright & 78 \\
\text{a018} & \sim & \text{a019} & \Rightarrow & 34568 & \overset{\triangle}{\sim} & 34678 \\
\text{a020} & \succ & \text{a019} & \Rightarrow & 345678 & \triangleright & 34568 \\
\text{a130} & \sim & \text{a064} & \Rightarrow & 1234678 & \overset{\triangle}{\sim} & 2345678
\end{array}
$$

A ce stade de nos observations, nous pouvons constater que, sur le corpus déjà étudié :

- tout sur-ensemble strict d'une coalition de critères lui est strictement plus important.
- toutes les coalitions de même cardinal sont d'importance équivalente.

Il est alors aisé de vérifier que ces propriétés sont valides sur l'ensemble des alternatives considérées. Nous pouvons donc arriver à la conclusion que le corpus de préférences proposé est compatible avec la relation d'importance suivante :

$$\forall A, B \subseteq 2^N,\ A \overset{\triangleright}{\sim} B \iff |A| \geq |B|$$

Règle d'agrégation des préférences partielles

A partir de la relation d'importance révélée ci-dessus, nous pouvons dériver deux relations de préférence dépendant de chaque point de référence $\succsim_{p^1}$ et $\succsim_{p^2}$. Il nous faut maintenant découvrir la règle d'agrégation de ces préférences permettant d'obtenir la relation de préférence globale. Pour cela, il suffit de regarder le comportement de couples (x, y) tels que $x \succ_{p^1} y$ et $y \succ_{p^2} x$. Prenons par exemple les couples suivants :

- a128 $\succ_{p^1}$ a121 et a128 $\succ_{p^2}$ a121
- a004 $\sim_{p^1}$ a001 et a004 $\succ_{p^2}$ a001
- a091 $\prec_{p^1}$ a125 et a091 $\succ_{p^2}$ a125
- a078 $\succ_{p^1}$ a080 et a078 $\sim_{p^2}$ a080
- a130 $\sim_{p^1}$ a064 et a130 $\sim_{p^2}$ a064

Nous observons les préférences suivantes :

	$\succ_{p^1}$	$\sim_{p^1}$	$\prec_{p^1}$
$\succ_{p^2}$	a128 $\succ$ a121	a004 $\succ$ a001	a091 $\succ$ a 125
$\sim_{p^2}$	a078 $\succ$ a080	a130 $\sim$ a064	

Nous constatons dans le tableau ci-dessus que si $x \succ_{p^2} y$, alors $x \succ y$, et que si $x \sim_{p^2} y$, alors si $x \succ_{p^1} y$, $x \succ y$ et si $x \sim y$, $x \sim_{p^1} y$. Cela montre que la règle d'agrégation des préférences dépendant de chaque point de référence est une règle dictatoriale lexicographique "p^2 puis p^1". En d'autres termes, la préférence globale est celle dictée par le point de référence p^2, sauf si celui-ci laisse les deux alternatives indifférentes, auquel cas la préférence globale est celle dictée par le point de référence p^1.

Conclusion

Nous avons montré que la relation de préférence décrite dans la table 4.3 peut être décrite par notre modèle à l'aide de deux points de référence. En particulier, nous avons établi les paramètres du modèles permettant cette description : la relation d'importance sur les coalitions de critères (basée simplement sur la comparaison du cardinal de ces coalitions), et la règle d'agrégation des préférences dépendant de chaque point de référence (ici l'ordre lexicographique p^2 puis p^1).

4.1.4 Exemple 2 : relation de préférence quasi-transitive

Etudions maintenant le cas d'une relation de préférence quasi-transitive. Il n'est alors plus possible d'obtenir un classement des différentes alternatives puisque nous pouvons avoir $x \sim y$, $y \sim z$ et $x \succ z$. La relation de préférence globale, sous forme de tableau 152×152 étant trop grande pour figurer dans ces pages, nous présentons dans la table 4.4 un extrait de cette relation, suffisant pour nous permettre d'éliciter les paramètres nécessaires.

	a001	a002	a004	a008	a009	a010	a011	a012	a013	a014	a017	a018	a019	a020	a032	a033	a035	a041	a043	a047	a055	a061	a063	a064	a067	a072	a073	a077	a082	a088	a094	a117	a121	a123	a128	a129	a130	a136	a139
a001	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a002	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a004	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a008	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a009	1	1	1	1	0	-1	0	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a010	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a011	1	1	1	1	0	-1	0	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a012	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	-1	-1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a013	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	-1	-1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a014	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a017	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	-1	0	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1
a018	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a019	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	-1	0	-1	0	1	1	0	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a020	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1	1	1	0	1	-1	0	-1	-1
a032	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	0	-1	0	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a033	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a035	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a041	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	-1	-1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a043	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	-1	0	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	0	0	-1
a047	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	0	-1	0	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a055	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	0	-1	0	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a061	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1	1	1	0	0	-1	0	-1	-1
a063	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	0	-1
a064	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	-1	0	0	1	0	0	-1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1
a067	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	1	1	-1	0	-1	0	0	-1
a072	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	-1	-1	0	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a073	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	1	1	-1	0	-1	0	0	-1
a077	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	1	1	-1	0	-1	0	0	-1
a082	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	0	-1
a088	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	-1	1	0	-1
a094	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	-1	1	0	-1
a117	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a121	1	1	1	1	1	0	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
a123	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
a128	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	1	1	1	1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	-1	-1
a129	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
a130	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	-1	1	1	0	1	-1	0	-1	-1
a136	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	-1	1	0	-1
a139	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0

TAB. 4.4 – Classement 2 - Légende : $1 = \succ$, $0 = \sim$, $-1 = \prec$

Relation d'importance sur les coalitions de critères

Les points de référence n'ayant pas changé, nous pouvons reprendre les mêmes couples que dans la partie précédente (relation transitive).

a008 $\succ$ a002 $\Rightarrow$ 678 $\rhd$ 568
a009 $\succ$ a002 $\Rightarrow$ 5678 $\rhd$ 568
a004 $\succ$ a001 $\Rightarrow$ 678 $\rhd$ 68
a011 $\succ$ a014 $\Rightarrow$ 5678 $\rhd$ 3468
a002 $\succ$ a033 $\Rightarrow$ 568 $\rhd$ 268
a011 $\succ$ a035 $\Rightarrow$ 5678 $\rhd$ 2678
a041 $\sim$ a013 $\Rightarrow$ 25678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 34678
a012 $\succ$ a009 $\Rightarrow$ 34678 $\rhd$ 5678
a012 $\succ$ a121 $\Rightarrow$ 34678 $\rhd$ 123468
a010 $\succ$ a011 $\Rightarrow$ 7 $\rhd$ $\emptyset$
a061 $\succ$ a055 $\Rightarrow$ 2345678 $\rhd$ 25678
a047 $\succ$ a117 $\Rightarrow$ 25678 $\rhd$ 15678
a077 $\succ$ a032 $\Rightarrow$ 78 $\rhd$ 7
a020 $\succ$ a017 $\Rightarrow$ 34 $\rhd$ 5
a043 $\succ$ a072 $\Rightarrow$ 57 $\rhd$ 5
a067 $\succ$ a043 $\Rightarrow$ 78 $\rhd$ 57
a018 $\succ$ a019 $\Rightarrow$ 34678 $\rhd$ 34568
a020 $\succ$ a019 $\Rightarrow$ 345678 $\rhd$ 34568
a064 $\sim$ a130 $\Rightarrow$ 2345678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 1234678

Faisons l'hypothèse que la relation d'importance sur les coalitions de critères peut s'expliquer par une somme pondérée. Les relations ci-dessus permettraient alors de déduire que, en notant w_i le poids du critère i :

678 $\rhd$ 568 $\Rightarrow$ $w_7 > w_5$
5678 $\rhd$ 568 $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
678 $\rhd$ 68 $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
5678 $\rhd$ 3468 $\Rightarrow$ $w_5 + w_7 > w_3 + w_4$
568 $\rhd$ 268 $\Rightarrow$ $w_5 > w_2$
5678 $\rhd$ 2678 $\Rightarrow$ $w_5 > w_2$
25678 $\rhd$ 34678 $\Rightarrow$ $w_2 + w_5 > w_3 + w_4$
34678 $\rhd$ 5678 $\Rightarrow$ $w_3 + w_4 > w_5$
34678 $\rhd$ 123468 $\Rightarrow$ $w_7 > w_1 + w_2$
7 $\rhd$ $\emptyset$ $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
2345678 $\rhd$ 25678 $\Rightarrow$ $w_3 + w_4 > w_\emptyset$
25678 $\rhd$ 15678 $\Rightarrow$ $w_2 > w_1$
78 $\rhd$ 7 $\Rightarrow$ $w_8 > w_\emptyset$

$34 \quad \rhd \quad 5 \quad \Rightarrow \quad w_3 + w_4 > w_5$

$57 \quad \rhd \quad 5 \quad \Rightarrow \quad w_7 > w_\emptyset$

$78 \quad \rhd \quad 57 \quad \Rightarrow \quad w_8 > w_5$

$34678 \quad \rhd \quad 34568 \quad \Rightarrow \quad w_7 > w_5$

$345678 \quad \rhd \quad 34568 \quad \Rightarrow \quad w_7 > w_\emptyset$

$2345678 \quad \rhd \quad 1234678 \quad \Rightarrow \quad w_5 > w_1$

Nous pouvons constater que les inégalités sont cohérentes entre elles, et conduisent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_2 & > & w_1 \\ w_5 & > & w_2 \\ w_3 + w_4 & > & w_5 \\ w_5 + w_2 & > & w_3 + w_4 \\ w_7 & > & w_5 \\ w_7 & > & w_1 + w_2 \\ w_8 & > & w_5 \end{array}\right.$$

Ces inégalités n'étant pas suffisantes, il faut passer en revue l'ensemble des préférences entre les alternatives données par la relation de préférence globale pour obtenir d'autres égalités ou inégalités.

En particulier, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{array}{lcllcl} a067 & \sim & a073 & \Rightarrow & w_2 + w_5 = w_8 \\ a063 & \sim & a082 & \Rightarrow & w_5 + w_7 = w_2 + w_3 + w_4 \\ a094 & \sim & a088 & \Rightarrow & w_8 = w_3 + w_4 \\ a128 & \sim & a136 & \Rightarrow & w_8 = w_1 + w_7 \\ a139 & \sim & a129 & \Rightarrow & w_6 = w_7 \end{array}$$

En posant $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} w_1 = 1 \\ w_2 = 2 \\ w_5 = 3 \\ w_8 = 5 \\ w_7 = 4 \\ w_6 = 4 \\ w_3 + w_4 = 5 \end{array}\right.$$

Aucun élément ne permettant de trancher dans le corpus étudié, nous pouvons prendre les valeurs de w_3 et w_4 que nous souhaitons du moment que leur somme fait 5 ; par exemple, nous pouvons décider que $w_3 = w_4 = 2,5$.

Nous obtenons donc une relation d'importance sur les coalitions de critères $\stackrel{\triangleright}{\sim}$ telle que :

$$A \stackrel{\triangleright}{\sim} B \iff \sum_{i \in A} w_i \geq \sum_{i \in B} w_i$$

Règle d'agrégation des préférences partielles

A partir de la relation d'importance révélée ci-dessus, nous pouvons dériver deux relations de préférences dépendant de chaque point de référence $\succsim_{p^1}$ et $\succsim_{p^2}$. Il nous faut maintenant découvrir la règle d'agrégation de ces préférences permettant d'obtenir la relation de préférence globale. Comme précédemment, il suffit de regarder le comportement de couples (x, y) tels que $x \succ_{p^1} y$ et $y \succ_{p^2} x$. Prenons par exemple les couples suivants :

- a137 $\succ_{p^1}$ a027 et a137 $\succ_{p^2}$ a027
- a035 $\sim_{p^1}$ a016 et a035 $\succ_{p^2}$ a016
- a0146 $\prec_{p^1}$ a030 et a146 $\succ_{p^2}$ a030
- a044 $\succ_{p^1}$ a065 et a044 $\sim_{p^2}$ a065
- a032 $\sim_{p^1}$ a047 et a032 $\sim_{p^2}$ a047

Nous observons les préférences suivantes :

	$\succ_{p^1}$	$\sim_{p^1}$	$\prec_{p^1}$
$\succ_{p^2}$	a137 $\succ$ a027	a035 $\succ$ a016	a030 $\sim$ a146
$\sim_{p^2}$	a044 $\succ$ a065	a032 $\sim$ a047	

Nous constatons donc qu'il existe un "droit de veto" de la part de chaque point de référence : autrement dit, la règle d'agrégation des préférences dépendant de chaque point de référence est une règle oligarchique. En d'autres termes,

$$\begin{array}{lcl} x \succ y & \iff & \exists p^i \mid x \succ_{p^i} y \text{ et } \nexists p^j \mid x \prec_{p^i} y \\ x \sim y & \text{sinon} & \end{array}$$

4.1.5 Exemple 3 : relation non additive

Nous étudions maintenant le cas d'une troisième relation de préférence transitive, présentée au tableau 4.5.

Relation d'importance sur les coalitions de critères

Les points de référence n'ayant pas changé, nous pouvons reprendre les mêmes couples que dans les parties précédentes.

$$\begin{array}{lllllll} \text{a008} & \succ & \text{a002} & \Rightarrow & 678 & \triangleright & 568 \\ \text{a009} & \succ & \text{a002} & \Rightarrow & 5678 & \triangleright & 568 \\ \text{a004} & \succ & \text{a001} & \Rightarrow & 678 & \triangleright & 68 \\ \text{a014} & \succ & \text{a011} & \Rightarrow & 3468 & \triangleright & 5678 \end{array}$$

classement	alternative	classement	alternative	classement	alternative
1	a145	53	a031	102	a014
2	a122	53	a040	102	a015
2	a131	53	a079	102	a016
4	a116	53	a081	102	a041
4	a118	53	a105	102	a044
4	a142	53	a130	102	a048
7	a120	59	a135	102	a049
7	a129	60	a146	102	a060
9	a124	60	a148	102	a065
9	a139	60	a149	102	a072
9	a140	60	a150	112	a091
9	a141	60	a151	112	a093
13	a136	60	a152	112	a102
14	a127	66	a018	112	a134
15	a076	66	a020	116	a108
15	a086	66	a023	116	a133
15	a089	66	a058	118	a078
15	a097	70	a125	118	a117
15	a099	70	a126	120	a057
15	a106	70	a143	120	a062
15	a109	73	a144	120	a070
15	a112	74	a012	120	a080
15	a113	74	a013	124	a132
15	a138	74	a017	124	a137
15	a147	74	a121	126	a010
26	a100	78	a087	127	a004
26	a114	79	a019	127	a005
26	a115	79	a021	127	a006
29	a088	79	a022	127	a007
30	a046	79	a024	127	a008
30	a066	79	a051	127	a009
30	a084	79	a056	127	a011
30	a095	79	a073	127	a026
30	a096	79	a074	127	a030
30	a101	79	a077	127	a035
30	a107	79	a119	127	a038
30	a110	89	a067	127	a042
30	a111	89	a069	139	a001
39	a059	89	a075	139	a002
39	a064	89	a103	139	a003
39	a082	89	a104	139	a025
39	a090	94	a032	139	a027
39	a092	94	a043	139	a028
39	a094	94	a045	139	a029
39	a098	94	a047	139	a033
39	a123	94	a052	139	a034
47	a061	94	a054	139	a036
47	a063	94	a055	139	a037
47	a068	94	a071	139	a039
47	a128			139	a050
51	a083			139	a053
51	a085				

TAB. 4.5 – Classement 3

a002 $\sim$ a033 $\Rightarrow$ 568 $\overset{\triangle}{\sim}$ 268
a011 $\sim$ a035 $\Rightarrow$ 5678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 2678
a041 $\succ$ a013 $\Rightarrow$ 25678 $\rhd$ 34678
a012 $\succ$ a009 $\Rightarrow$ 34678 $\rhd$ 5678
a012 $\sim$ a121 $\Rightarrow$ 34678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 123468
a010 $\succ$ a011 $\Rightarrow$ 7 $\rhd$ $\emptyset$
a061 $\succ$ a055 $\Rightarrow$ 2345678 $\rhd$ 25678
a047 $\succ$ a117 $\Rightarrow$ 25678 $\rhd$ 15678
a077 $\succ$ a032 $\Rightarrow$ 78 $\rhd$ 7
a020 $\succ$ a017 $\Rightarrow$ 34 $\rhd$ 5
a043 $\succ$ a072 $\Rightarrow$ 57 $\rhd$ 5
a067 $\succ$ a043 $\Rightarrow$ 78 $\rhd$ 57
a018 $\succ$ a019 $\Rightarrow$ 34678 $\rhd$ 34568
a020 $\succ$ a019 $\Rightarrow$ 345678 $\rhd$ 34568
a018 $\sim$ a020 $\Rightarrow$ 34678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 345678
a064 $\succ$ a130 $\Rightarrow$ 2345678 $\rhd$ 1234678

Faisons l'hypothèse que la relation d'importance sur les coalitions de critères peut s'expliquer par une somme pondérée. Les relations ci-dessus permettraient alors de déduire que, en notant w_i le poids du critère i :

678 $\rhd$ 568 $\Rightarrow$ $w_7 > w_5$
5678 $\rhd$ 568 $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
678 $\rhd$ 68 $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
3468 $\rhd$ 5678 $\Rightarrow$ $w_3 + w_4 > w_5 + w_7$
568 $\overset{\triangle}{\sim}$ 268 $\Rightarrow$ $w_5 = w_2$
5678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 2678 $\Rightarrow$ $w_5 = w_2$
25678 $\rhd$ 34678 $\Rightarrow$ $w_2 + w_5 > w_3 + w_4$
34678 $\rhd$ 5678 $\Rightarrow$ $w_3 + w_4 > w_5$
34678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 123468 $\Rightarrow$ $w_7 = w_1 + w_2$
7 $\rhd$ $\emptyset$ $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
2345678 $\rhd$ 25678 $\Rightarrow$ $w_3 + w_4 > w_\emptyset$
25678 $\rhd$ 15678 $\Rightarrow$ $w_2 > w_1$
78 $\rhd$ 7 $\Rightarrow$ $w_8 > w_\emptyset$
34 $\rhd$ 5 $\Rightarrow$ $w_3 + w_4 > w_5$
57 $\rhd$ 5 $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$
78 $\rhd$ 57 $\Rightarrow$ $w_8 > w_5$
34678 $\rhd$ 34568 $\Rightarrow$ $w_7 > w_5$
345678 $\rhd$ 34568 $\Rightarrow$ $w_7 > w_\emptyset$

34678 $\overset{\triangle}{\sim}$ 345678 $\Rightarrow$ $w_5 = w_\emptyset$

2345678 $\rhd$ 1234678 $\Rightarrow$ $w_5 > w_1$

Ces inégalités conduisent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lrcllrcl} (1) & w_2 & > & w_1 & (6) & w_5 + w_2 & > & w_3 + w_4 \\ (2) & w_2 & = & w_\emptyset & (7) & w_7 & > & w_\emptyset \\ (3) & w_5 & = & w_\emptyset & (8) & w_7 & = & w_1 + w_2 \\ (4) & w_3 + w_4 & > & w_5 & (9) & w_8 & > & w_\emptyset \\ (5) & w_3 + w_4 & > & w_5 + w_7 & & & & \end{array}\right.$$

les inégalités (2), (5) et (7) combinées indiquent que $w_3 + w_4 > w_5 + w_2$, ce qui est incompatible avec l'inégalité (6) : la relation d'importance ne peut donc pas s'expliquer à partir d'une somme pondérée sur les critères : elle n'est pas additive. Comme indiqué en introduction, nous supposons ici, à des fins didactiques, que les préférences apparaissant comme conflictuelles ont bien été confirmées par le décideur. On peut alors s'interroger pour savoir si la relation d'importance est additive d'ordre 2. Pour ce faire, nous allons considérer les masses de Moebius des ensembles d'un et deux critères pour la fonction de pondération. On appelle masse de Moebius d'un ensemble S pour une fonction d'ensemble v l'indice $M^v(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T)$. Cela correspond aux poids relatifs de chaque sous-ensemble de S. La transformée inverse donne $v(S) = \sum_{TsubsetS} M^v(T) \forall S \subset N$. Calculons ici la fonction d'importance v de 2^N dans $\mathbb{R}$ qui à tout ensemble de critères lui associe son score d'importance, additif d'ordre deux. Reprenons les inégalités en essayant de calculer les masses de Moebius associées en se limitant aux masses d'ordre 2. Regardons sur un exemple comment fonctionne la masse de Moebius :

Nous savons que 268 $\overset{\triangle}{\sim}$ 568. Nous avons alors :

$$\left\{\begin{array}{l} M^v(2) = v_2 \\ M^v(5) = v_5 \\ M^v(6) = v_6 \\ M^v(8) = v_8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} M^v(26) = v(26) - v_2 - v_6 \\ M^v(28) = v(28) - v_2 - v_8 \\ M^v(56) = v(56) - v_5 - v_6 \\ M^v(58) = v(58) - v_5 - v_8 \\ M^v(68) = v(68) - v_6 - v_8 \end{array}\right.$$

$M^v(268) = 0$ $\qquad$ $M^v(568) = 0$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} v(268) = v(26) + v(28) + v(68) - v(2) - v(6) - v(8) \\ v(568) = v(56) + v(58) + v(68) - v(5) - v(6) - v(8) \end{array}\right.$$

et donc, 568 $\overset{\triangle}{\sim}$ 268 implique que $v_{26} + v_{28} - v_2 = v_{56} + v_{58} - v_5$

Il est alors théoriquement possible de résoudre un système d'inéquations obtenues à partir des relations de préférence pour déterminer les valeurs prises par la fonction v pour les ensembles de critères. Cependant, avec 8 critères nous avons ici, même en nous limitant aux ensembles de un et deux critères, un total de 64 ensembles différents. La relation de préférence 4.5 n'apparaît alors pas assez riche pour obtenir suffisamment d'inéquations pour résoudre un système à 64 inconnues. Nous allons donc pour résoudre ce problème appliquer le rasoir d'Occam, en postulant que pour la plupart des ensembles ab, $M^v(ab) = 0$, ou autrement dit $v(ab) = v(a) + v(b)$. De manière plus précise, nous voyons même que la contradiction dans le système d'inégalités engendré par l'hypothèse d'une fonction additive provient de l'ensemble 25. Reprenons donc les inégalités précédentes en posant $\forall ab \neq 25$, $M^v(ab) = 0$. Nous obtenons alors :

$$\begin{array}{ccccl}
678 & \rhd & 68 & \Rightarrow & v(7) > v(\emptyset) \\
678 & \rhd & 568 & \Rightarrow & v(7) > v(5) \\
3468 & \rhd & 5678 & \Rightarrow & v(3) + v(4) > v(5) + v(7) \\
568 & \overset{\triangle}{\sim} & 268 & \Rightarrow & v(5) = v(2) \\
25678 & \rhd & 34678 & \Rightarrow & v(25) > v(3) + v(4) \\
34678 & \overset{\triangle}{\sim} & 123468 & \Rightarrow & v(7) = v(1) + v(2) \\
25678 & \rhd & 15678 & \Rightarrow & v(25) > v(5) + v(1) \\
78 & \rhd & 7 & \Rightarrow & v(8) > v(\emptyset) \\
78 & \rhd & 57 & \Rightarrow & v(8) > v(5)
\end{array}$$

Ces inégalités conduisent au système suivant en posant $v(\emptyset) = 0$:

$$\left\{\begin{array}{lrcl}
(1) & v(7) & > & 0 \\
(2) & v(7) & > & v(5) \\
(3) & v(3) + v(4) & > & v(5) + v(7) \\
(4) & v(2) & = & v(5) \\
(5) & v(25) & > & v(3) + v(4)
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{lrcl}
(6) & v(7) & = & v(1) + v(2) \\
(7) & v(25) & > & v(1) + v(5) \\
(8) & v(8) & > & 0 \\
(9) & v(8) & > & v(5)
\end{array}$$

Ces inégalités n'étant pas suffisantes pour déterminer toutes les inconnues, il faut passer en revue l'ensemble des relations pour obtenir d'autres égalités ou inégalités.

En particulier, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{array}{ccccl}
a073 & \succ & a067 & \Rightarrow & v(25) > v(8) \\
a088 & \succ & a094 & \Rightarrow & v(3) + v(4) > v(8) \\
a136 & \succ & a128 & \Rightarrow & v(1) + v(7) > v(8) \\
a128 & \sim & a124 & \Rightarrow & v(25) = v(3) + v(4) + v(7) \\
a118 & \sim & a142 & \Rightarrow & v(7) + v(8) = v(1) + v(6) \\
a139 & \succ & a129 & \Rightarrow & v(3) + v(4) + v(8) > v(1) + v(6) + v(7) \\
a123 & \sim a098 & \Rightarrow & v(4) = 0 & \\
a101 & \sim a084 & \Rightarrow & v(7) = v(8) &
\end{array}$$

En posant $v(1) = 1$, on obtient par exemple les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} v(1) = 1 & v(2) = 0 \\ v(3) = 3 & v(4) = 0 \\ v(5) = 0 & v(6) = 1 \\ v(7) = 1 & v(8) = 1 \end{cases}$$

et $v(25) > 4$

Nous obtenons donc une relation d'importance sur les coalitions de critères $\overset{\triangleright}{\sim}$ telle que :

$$A \overset{\triangleright}{\sim} B \iff \sum_{i \in A} v(i) + \sum_{i,j \in A \times A} v(ij) \geq \sum_{i \in B} v(i) + \sum_{i,j \in B \times B} v(i,j)$$

Révélation de la règle d'agrégation des préférences partielles

A partir de la relation d'importance révélée ci-dessus, nous pouvons dériver deux relations de préférence dépendant de chaque point de référence $\succsim_{p^1}$ et $\succsim_{p^2}$. Il nous faut maintenant découvrir la règle d'agrégation de ces préférences permettant d'obtenir la relation de préférence globale. Comme précédemment, il suffit de regarder le comportement de couples (x, y) tels que $x \succ_{p^1} y$ et $y \succ_{p^2} x$. Prenons par exemple les couples suivants :

- a010 $\succ_{p^1}$ a003 et a010 $\succ_{p^2}$ a003
- a010 $\sim_{p^1}$ a009 et a010 $\succ_{p^2}$ a009
- a019 $\prec_{p^1}$ a011 et a019 $\succ_{p^2}$ a011
- a013 $\succ_{p^1}$ a014 et a013 $\sim_{p^2}$ a014
- a015 $\sim_{p^1}$ a016 et a015 $\sim_{p^2}$ a016

Nous observons les préférences suivantes :

	$\succ_{p^1}$	$\sim_{p^1}$	$\prec_{p^1}$
$\succ_{p^2}$	a010 $\succ$ a003	a010 $\succ$ a009	a011 $\sim$ a019
$\sim_{p^2}$	a013 $\succ$ a014	a015 $\sim$ a016	

Nous constatons donc qu'il existe un ordre d'agrégation lexicographique p^1 puis p^2 :

$$\begin{array}{rcl} x \succ y & \iff & x \succ_{p^1} y \\ & \text{ou} & x \sim_{p^1} y \text{ et } x \succ_{p^2} y \\ x \sim y & \text{sinon} & \end{array}$$

Conclusion

Nous avons montré dans cette partie trois exemples d'élicitation des paramètres de la procédure d'agrégation des préférences utilisant notre modèle. Cet exemple montre qu'une telle élicitation est tout à fait envisageable sur des bases de données de 150 alternatives. La principale difficulté réside dans le fait que les données disponibles ne couvrent pas tout le champ des relations d'importance : il s'agit alors de produire une relation compatible avec les bribes d'information disponibles. Le processus d'élicitation consiste alors à trouver des paramètres du modèle compatibles avec les résultats visibles du choix du décideur.

4.2 Application au classement d'étudiants

4.2.1 Problématique générale de la moyenne de notes

Docimologie

Dans le système scolaire français, la comparaison de deux étudiants repose uniquement sur la comparaison de la moyenne des notes obtenues au cours des différentes évaluations de leur formation. Dans l'enseignement supérieur, les différentes matières enseignées sont réparties en modules, correspondant chacun à un certain nombre de notions élémentaires à acquérir pour l'étudiant. Les modules sont regroupés en Unités d'Enseignements (UE), formant des ensembles cohérents. La règle pour qu'un étudiant valide une période de formation (semestre, année...) consiste généralement en une condition sur la moyenne globale, éventuellement coefficientée, assortie généralement de conditions "veto" sur la moyenne à l'intérieur de chaque UE. Le système est donc compensatoire (dans la limite des vetos potentiels).

La docimologie (science d'étude des examens) a depuis longtemps montré les limites de la notation "de 0 à 20" comme évaluation pertinente du niveau des étudiants (voir par exemple Pieron (1963), Hadji (1997)). En particulier, il a été prouvé que de nombreux biais influent sur la soi-disante objectivité de la note : effet de fatigue ou d'ennui, effet de halo, effet de relativation, effet de contamination, effet de l'ordre de correction, effet de trop grande indulgence et de trop grande sévérité...

Des notes données au dixième de points sont donc d'une précision absurde. Cependant, pour aussi intéressantes qu'elles soient, nous ne nous pencherons pas sur ces questions ici, et nous supposerons par la suite que les moyennes des notes par modules reflètent véritablement le niveau de l'étudiant dans ces modules. Nous supposerons aussi qu'il y a une certaine logique dans le regroupement en UE des modules, et donc qu'il n'est pas dénué de sens de regarder la moyenne de chaque UE, dans la mesure où effectivement les modules à l'intérieur d'une UE peuvent se compenser.

Moyenne et comparaison

La comparaison éventuelle des étudiants entre eux s'effectue traditionnellement à travers la moyenne générale. C'est sur cette base que sont décidés les classements aux concours, ou le rang de sortie d'une formation. Cependant, la moyenne est un critère extrêmement réducteur, et dans le domaine de l'aide multicritère à la décision il est connu que, bien qu'elle soit un des modes d'agrégation les plus utilisés[1], c'est aussi l'un des plus mauvais. En effet, la moyenne gomme toute différence entre les différents profils d'alternatives (ici des étudiants) que l'on souhaite comparer.

[1] y compris dans les formations universitaires en décision multicritère ! Mais c'est une obligation légale.

Exemple 68 *Prenons 3 étudiants de DUT secondaire, ayant respectivement en UE d'enseignement général, d'enseignement technique et de pratique professionnelle les note suivantes :*

étudiant	*UE 1*	*UE 2*	*UE3*
A	*12*	*8*	*10*
B	*6*	*6*	*18*
C	*15*	*11*	*4*

Pour chacun, la moyenne générale est de 10. Mais il est clair que les trois étudiants n'ont absolument pas le même profil, et qu'il est difficile d'obtenir un classement absolu entre les trois. En effet, dans le cadre d'une poursuite d'étude vers une école d'ingénieur, le classement sera $C \succ A \succ B$. *A contrario, pour une poursuite d'étude professionnalisante, le classement pourrait être* $A \succ B \sim C$.

D'autres méthodes pourraient être judicieusement mises à profit pour la comparaison des étudiants. En particulier, l'introduction d'une comparaison ordinale (approche "comparer puis agréger") permet d'élargir les possibilités offertes par la simple utilisation de la moyenne (approche "agréger puis comparer"). De même, l'introduction de points de référence dans une procédure de comparaison doit permettre d'affiner les comparaisons en vue de l'objectif poursuivi.

4.2.2 Cadre de travail : IUT d'Evry

L'Institut Universitaire de Technologie d'Evry [2]

L'Institut Universitaire de Technologie (IUT) d'Evry, composante de l'Université d'Evry-Val d'Essonne, dispense en formation initiale et continue, un enseignement destiné à préparer aux fonctions d'encadrement technique et professionnel, très largement reconnu dans le monde du travail. Ouvert depuis 1992, l'IUT d'Evry - Brétigny - Athis Mons, accueille sur 27000 m^2 près de 2000 étudiants répartis dans 9 départements, sur 3 sites.

Le département Qualité, Logistique Industrielle et Organisation (QLIO) est un des neuf départements de l'IUT. La formation en QLIO est centrée sur des méthodes et techniques d'analyse, compréhension et amélioration, en terme de coordination ou synchronisation, de toutes les activités de l'entreprise pour traiter les commandes des clients. Elle donne aux étudiants des capacités d'organisation et de pilotage des activités de type achat, approvisionnement, stockage, production... De ce fait elle s'appuie sur des connaissances simples de toutes les technologies mais ne cherche pas à développer des savoir-faire en terme de conception et de calcul d'éléments mécaniques, électriques ou autres. Par

[2] L'auteur de cette thèse est enseignant depuis 2000 à l'IUT d'Evry en tant que PRAG (professeur du secondaire détaché dans l'enseignement supérieur)

contre l'utilisation d'un grand nombre d'outils informatiques représente un fort pourcentage des capacités acquises par les diplômés QLIO.

Problématique du classement des étudiants

L'évaluation des étudiants à l'IUT s'effectue suivant le mode du contrôle continu. Les notes sont ensuite synthétisées en une moyenne par module. Les modules sont ensuite regroupés en UE. Il existe trois UE en deuxième année de QLIO : UE1, enseignement général ; UE2, enseignement technique ; UE3, pratique professionnelle. L'étudiant obtient son diplôme s'il satisfait les conditions suivantes :

- avoir plus de 10 en moyenne générale des modules
- avoir plus de 8 en moyenne à chaque UE.

Il n'est pas établi de classement officiel de sortie de l'IUT. Chaque étudiant valide son diplôme ou non. Cependant, de nombreux étudiants souhaitent poursuivre leurs études (licences professionnelles, master, écoles d'ingénieur...) et remplissent à cet effet des dossiers de candidatures. Sur ces dossiers, il est souvent demandé le rang de l'étudiant dans la promotion ; or il apparaît à l'équipe enseignante que la moyenne générale n'est pas l'indicateur pertinent pour classer les étudiants (comme indiqué ci-dessus). En particulier, les différentes filières de poursuites d'études nécessiteraient des équilibres différents entre les modules, afin de valoriser les modules requis pour les études souhaitées. Nous détaillons ci-dessous les modules d'enseignements de la deuxième année de QLIO, en précisant l'UE du module dans le programme officiel, et la catégorie du module dans une classification plus proche de ce qui est demandé par les formations supérieures : enseignement général, enseignement scientifique, enseignement technique, pratique professionnelle.

4.2.3 Traitement des données

Dans un premier temps, nous supposons que les points de référence sont connus, et donnés par l'utilisateur (le jury). Nous verrons dans la section suivante le cas où, les préférences du jury étant connues, nous tenterons de révéler les points de référence utilisés.

Afin de tester nos procédures, nous avons écrit un programme sous VBA pour Excel, permettant une présentation visuelle simple des relations de préférence sur les 26 étudiant par un tableau. L'avantage présenté par Excel est qu'il est très simple de rentrer des données sous forme de tableaux.

Une fois les données des étudiants rentrées, nous pouvons agir sur trois paramètres :

1. les points de référence : vu le faible nombre d'alternatives (26), nous avons choisi de prendre deux points de référence. Un résultat théorique (voir section 2.1.3) a montré que, sans perte de généralité, nous pouvions supposer que les points de

module	intitulé	UE	catégorie du module
17	Mathématiques	UE1	scientifique
18	Anglais	UE1	général
19	Systèmes d'information	UE1	scientifique
20	Communication	UE1	général
21	Gestion de Production	UE1	technique
22	Démarche d'amélioration industrielle	UE1	technique
23	Conduite de projet	UE3	professionnel
24	Projet industriel	UE3	professionnel
25	Modélisation de flux	UE2	scientifique
28	gestion de production assistée par ordinateur	UE2	technique
30	Informatique	UE2	scientifique
31	Gestion	UE2	général
32	Outils de la qualité	UE2	technique
39	Optimisation des systèmes de production	UE2	technique
PT	projet tuteuré	UE3	professionnel
SI	Stage industriel	UE3	professionnel

TAB. 4.6 – Liste des modules QLIO (ex OGP, programme 1998)

référence se dominent les uns les autres. Nous nous sommes donc limités à étudier des procédures basées sur des points de référence se dominant.

2. les procédures d'agrégation pour obtenir les $\succsim_{p^i}$. Il s'agit ici de déterminer la valeur de chaque coalition de critère afin d'obtenir une relation de préférence sur l'espace des coalitions. Trois procédures ont été testées :
   - une première procédure simple n'admettant que deux niveaux dans la relation de préférence sur les coalitions : une coalition est "bonne" si elle contient le critère scientifique, plus au moins un autre. Elle est "mauvaise" sinon.
   - une deuxième procédure donnant le même poids à tous les critères sur lequel le candidat est acceptable. Une coalition aura donc un score correspondant au nombre de critères sur lesquels l'étudiant aura été meilleur que le point de référence.
   - une troisième procédure permettant de moduler l'importance du critère : fort pour science et technique, faible pour les autres.
3. la procédure d'agrégation finale permettant d'obtenir la relation de préférence $\succsim$ à partir des $\succsim_{p^i}$: nous avons étudié ici une agrégation basée sur un ordre lexicographique sur les points de référence. Cela nous permet d'obtenir une relation de préférence finale qui est un préordre.

Le programme réalisé permet de faire varier les trois paramètres pour obtenir la relation de préférence recherchée.

Etudiant	G	S	T	P
A	12,72	14,51	14,19	14,40
B	7,15	6,78	7,25	6,13
C	10,75	11,99	11,51	11,52
D	12,17	13,65	13,15	13,20
E	14,49	14,61	13,37	14,23
F	14,90	9,75	12,89	15,74
G	9,96	9,99	11,31	14,40
H	11,17	12,17	10,09	14,27
I	12,81	11,46	11,62	11,24
J	12,86	13,68	11,95	12,43
K	12,89	13,01	13,72	15,68
L	10,07	9,18	9,66	13,48
M	10,26	11,74	11,62	13,01
N	10,52	9,83	13,02	11,63
O	10,25	9,98	11,05	10,95
P	10,48	8,50	10,63	9,7
Q	11,53	12,21	12,28	12,70
R	11,61	10,83	10,55	13,99
S	10,47	10,21	10,17	12,00
T	10,28	10,25	10,25	11,17
U	9,60	10,28	10,75	11,26
V	10,69	13,67	11,15	13,08
W	11,91	13,04	11,72	13,67
X	12,14	13,04	12,02	15,39
Y	12,10	15,91	14,42	14,67
Z	11,57	13,64	12,64	12,47

Tab. 4.7 – Notes obtenues par les étudiants

4.2.4 Classements obtenus à l'aide des points de référence

Nous présentons dans cette section les résultats de l'application des différentes procédures au corpus d'alternatives.

Résultats obtenus à l'aide de la moyenne

La méthode classique pour obtenir un classement à partir de plusieurs notes consiste à prendre comme score pour chacun des étudiants la moyenne des notes, éventuellement pondérée par un coefficient. L'application de cette procédure au corpus considéré nous donne les résultats détaillés dans le tableau 4.8. Il est aussi possible de moduler le classement obtenu par la moyenne en donnant plus de poids au critère scientifique. Par exemple, en mettant un coefficient 3 pour le critère scientifique, et un pour les autres critères nous obtenons le deuxième classement du tableau 4.8.

Nous définissons la différence entre deux classements par le rapport entre le nombre de relations de préférence différentes et le nombre total de relations de préférence (ici 26*26). Nous constatons ici une différence de 5,4 % entre les deux classements.

Résultats de base obtenus à l'aide de la procédure avec deux points de référence

Nous étudions dans cette partie la procédure de classement des étudiants à partir de deux points de référence. Afin de simplifier notre étude, nous avons décidé que les valeurs prises par un point de référence seraient les mêmes pour chaque critère. Nous avons pris comme points de référence initiaux les points $p_1 = (12, 12, 12, 12)$ et $p_2 = (14, 14, 14, 14)$.

Pour obtenir une relation de préférence vis-à-vis d'un point de référence, il est nécessaire de choisir une procédure d'agrégation des comparaisons effectuées critère par critère. Dans un premier temps, nous avons retenu la procédure consistant à affecter le même poids à chaque critère, ce qui donne comme règle d'agrégation la règle majoritaire : l'alternative a est préférée à l'alternative b par rapport au point de référence p si le nombre de critère où a est meilleure que p est plus important que le nombre de critère où b est meilleure que p.

Nous avons choisi comme procédure d'agrégation finale la lexicographie, afin d'obtenir une relation de préférence transitive.

La relation de préférence obtenue est détaillée en table 4.9. Elle est naturellement transitive. Elle possède 10 classes d'indifférence. Elle est relativement discriminante sur la première moitié des alternatives, mais possède ensuite 2 classes d'indifférence avec 6 alternatives chacune. Elle ne distingue cependant pas entre les trois premières alternatives. La relation obtenue n'est pas très différente de la relation obtenue à partir de la moyenne (environ 15 % de différence). Cependant, on peut noter que :

Rang	Etudiant	Moyenne sans coef
1	Y	14,28
2	E	14,17
3	A	13,95
4	K	13,83
5	F	13,32
6	X	13,15
7	D	13,04
8	J	12,73
9	W	12,59
10	Z	12,58
11	Q	12,18
12	V	12,15
13	H	11,92
14	I	11,78
15	R	11,75
16	M	11,66
17	C	11,44
18	G	11,42
19	N	11,25
20	S	10,71
21	L	10,60
22	O	10,55
23	T	10,49
24	U	10,47
25	P	9,84
26	B	6,83

Rang	Etudiant	Moyenne avec coef
1	Y	14,82
2	E	14,32
3	A	14,14
4	K	13,55
5	D	13,25
6	X	13,11
7	J	13,04
8	Z	12,93
9	W	12,74
10	V	12,66
11	Q	12,19
12	F	12,13
13	H	12,01
14	M	11,69
15	I	11,68
16	C	11,62
17	R	11,44
18	G	10,94
19	N	10,78
20	S	10,55
21	T	10,41
22	U	10,41
23	O	10,36
24	L	10,12
25	P	9,39
26	B	6,81

TAB. 4.8 – Classement à partir de la moyenne générale avec et sans coefficient

rang						
1	A	E	Y			
2	K	X				
3	D					
4	F					
5	J	Q	Z			
6	H					
7	V	W				
8	G					
9	I	L	M	N	R	S
10	B	C	O	P	T	U

TAB. 4.9 – Classement des étudiants - modèle de référence

- les trois premiers étudiants du classement sont indifférents pour la relation de préférence considérées, et de même les 6 derniers.
- l'étudiant F gagne quelques places grâce à sa relative régularité, qui n'est pas pénalisée par les sciences vu le caractère non compensatoire de la procédure.

Influence du niveau des points de référence

Nous avons fixé les points de référence à des niveaux arbitraires pour notre classement de référence. Une des interrogations est alors de savoir si la relation de préférence obtenue varie de manière importante pour des niveaux différents. C'est ce que nous étudions ci-dessous.

1. **augmentation des niveaux** : prenons p_1= (12,5 ; 12,5 ; 12,5 ; 12,5) et p_2 = (14,5 ; 14,5 ;14,5 ;14,5). La relation obtenue est détaillée en table 4.10. Nous pouvons constater que les changements sont peu nombreux (14%). La différence principale porte sur le resserrement du classement, principalement en queue de classement : il n'y a plus que 7 classes d'indifférence au lieu de 10. Il n'y a pas de grands bouleversements, mais simplement quelques petits échanges de place en haut du classement (K préféré à Y au lieu du contraire par exemple).
2. **diminution des niveaux** : prenons p_1 = (11,5 ; 11,5 ; 11,5 ; 11,5) et p_2 = (13,5 ; 13,5 ; 13,5 ; 13,5). La relation obtenue est détaillée en table 4.11. Nous pouvons constater que les changements sont là aussi peu nombreux (16%). La différence principale porte sur le resserrement en haut du classement : il y a 5 alternatives classées indifférentes au troisième rang. Par contre en queue de classement, les alternatives sont mieux différenciées.
3. **écartement des niveaux** : prenons p_1 = (11 ; 11 ; 11 ; 11) et p_2 = (15 ; 15 ; 15 ; 15). La relation obtenue est détaillée en table 4.12. Les différences avec le classement

rang								
1	A	E	K					
2	F	Y						
3	D							
4	X							
5	J	V	W	Z				
6	G	H	I	L	M	N	Q	R
7	B	C	O	P	S	T	U	

TAB. 4.10 – Classement des étudiants - p_1 et p_2 élevés

rang					
1	A	E	Y		
2	K				
3	D	J	W	X	Z
4	Q				
5	F				
6	C	M			
7	H	R	V		
8	I	N			
9	G				
10	L	S			
11	B	O	P	T	U

TAB. 4.11 – Classement des étudiants - p_1 et p_2 bas

de référence sont plus nombreuses (environ 25%). En particulier, le classement est beaucoup moins discriminant en tête de classement (11 alternatives en deux classes d'indifférence), et l'alternative F perd de nombreuses places, pour se retrouver en milieu de classement.

Analyse : de manière générale, nous constatons que le niveau des points de référence a bien évidemment une influence sur le classement final. Cependant, ce n'est pas tant le niveau absolu des points de référence qui agit sur le caractère plus ou moins discriminatoire d'un classement, mais bien l'adéquation du niveau de référence aux alternatives que l'on souhaite discriminer. Par exemple, si l'on considère la tête du classement obtenu, nous constatons que le point de référence à 14 ou 14,5 permettent de mieux discriminer les alternatives qu'un point de référence à 13,5 ou 15. Si les points de référence sont trop en décalage par rapport aux alternatives à comparer (dominant toutes les alternatives, ou étant dominés par toutes les alternatives), la relation de préférence obtenue est alors très pauvre, i.e. contient de grandes classes d'équivalence. Il est donc important, si l'on souhaite obtenir une relation discriminante, de ne pas fixer les niveaux des points de référence *a priori* mais de les adapter au corpus des alternatives à comparer.

rang								
1	K	X	Y					
2	A	D	E	I	J	Q	W	Z
3	F							
4	C	H	M	V				
5	G	N	R					
6	L	O	S	T	U			
7	B	P						

TAB. 4.12 – Classement des étudiants - p_1 et p_2 écartés

Influence de la relation d'importance sur les coalitions de critères

La relation d'importance choisie pour comparer les coalitions de critères possède bien entendue une influence sur le classement final. Comparons par exemple la relation de référence avec une relation privilégiant le critère "S", les matières scientifiques, consistant à garder une relation majoritaire mais avec un coefficient 3 pour le critère "S". Cela n'affecte quasiment pas la relation de préférence (1,7 % de différence), en ne changeant que le classement de F, qui perd 6 places.
Analyse : la relation d'importance sur les coalitions de critères est fortement contrainte quand le nombre de critères est faible, et que l'on souhaite conserver la propriété de monotonie par inclusion sur les ensembles de critères. Elle ne peut donc pas être un grand vecteur de changement au sein de la relation de préférence.

Influence de l'ordre d'agrégation final

Avec deux points de référence, il est possible d'obtenir deux ordres lexicographiques d'agrégation. Que se passe-t-il si on agrège les deux relations de préférence en commençant par celle relative à p_2 puis celle relative à p_1 ? Le résultat est présenté en table 4.13. Il y a peu de différences (3,8%) avec le classement de référence : les alternatives F,G,H gagnent quelques places, l'alternative D en perd. L'ordre final d'agrégation n'a bien sûr d'importance que pour les alternatives dont la comparaison diffère dans les deux relations de préférence : ici, les 12 dernières alternatives ne changent pas de rang, se comparant de la même manière vis-à-vis de p_1 comme de p_2.
Analyse : l'ordre de l'agrégation des relations de préférence vis-à-vis de chaque point de référence est important pour discriminer les alternatives qui sont difficilement comparables directement, en particulier les alternatives très équilibrées et celles très déséquilibrées. De manière générale, une agrégation commençant par les points de référence de haut niveau va favoriser les alternatives ayant au moins une très bonne note sur un critère, même si elles sont déséquilibrées. A contrario, si l'agrégation commence par les points de référence de bas niveau, les alternatives relativement équilibrées, c'est-à-dire ne

rang						
1	A	E	Y			
2	F					
3	K	X				
4	H					
5	G					
6	D					
7	J	Q	Z			
8	V	W				
9	I	L	M	N	R	S
10	B	C	O	P	T	U

TAB. 4.13 – Classement des étudiants - ordre lexicographique inverse

possédant pas de mauvaises performances vont être favorisées. Enfin, commencer par le point de référence médian permet de séparer facilement le corpus en deux sous-groupes identifiables comme étant pour l'un celui des "bonnes" alternatives, et l'autre celui des "mauvaises" qu'il n'y a plus qu'à affiner ensuite.

Trois points de référence

Nous proposons dans cette partie une procédure mettant en jeu 3 points de référence. Au vu des résultats précédents, nous proposons de prendre les points de référence $p_1 = (11, 11, 11, 11)$, $p_2 = (12,5; 12,5; 12,5; 12,5)$ et $p_3 = (14, 14, 14, 14)$. Nous prenons comme relation d'importance sur les coalitions de critères la règle majoritaire simple. Comme nous souhaitons obtenir à coup sûr une relation de préférence transitive, nous prenons comme règle d'agrégation des relations de préférence une règle lexicographique sur les points de référence. Nous retenons l'ordre d'agrégation lexicographique p_2, p_3, p_1. L'idée est de commencer par effectuer un premier classement grâce à la relation de préférence par rapport à p_2, ce qui permet de différencier d'un côté les "bons" et de l'autres les "moins bons". Ensuite, nous affinons ce classement dans chacune des deux moitiés grâce aux points de référence p_3 (qui ne change pas le classement des "moins bons") et p_1 (qui ne change pas le classement des "bons").

On obtient une relation très discriminante (17 classes d'indifférence), décrite en table 4.14.

Analyse : il est évident que plus il y a de points de référence, plus la relation de préférence obtenue sera discriminante. Cependant, la charge supplémentaire (paramètres à fixer, temps de calcul allongé...) liée au rajout un point de référence ne se justifie par forcément s'il ne s'agit au final de ne discriminer que deux alternatives qui étaient jusque là restée équivalente. En théorie, un point de référence permet d'obtenir 2^n classes d'équivalence pour la relation de préférence globale. Mais deux points de référence ne permettent

rang				
1	A	E		
2	K			
3	Y	X		
4	F			
5	D			
6	X			
7	J	W	Z	
8	V			
9	H			
10	G			
11	I	Q		
12	M			
13	N	R		
14	L			
15	C			
16	O	S	T	U
17	B	P		

TAB. 4.14 – Classement des étudiants - 3 points de référence

pas d'obtenir $2^n \times 2^n$ classes d"équivalence, en ce sens que certaines combinaisons sont impossibles à obtenir en pratique. Nous avons vu qu'avec deux points de référence, nous avons obtenu jusqu'à 11 classes d'équivalence, et 17 avec trois points de référence. En pratique, nous pensons qu'au delà de trois points de référence la précision supplémentaire obtenue ne justifie pas le surcroît de calculs.

4.2.5 Analyser un classement

Position du problème

Il a été vu dans la section 1.4.3 que l'introduction de points de référence dans une procédure d'agrégation multicritère peut permettre de modéliser des relations de préférence non modélisables par ailleurs, et donc d'accroître la capacité descriptive des modèles existants. On peut donc s'interroger sur la capacité du modèle proposé à décrire une relation de préférence donnée. Dans le cas présent, cela consiste, à partir d'une relation de préférence sur les étudiants bâtie par l'équipe enseignante, à trouver des points de référence et des procédures d'agrégation permettant d'obtenir le classement désiré.

Ce problème est délicat. En effet, la procédure théorique présentée section 2.1.2 consiste à comparer deux à deux des alternatives ne différant que sur un seul critère, afin de pouvoir détecter les seuils existants, témoignant de la présence d'un point de référence. Dans le cas présent, le corpus relativement faible d'alternatives ne permet pas de tester toutes les combinaisons nécessaires. Il faudrait pouvoir compléter par des tests

rang					
1	A	Y			
2	E	K			
3	x				
4	D	Q	Z		
5	F				
6	H	I	J		
7	W				
8	C	M	N	R	V
9	G				
10	L	S	T	U	
11	B	O	P		

TAB. 4.15 – Classement des étudiants effectués par l'équipe enseignante

présentés au décideur, ce qui n'est pas possible ici. D'autre part, le caractère continu des critères étudiés (moyennes de plusieurs notes), fait que la comparaison de deux alternatives permet au mieux de détecter un intervalle dans lequel se situe la valeur prise par un point de référence sur un critère, mais ne permet pas de donner une unique valeur. Ces difficultés particulières nous poussent à adopter une méthodologie du type essais/erreurs afin de pouvoir décrire la relation de préférence donnée à l'aide du formalisme proposé. Nous devons procéder par tâtonnements, en testant plusieurs points de référence ainsi que plusieurs procédures d'agrégation.

Résultat

Le classement proposé par l'équipe enseignante est détaillé dans la figure 4.15. Nous faisons l'hypothèse que les enseignants, pour établir ce classement, ont utilisé uniquement comme critères les moyennes des étudiants dans chacun des quatre regroupements (Général, Scientifique, Technique et Professionnel). La procédure d'agrégation avec points de référence devra donc n'utiliser que ces critères.

La procédure pour révéler les points de référence consiste à trouver une paire d'alternatives avec une préférence stricte et ne différant que sur un critère. Ainsi, il est certain qu'il existe alors un niveau de référence entre les deux valeurs prises par les alternatives considérées sur ce critère. Dans le cas particulier qui nous occupe, il existe un grand nombre de valeurs différentes sur chaque critère : il n'y a en moyenne qu'une seule paire d'alternatives ayant la même valeur sur un critère donné, ou deux à trois paires compte tenu des valeurs "proches" (avec une différence de l'ordre de 0,01 ou 0,02). Si l'on tient compte également du faible nombre d'alternatives disponibles dans le corpus (26), on constate que la procédure théorique est inopérante. Il faut donc avoir recours au tâtonnement afin de trouver les valeurs des critères des points de référence. A partir de l'étude faite *supra*, on peut supposer que deux points de référence devrait suffire à obtenir le classement proposé.

Prenons un exemple : si l'on compare T et O, on constate que deux critères les différencient, qui sont S et P. Il faut donc que sur l'un ou l'autre, un point de référence les sépare. En analysant ainsi les différentes paires, on peut obtenir des indications sur les valeurs des points de référence.

En procédant par essai/erreur, on obtient ici deux points de référence $p_1 = (12, 5, 15, 14, 14)$ et $p_2 = (11, 11, 12, 11)$ qui permettent d'obtenir le classement indiqué en 4.15. Cependant, il s'avère ici que la mise en pratique de la révélation des points de référence s'effectue plus difficilement que ce que l'algorithme théorique indique.

4.3 Applications au bien-être animal

Les résultats obtenus dans cette partie ont été obtenus suite à un travail effectué en commun avec Raphaëlle Botreau de l'Université de Clermont-Ferrand (cf Botreau (2008) et Botreau et Rolland (2008)). Cette collaboration a pour but d'enrichir le spectre des méthodes multicritères à disposition des experts agronomes sur un sujet spécifique.

4.3.1 Le projet européen "Welfare Quality" [3]

La prise de conscience que les animaux possèdent une conscience et sont capables de souffrance est une idée ancienne, en Occident et plus encore en Orient, dans la littérature et la représentation mentale populaire : on pense par exemple au conte des "musiciens de Brême", des frères Grimm où tour à tour chien, chat, âne et coq quittent leurs fermes à cause des mauvais traitements subis. La traduction de cette idée en pratique dans le rapport quotidien aux animaux d'élevage est par contre relativement neuve. Longtemps défini comme l'absence de blessure, le bien-être animal prend aujourd'hui en compte toutes les facettes du comportement naturel de l'animal. En particulier, le Farm Animal Welfare Council du Royaume-Uni définit cinq besoins fondamentaux pour les animaux d'élevage :

1. Absence de douleur, lésion ou maladie.
2. Absence de stress climatique ou physique.
3. Absence de faim, de soif ou de malnutrition.
4. Absence de peur.
5. Possibilité d'exprimer des comportements normaux, propres à chaque espèce

Pour les animaux élevés pour leur viande ou leurs sous-produits (lait, oeuf), l'attention porté au bien-être de l'animal inclut les phases d'élevage, de transport et d'abattage. En France, les services vétérinaires du ministère de l'agriculture ont compétence pour réglementer les pratiques et vérifier l'application des textes. Depuis quelques années, et en particulier à travers les épizooties telles la vache folle, la peste porcine ou la grippe aviaire, le consommateur européen a découvert les conditions de l'élevage industriel, qui s'était développé depuis trente ou quarante ans à l'abri des regards. Cette prise de conscience des conditions de vie des animaux d'élevage par le grand public, ainsi que la pression d'organismes de protection des animaux, ont amené les organismes publics à mettre en place des outils visant à améliorer le bien-être animal, qui devient un enjeu important aujourd'hui au niveau européen. De nombreux cahiers des charges incluent des éléments de bien-être animal. Citons par exemple le Freedom Food au Royaume-Uni,

[3] La présentation de cette partie reprend pour l'essentiel la communication synthétique de Veissier et al. (2005) présentant le projet européen.

basé essentiellement sur le respect des 5 libertés des animaux (Farm Animals Welfare Council (1992)). Or il n'existe actuellement pas de standard en matière de garantie du bien-être des animaux. Plusieurs systèmes d'évaluation du bien-être des animaux ont été proposés, par exemple par Bartussek et al. (2000), Bracke et al. (2002), Sundrum et Rubelowski (2001). Il reposent pour l'essentiel sur une vérification de l'environnement des animaux (garantie de moyens) et non sur l'état des animaux eux-mêmes (garantie de résultats). Or les interactions entre facteurs de l'environnement sur le bien-être animal rendent cet exercice très périlleux. Il est donc apparu nécessaire de développer des outils d'appréciation globale du bien-être des animaux à partir d'observations sur ces animaux.

Le projet Welfare Quality [4] (voir Veissier et al. (2005)) a pour but de proposer des outils pour la mise en place de systèmes d'information auprès des consommateurs en matière de bien-être animal.

A titre d'exemple, nous ne présentons dans cette partie que le travail effectué sur le bien-être des vaches laitières sur les exploitations.

D'après le projet Welfare Quality, le bien-être des vaches laitières sur une exploitation agricole peut être mesuré à travers quatre critères : l'alimentation, l'hébergement, la santé, le comportement. Chaque critère possède un certain nombre de sous-critères (de 2 à 4), qui eux-mêmes sont construits à partir de différents indicateurs.

- **Critère Alimentation** : deux sous-critères : absence de faim prolongée, absence de soif prolongée
- **Critère Hébergement** : deux sous-critères : confort autour du lieu de repos, facilité de mouvement
- **Critère Santé** : trois sous-critères : absence de blessures, absence de maladies, absence de douleurs dues aux procédures
- **Critère Comportement** : quatre sous-critères : expression des comportements sociaux, expression des autres comportements, bonnes relations humains/animaux, absence de climat anxiogène.

Les scores sur les sous-critères sont tous normalisés entre 0 (très mauvais score) et 100 (très bon score). L'agrégation des sous-critères en un critère de synthèse se fait à partir des réponses des experts à un jeu de données virtuelles, en utilisant une méthode d'agrégation qui permet de prendre en compte l'importance relative attribuée aux différents critères d'une part, et de donner plus d'importance aux moins bons scores afin d'encourager les fermiers à améliorer en priorité les points problématiques. La méthode d'agrégation retenue est alors naturellement l'intégrale de Choquet qui possède ces deux qualités. Les paramètres de l'intégrale de Choquet (mesure sur les ensembles de critères) sont obtenus par des questions auprès d'experts à partir d'un jeu de données fabriqué pour limiter les compensations entre les critères. La fonction mesure retenue au final est celle obtenue à

[4]titre complet : Integration of animal welfare in the food quality chain : from public concern to improved welfare and transparent quality

partir des données lissées en minimisant le carré des écarts aux valeurs données par les experts.

4.3.2 Agrégation des critères

L'agrégation des différents critères en vue d'obtenir un score unique permettant d'affecter les différentes fermes à leurs catégories respectives peut s'effectuer de différentes manières. Toutes nécessitent la présence de "fermes de référence" afin de pourvoir comparer les fermes à des spécimens déjà étudiés, et ainsi les classer de manière adéquate. Passons en revue trois méthodes parmi celles abordées précédemment.

1. **Moyenne :** afin d'analyser les particularités de nos méthodes, nous allons les comparer aux résultats obtenus grâce à la méthode de la moyenne. Par cette méthode, il suffit de faire la moyenne des scores obtenus sur chacun des critères par une ferme pour obtenir le score global, qui est ensuite comparé à un seuil particulier pour classer les fermes dans les catégories prédéfinies.
2. **ELECTRE TRI :** une méthode "à la ELECTRE TRI" semble tout à fait naturelle pour affecter des alternatives (fermes) à des catégories prédéfinies. Après avoir défini trois fermes de référence, il suffit de choisir une règle de comparaison pour obtenir une affectation de chaque ferme dans sa catégorie. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité de paramétrage et d'utilisation. Cependant, la définition *a priori* des classes de fermes peut se révéler peu opportun en l'absence de données complètes sur le corpus des fermes à classer. On pourrait se retrouver avec des catégories aux effectifs très disparates, ce qui n'est pas forcément souhaitable dans une dynamique de valorisation des bonnes pratiques.
3. **Modèle $AMPR$ lexicographique :** la méthode développée au chapitre 2.5.5 permet, au prix d'une complexité à peine supérieure à la méthode ELECTRE TRI (essentiellement pour la révélation des relations d'importance sur les critères) d'obtenir une relation de préférence complète sur l'ensemble des fermes, permettant ainsi de procéder à un classement de manière plus fine .

Le tableau 4.16 présente le corpus suivant de 29 fermes en Autriche et Allemagne disponible au 01/06/07, et leurs notations sur les quatre critères. Nous allons comparer ces fermes entre elles grâce à trois "fermes de référence" p^1, p^2 et p^3, dont les valeurs sur chaque critère sont $p^1 = (75, 75, 75, 75)$, $p^2 = (50, 50, 50, 50)$ et $p^3 = (25, 25, 25, 25)$.

Etudions les mécanismes des trois méthodes sur ce corpus.

"à la ELECTRE TRI"

Le principe des méthodes "à la ELECTRE TRI" consiste à comparer chaque ferme aux fermes de référence en commençant par p^1, puis p^2 et enfin p^3, et à décider d'affecter

Ferme	C1	C2	C3	C4
Ferme 1	26	68	28	24
Ferme 2	22	68	32	39
Ferme 3	5	43	10	56
Ferme 4	33	48	18	35
Ferme 5	61	29	47	58
Ferme 6	61	22	31	34
Ferme 7	93	51	29	31
Ferme 8	4	68	32	40
Ferme 9	61	32	30	31
Ferme 10	84	50	21	41
Ferme 11	5	50	25	28
Ferme 12	100	52	21	58
Ferme 13	61	11	32	63
Ferme 14	60	5	43	76
Ferme 15	26	52	26	50
Ferme 16	61	25	42	59
Ferme 17	61	33	41	60
Ferme 18	100	42	22	55
Ferme 19	60	6	34	84
Ferme 20	100	42	27	67
Ferme 21	14	22	21	83
Ferme 22	61	5	24	72
Ferme 23	49	68	30	58
Ferme 24	60	68	28	52
Ferme 25	100	49	26	44
Ferme 26	2	68	29	44
Ferme 27	3	68	26	23
Ferme 28	1	73	20	56
Ferme 29	61	68	21	58

Tab. 4.16 – Notes obtenues par les fermes

la ferme à la catégorie 1 si elle est préférée à p^1, à la catégorie p^2 si elle est préférée à p^2 et non à p^1, et ainsi de suite. Nous choisissons ici de décider qu'une ferme est meilleure qu'une ferme de référence si elle est meilleure qu'elle sur au moins 2 critères (sur quatre). Formellement, nous obtenons donc la règle de classement suivante :

$$f \in C^k \iff |\{f_i \geq p_i^k\}| \geq 2 \text{ et } |\{f_i \geq p_i^{k-1}\}| < 2$$

Prenons comme exemple la ferme $1 = (26, 68, 28, 24)$. Nous obtenons :

ferme p^i	$\{f_i \geq p_i^k\}$	$\lvert\{f_i \geq p_i^k\}\rvert$
p^1	$\emptyset$	0
p^2	$\{2\}$	1
p^3	$\{1, 2, 3\}$	3

Comme $|\{f_i \geq p_i^3\}| \geq 2$ et $|\{f_i \geq p_i^2\}| < 2$, nous obtenons que la ferme 1 est affectée à la catégorie 3.

A partir de cette règle, le classement des fermes dans les différentes catégories est le suivant :

catégorie	fermes
C^1	$\emptyset$
C^2	5,7,10,12,13,14,18,19,20,22,23,24,28,29
C^3	1,2,3,4,6,8,9,11,15,16,17,25,26,27
C^4	21

Moyenne

Afin d'analyser les particularités de nos méthodes, nous allons les comparer aux résultats obtenus grâce à la méthode de la moyenne :

$$f \in C^k \iff \overline{f} \geq m_k \text{ et } \overline{f} < m_{k-1}$$

avec $m_1 = 75$, $m_2 = 50$, $m_3 = 25$. La relation d'ordre obtenue à partir de la moyenne est détaillée en table 4.17.

L'affectation de chaque ferme dans sa catégorie donne alors le classement suivant :

catégorie	fermes
C^1	$\emptyset$
C^2	7,12,18,20,23,24,25,29
C^3	1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,14,15,16,17,19,21,22,26,27,28
C^4	$\emptyset$

Rang	ferme	moyenne
1	Ferme 20	59
2	Ferme 12	57,75
3	Ferme 18	54,75
4	Ferme 25	54,75
5	Ferme 24	52
6	Ferme 29	52
7	Ferme 23	51,25
8	Ferme 07	51
9	Ferme 10	49
10	Ferme 05	48,75
11	Ferme 17	48,75
12	Ferme 16	46,75
13	Ferme 14	46
14	Ferme 19	46
15	Ferme 13	41,75
16	Ferme 22	40,5
17	Ferme 02	40,25
18	Ferme 09	38,5
19	Ferme 15	38,5
20	Ferme 28	37,5
21	Ferme 06	37
22	Ferme 01	36,5
23	Ferme 08	36
24	Ferme 26	35,75
25	Ferme 21	35
26	Ferme 04	33,5
27	Ferme 27	30
28	Ferme 03	28,5
29	Ferme 11	27

Tab. 4.17 – Classement obtenu par la moyenne des critères

Avec des points de référence

Nous choisissons ici d'utiliser une méthode multicritère à points de référence prenant en compte les trois points de référence p^1, p^2 et p^3 afin d'obtenir une relation de préférence complète sur l'ensemble des fermes. Il s'agit de comparer les fermes deux à deux par l'intermédiaire des trois fermes de référence en comparant, pour chaque couple de ferme, le nombre de critères pour lesquels chaque ferme est meilleure que la ferme de référence. On obtient alors 3 préordres complets correspondant aux 3 fermes de référence, à partir des scores respectifs de chaque ferme. Il suffit ensuite de classer ces fermes en prenant en compte leurs scores respectifs par rapport à chaque point de référence. Il existe en théorie 6 ordres possibles d'agrégation lexicographique : (p^1, p^2, p^3), (p^1, p^3, p^2), ...

Nous choisissons ici de présenter les résultats obtenus par agrégation lexicographique de deux manières différentes :

1. classement C_{213} : l'ordre lexicographique d'agrégation sur les points de référence est p^2, puis p^1 et enfin p^3.
2. classement C_{231} : l'ordre lexicographique d'agrégation sur les points de référence est p^2, puis p^3 et enfin p^1.

Pour obtenir facilement la relation de préférence, on peut par exemple choisir de multiplier le score obtenu par rapport à la ferme de référence p^2 par 100, celui obtenu par rapport à la ferme de référence p^1 (resp p^3) par 10 et celui par rapport à la ferme p^3 (resp p^1) par 1 avant d'effectuer la somme des trois scores, ce qui nous donne directement le score global de chaque ferme : $f \succsim f' \iff s(f) \geq s(f')$ avec

$$\begin{array}{ll} C_{213} : & s(f) = 100 \times |\{f_i \geq p_i^2\}| + 10 \times |\{f_i \geq p_i^1\}| + |\{f_i \geq p_i^3\}| \\ C_{231} : & s(f) = 100 \times |\{f_i \geq p_i^2\}| + 10 \times |\{f_i \geq p_i^3\}| + |\{f_i \geq p_i^1\}| \end{array}$$

Prenons comme exemple les fermes $1 = (26, 68, 28, 24)$ et $5 = (61, 29, 47, 58)$. Nous obtenons, pour le classement C_{213} :

Ferme 1

ferme p^i	$\{f_i \geq p_i^k\}$	$\lvert\{f_i \geq p_i^k\}\rvert$
p^1	$\emptyset$	0
p^2	$\{2\}$	1
p^3	$\{1, 2, 3\}$	3

Score de la ferme 1 : 103

ferme 5

ferme p^i	$\{f_i \geq p_i^k\}$	$\lvert\{f_i \geq p_i^k\}\rvert$
p^1	$\emptyset$	0
p^2	$\{2, 4\}$	2
p^3	$\{1, 2, 3, 4\}$	4

Score de la ferme 5 : 204

Comme le score de la ferme 5 est plus élevé que celui de la ferme 1, cela signifie que la ferme 5 est préférée à la ferme 1.

L'objectif de la démarche est d'obtenir un classement en 4 catégories. Nous devons donc maintenant utiliser les informations contenues dans la relation de préférence pour

Rang	ferme	score
1	Ferme 12	313
2	Ferme 24	304
3	Ferme 29	303
4	Ferme 07	214
4	Ferme 20	214
6	Ferme 10	213
6	Ferme 14	213
6	Ferme 18	213
6	Ferme 19	213
10	Ferme 05	204
10	Ferme 15	204
10	Ferme 16	204
10	Ferme 17	204
10	Ferme 23	204
15	Ferme 13	203
16	Ferme 22	202
16	Ferme 28	202
18	Ferme 25	114
19	Ferme 21	111
20	Ferme 09	104
21	Ferme 01	103
21	Ferme 02	103
21	Ferme 06	103
21	Ferme 08	103
21	Ferme 11	103
21	Ferme 26	103
27	Ferme 03	102
27	Ferme 27	102
29	Ferme 04	3

TAB. 4.18 – Classement obtenu par la méthode à points de référence : ordre lexicographique d'agrégation p^2, p^1, p^3

Rang	ferme	score
1	Ferme 24	340
2	Ferme 12	331
3	Ferme 29	330
4	Ferme 07	241
4	Ferme 20	241
6	Ferme 05	240
6	Ferme 15	240
6	Ferme 16	240
6	Ferme 17	240
6	Ferme 23	240
11	Ferme 10	231
11	Ferme 14	231
11	Ferme 18	231
11	Ferme 19	231
15	Ferme 13	230
16	Ferme 22	220
16	Ferme 28	220
18	Ferme 25	141
19	Ferme 09	140
20	Ferme 01	130
20	Ferme 02	130
20	Ferme 06	130
20	Ferme 08	130
20	Ferme 11	130
20	Ferme 26	130
26	Ferme 03	120
26	Ferme 27	120
28	Ferme 21	111
29	Ferme 04	30

TAB. 4.19 – Classement obtenu par la méthode à points de référence : ordre lexicographique d'agrégation p^2, p^3, p^1

répartir les fermes en quatre catégories. Il existe alors deux possibilités, selon si l'on souhaite que les catégories soient prédéterminées ou si les catégories doivent être construites à partir des fermes à notre disposition. Le caractère normatif du projet aurait tendance à nous pousser vers le choix de catégories prédéfinies du type "être préférée à telle ferme de référence". Cependant, une étude de la relation de préférence obtenue permet de mettre en avant des "plages" d'équivalence plutôt homogènes en s'appuyant sur le graphe des préférences.

A partir de la relation obtenue en 4.18, nous pouvons distinguer quatre grandes catégories de fermes : celles classées de 1 à 6, celles classées de 10 à 16, celles classées de 18 à 27 et enfin la ferme 04.

catégorie	fermes
C^1	7,10,12,18,20,24,29
C^2	5,13,15,16,17,22,23,28
C^3	1,2,3,6,8,9,11,14,19,21,25,26,27
C^4	4

A partir de la relation obtenue en 4.19, nous obtenons un résultat similaire ; nous pouvons distinguer quatre grandes catégories de fermes : celles classées de 1 à 6, celles classées de 11 à 16, celles classées de 18 à 26 et enfin les fermes 04 et 21.

catégorie	fermes
C^1	5,7,12,15,16,17,20,23,24,29
C^2	10, 13, 14,18,19,22,28
C^3	1,2,3,6,8,9,11,25,26,27
C^4	4,21

Il est aussi possible, si l'on considère qu'aucune des fermes présentées ne mérite d'être dans la catégorie 1, de fusionner les deux premiers groupes dans la catégorie 2.

4.3.3 Analyse des résultats

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus par les trois méthodes : "à la ELECTRE TRI" (méthode A), à partir de la moyenne (méthode B) et avec des points de référence pour le classement des fermes (avec deux variantes suivant l'ordre de l'agrégation lexicographique : méthodes C_{213} et C_{231}). Le récapitulatif des classements est présenté en table 4.3.3

Différences entre méthodes

De manière globale, nous pouvons noter que 8 fermes ne sont pas classées dans la même catégorie par les méthodes A et B, 14 par les méthodes A et C_{213} (5 seulement

méthode	"ELECTRE" A	"MOYENNE" B	Pts ref 1 C_{213}	Pts ref 2 C_{231}
Ferme 01	3	3	3	3
Ferme 02	3	3	3	3
Ferme 03	3	3	3	3
Ferme 04	3	3	4	4
Ferme 05	2	3	2	1
Ferme 06	3	3	3	3
Ferme 07	2	2	1	1
Ferme 08	3	3	3	3
Ferme 09	3	3	3	3
Ferme 10	2	2	1	2
Ferme 11	3	3	3	3
Ferme 12	2	2	1	1
Ferme 13	2	3	2	2
Ferme 14	2	3	1	2
Ferme 15	3	3	2	1
Ferme 16	3	3	2	1
Ferme 17	3	3	2	1
Ferme 18	2	2	1	2
Ferme 19	2	3	1	2
Ferme 20	2	2	1	1
Ferme 21	4	3	3	4
Ferme 22	2	3	2	2
Ferme 23	2	2	2	1
Ferme 24	2	2	1	1
Ferme 25	3	2	3	3
Ferme 26	3	3	3	3
Ferme 27	3	3	3	3
Ferme 28	2	3	2	2
Ferme 29	2	2	1	1

TAB. 4.20 – Récapitulatif des classements obtenues avec les différentes méthodes

si on regroupe les catégories 1 et 2), 18 par les méthodes B et C_{213} (11 seulement si on regroupe les catégories 1 et 2), 12 par les méthodes A et C_{231}, 17 par les méthodes B et C_{231} et 9 par les méthodes C_{213} et C_{231}. Cela montre que le classement des fermes peut donc fortement varier en fonction de la méthode utilisée, et donc que le choix de la méthode utilisée est primordial en fonction du résultat voulu. Détaillons les points de différences sur quelques exemples caractéristiques.

Tout d'abord, nous pouvons noter qu'en règle générale, les fermes sont mieux classées par les méthodes C_{213} et C_{231} que par les autres méthodes. Par exemple, seules deux fermes sont mieux classées par la méthode B que par la méthode C_{213}. Passons maintenant en revue cinq fermes caractéristiques :

1. **ferme 21 :** la ferme 21 est classée dans la catégorie 4 par les méthodes A et C_{231} et dans la catégorie 3 par les autres. Cette ferme possède un profil très déséquilibré : son score est de 14 sur le critère 1, 22 pour le critère 2, 21 pour le critère 3 et 83 pour le critère 4, ce qui est presque le meilleur score ! La méthode de la moyenne, totalement compensatoire, permet à cette ferme de dépasser le seuil critique de 25. Pour la méthode "à la ELECTRE", la ferme 21 n'étant pas meilleure que la ferme de référence $p^3 = (25, 25, 25, 25)$ sur un nombre suffisant de critères, elle ne peut être classée dans la catégorie 3 : la méthode est totalement non compensatoire : le classement de la ferme 21 serait le même que le score de 21 soit 83 ou 26 sur le dernier critère. La méthode avec point de référence C_{213} apparaît alors comme un compromis entre les deux méthodes précédentes : le fait que les trois premiers critères ne sont pas supérieur à 50 (ni même à 25) assure à la ferme 21 un mauvais classement par rapport au point de référence p^2. Cependant, parmi les fermes situées en queue de classement en utilisant la relation de préférence à partir de p^2, la ferme 21 n'est pas la plus mal lotie car elle dépasse p^1 sur un critère, ce que ne font pas les autres fermes. Comme l'ordre lexicographique d'agrégation est p^2 puis p^1 et ensuite p^3, cela permet à la ferme 21 d'être mieux classées que des fermes ayant peut être des scores meilleurs sur les trois premiers critères, mais ne battant p^1 sur aucun critère. En d'autres termes, l'ordre d'agrégation p^2 puis p^1 et ensuite p^3 favorise les fermes ayant une très bonne performance, même isolée, aux dépends de fermes plus régulières et sans critères catastrophiques. Avec la méthode C_{231}, qui a pour ordre lexicographique d'agrégation p^2 puis p^3 et enfin p^1, la ferme 21 est dans la catégorie 4 car elle ne bat le point de référence p^3 que sur un seul critère : la méthode C_{231} favorise les fermes plutôt équilibrées.

2. **ferme 28 :** la ferme 28 est l'exemple contraire à la ferme 21. Elle est en effet classée en catégorie 3 par la méthode B (moyenne) et en catégorie 2 par les autres. En effet, la valeur très faible du critère 1 tire la moyenne vers le bas, alors que pour les autres méthodes, le simple fait qu'elle soit inférieure à 25 suffit.

3. **ferme 15 :** la ferme 15 est classée dans la catégorie 1 par C_{231}, dans la catégorie 2 par C_{213} et dans la catégorie 3 par A et B. Cette ferme possède un profil particulier : deux critères sont juste au dessus de 25, et deux autres sont juste au dessus de 50. La ferme va donc être plutôt mieux classées par les méthodes avec seuil (C_{213} et C_{231} que par la méthode de la moyenne : en effet, pour les méthodes non compensatoires, il suffit de dépasser le seuil pour être considéré comme "bon", ce qui est le cas ici avec deux critères pour le point de référence p^2 et tous les critères pour p^3. Par contre, pour les méthodes compensatoires la valeur sur chaque critère a une importance (et non juste sa comparaison aux valeurs de référence) ; c'est pourquoi dans ce cas là, la ferme 15, qui ne dépasse que de très peu les niveaux de référence, va avoir une moyenne médiocre. On voit ici la différence fondamentale entre les méthodes compensatoires et celles qui ne le sont pas. Remarquons également au passage que la ferme 15 est aussi un bon exemple de l'influence de l'ordre lexicographique d'agrégation : la ferme 15 étant sur tous ses critères meilleure que le point de référence p^3 et moins bonne que p^1 va être mieux classée par la méthode C_{231} que par la méthode C_{213}. En effet, aux yeux du point de référence p^3, la ferme 15 est "parfaite", alors qu'elle est "catastrophique" du point de vue de p^1.

4. **ferme 25 :** la ferme 25 est l'exemple contraire de la ferme 15 : elle ne bat pas le point de référence p^2 sur les critères 2 et 4, tout en étant très proche de la limite. Par ailleurs, sur le critère 1, elle possède le meilleur score possible. Cette ferme possède donc un profil typique lui assurant un bon classement (catégorie 2) par la méthode compensatoire (la moyenne) et un mauvais (catégorie 3) par les méthodes non compensatoires (A, C_{213}, C_{231}). On voit ici l'importance de l'effet de seuil dans les méthodes à points de référence.

5. **ferme 04 :** la ferme 4 est classée dans la quatrième catégorie par les méthodes C_{213} et C_{231}. En effet, cette ferme ne possède aucun critère meilleur que le point de référence $p^2 = (50, 50, 50, 50)$, ce qui est unique dans le corpus des fermes. Et donc, malgré des critères en moyenne non catastrophiques, cette ferme est classée très défavorablement par les deux méthodes pour lesquelles la comparaison à ce point de référence est très importante : C_{213} et C_{231}. Cela montre l'importance de l'ordre lexicographique sur les points de référence : par la méthode A ("à la ELECTRE"), qui compare aussi les fermes à des points de référence, tous les points de référence sont pris en compte simultanément, et non l'un après l'autre. La ferme 4 n'est donc pas aussi défavorisé qu'avec les méthodes lexicographiques.

De manière générale, nous avons pu constater que les différences de classement d'une méthode à l'autre apparaissent sur les fermes soit au profil très contrasté, c'est à dire possédant des très bons critères en même temps que des très mauvais, soit aux valeurs des critères proches de celle des points de référence, ce qui amène des effets de seuil.

Cela met en lumière les caractéristiques de chaque méthode comme le montre le tableau suivant

Méthode	caractéristiques
A/ "à la ELECTRE"	non compensatoire
	à effet de seuil
	prise en compte égalitaire des différents points de référence
B/ moyenne	compensatoire
	sans effet de seuil
	pas de prise en compte des différents points de référence
C_{213}/ agrégation lexicographique	non compensatoire
p^2, p^1, p^3	à effet de seuil
	importance relative des valeurs élevées (p^1, p^2)
C_{231}/ agrégation lexicographique	non compensatoire
p^2, p^3, p^1	à effet de seuil
	importance relative des valeurs faibles (p^3, p^2)

Chaque méthode va donc favoriser un certain type de ferme au détriment d'autres types.

- **Méthode A :** cette méthode favorise les profils de ferme ayant des critères se situant juste au dessus des seuils demandés,par rapport à ceux ayant des critères se situant juste en dessous.
- **Méthode B :** cette méthode favorise les profils de ferme ayant des critères se situant juste en dessous des seuils demandés,par rapport à ceux ayant des critères se situant juste au dessus.
- **Méthode C_{213} :** cette méthode favorise les profils déséquilibrés, ayant de très bons critères (c'est à dire des critères dont la valeur est supérieure à 75), mais aussi éventuellement de très mauvais, par rapports aux profils plus équilibrés ,
- **Méthode C_{231} :** cette méthode favorise les profils équilibrés, n'ayant pas de critère trop bas (c'est à dire des critères dont la valeur est inférieure à 25) par rapport aux profils déséquilibrés.

Recommandation

Le but d'une telle application n'est pas de vouloir démontrer à toute force que la méthode à points de référence est "meilleure" que les autres méthodes existantes., mais plutôt de montrer que, chaque méthode ayant des propriétés propres, le choix de telle ou telle méthode de classement ne sera pas innocent dans l'obtention d'un résultat. On retrouve ici la position de "l'expert" scientifique, qui n'a pas vocation à prendre la décision *à la place* du décideur, mais bien de pouvoir lui présenter toutes les options de la manière la plus honnête possible afin de guider son choix en toute connaissance de cause. Dans la cas présent, il s'agit de présenter au groupe de travail les différentes méthodes proposées avec un tableau récapitulant les avantages et inconvénients de chacune afin que le groupe puisse décider sereinement de la méthode à choisir en fonction des objectifs qu'il s'est fixé.

Conclusion

Nous avons dans cette thèse proposé une nouvelle famille de modèles qualitatifs pour la représentation de préférences, tant en décision multicritère qu'en décision dans l'incertain. L'originalité des modèles proposés réside dans l'introduction de points (ou niveaux) de référence du point de vue desquels on compare les différentes alternatives en présence. Dans le premier chapitre, nous avons introduit la notion de point de référence et nous avons vu de quelle manière elle est présente en psychologie, économie, théorie du choix social, théorie de la décision multicritère ou décision dans l'incertain. Ensuite, nous avons montré comment l'introduction de points de référence dans les relations de préférence en aide à la décision multicritère permet d'obtenir des règles d'agrégation de préférences originales et variées. En particulier, nous avons présenté un modèle général et ses variantes, dont nous avons donné une caractérisation axiomatique. Le même travail a été poursuivi dans le cadre différent de la décision dans l'incertain. Là où, en décision multicritère, les alternatives sont décrites sur un produit cartésien hétérogène de plusieurs critères, les actes à comparer dans l'incertain sont issus d'un produit cartésien homogène sur les conséquences possibles en fonction des états. De même, les points de référence en multicritères et les niveaux de référence en décision dans l'incertain, bien que possédant une signification similaire, présentent des particularités différentes : richesse des profils des points de référence, pouvant se dominer ou non, ou niveaux de référence plats assimilables à un scalaire (une conséquence) dans l'incertain. Nous avons en outre proposé des extensions des modèles étudiés dans le domaine du flou (décision multicritère) ou de la décision dynamique (décision dans l'incertain).

Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons présenté deux applications concrètes de nos modèles en décision multicritère, afin de bien percevoir l'intérêt des mécanismes mis en oeuvre par ces méthodes. Tant en décision multicritère qu'en décision dans l'incertain, les modèles proposés possèdent certaines caractéristiques particulières les différenciant de la grande majorité des modèles de décision.

Niveau d'information requis

Les règles de décision proposées ne nécessitent qu'un faible niveau d'information en regard d'autres modèles plus complexes. En effet, tous les modèles proposés sont des modèles purement qualitatifs : la seule information demandée sur les critères (resp. les conséquences) est une relation de préférence sur les valeurs prises par ces critères : il n'est pas nécessaire de coder ces valeurs par des nombres. De plus, cette relation de préférence peut ne pas être complète : seule la comparaison avec les *points de référence* des valeurs prises par une alternatives sur chaque critère est nécessaire. Le niveau d'information nécessaire pour rendre compte de l'importance relative des coalitions de critères (resp. la vraisemblance relative sur les événements) est également relativement faible : seule est nécessaire la connaissance d'une relation d'importance (resp de vraisemblance) sur ces coalitions (resp. événements). Ces modèles purement ordinaux sont donc totalement caractérisés par la donnée d'un corpus de points de référence, d'une relation de préférence sur chaque critère (ou une relation de préférence sur les conséquences), et une relation d'importance sur les ensembles de critères (une relation de vraisemblance sur les événements).

Potentiel descriptif

Les règles de décision proposées diffèrent des autres modèles purement ordinaux par leurs capacités descriptives accrues. En effet, certaines situations ne peuvent être décrites à l'aide de modèles purement ordinaux classiques. C'est le cas en particulier du renversement de préférence, autrement dit de la violation du principe de la chose sûre de Savage (axiome P2) : quand l'importance relative des coalitions de critère (resp. vraisemblance des événements) provenant de la comparaison de deux alternatives (resp. deux actes) diffère suivant la valeur de ces critères (resp. conséquences), les modèles purement ordinaux de type concordance généralisée ou utilité espérée qualitative sont dans l'incapacité de rendre compte des préférences. Ces préférences sont représentables à l'aide de modèles à points de référence.

Potentiel prescriptif

L'introduction de points de référence dans les modèles d'agrégation de préférence permet d'accroître le corpus de méthodes proposées à un décideur en lui permettant de prendre en compte plusieurs points de vue sur un même problème multicritère (ou incertain) : "les hauteurs relatives perçues de deux montagnes peuvent s'inverser suivant le point de vue". La donnée par le décideur des niveaux de référence importants pour lui peut permettre de bâtir une méthode mettant en évidence les différences de point de vue, et les arbitrages existants entre ces différents points de vue. L'introduction de points de référence dans les modèles d'agrégation de préférence purement ordinaux permet aussi de produire des préférences transitives grâce au déplacement du théorème d'Arrow (et de ses extensions lexicographiques (Fishburn) ou oligarchiques (Weymark)) : il n'y a plus de critère dictateur, mais un point de vue prépondérant(profil, conséquence de référence) à partir duquel on doit se positionner favorablement.

Perspectives de recherche

Nous avons présenté de nouvelles méthodes liées à l'introduction de points de référence dans les méthodes ordinales tant en décision multicritère qu'en décision dans l'incertain. Ces méthodes sont toutes basées sur le principe d'une comparaison en terme de préférences vis-à-vis des points de référence. Les effets de seuil sont à la base des modèles que nous avons proposé, qui reposent tous sur le principe que du point de vue d'un point de référence, on est soit meilleur, soit moins bon, sans prendre en compte l'importance de la différence. Cependant, il est certain cas où plus que la préférence, c'est la proximité avec un niveau de référence qui compte. Les niveaux de référence sont alors vu comme des "alternatives-types" qu'il ne s'agit pas forcément de dépasser, mais plutôt auxquelles il s'agit de ressembler. Une autre approche pourrait consister à introduire des relations de similarité vis-à-vis de ces points de référence à la place des relations de préférence. Il s'agirait alors de regarder si une alternative est "proche" d'un point de référence, et non plus si elle est "meilleure" qu'un point de référence donné (cf Gilboa et Schmeidler (1995, 2001), Henriet (2000)). Cette "vision complémentaire" (les points de référence étant alors plutôt les centres des classes d'équivalence que leurs bornes) reste à explorer et caractériser.

Nous avons également présenté l'extension floue des modèles de préférences à points de référence. Leur utilisation pratique mériterait d'être étudiée plus profondément.

La mise en pratique des méthodes théoriques présentées dans les chapitres précédents a été présentée à travers deux exemples. Cependant, le développement d'un outil pratique d'aide à la décision utilisant les méthodes à points de référence devrait permettre une plus large utilisation de ces méthodes. En particulier, l'introduction d'un module permettant un dialogue avec le décideur sur les paramètres de la méthode semble nécessaire pour s'inspirer des méthodes interactives : un protocole de questions/réponses vis-à-vis d'un décideur devrait permettre de fixer les niveaux de référence reflétant au mieux les aspirations de ce décideur, tout en lui permettant de les affiner au fur et à mesure de la production des résultats attendus.

Parallèlement, les procédures d'élicitations des points de référence à partir de relations de préférence données ont été abordées en exemple. Ces procédures n'ont été qu'évoquées, et mériteraient d'être étudiées dans le détail. En prenant appui sur les travaux d'élicitation de préférences existants (cf Mousseau (2003)), il nous semble intéressant de produire des algorithmes permettant la révélation systématique, dans le cas où ils existent, de points de référence dans les règles de décision multicritère. Cependant, les points de référence ne servant pas ici simplement à délimiter deux catégories, mais intervenant dans la comparaison de toutes les paires d'alternatives, leur révélation devraient être moins aisée que dans la méthode ELECTRE-TRI.

Enfin nous avons, dans le cadre de la décision multicritère, introduit la possibilité de faire varier la relation de préférence entre deux alternatives suivant le point de vue (point de référence) considéré. Il serait intéressant, en s'inspirant des règles développées dans ce cadre, de faire la liaison avec les préférences dépendant des états ("state dépendent preferences", Karni (1985)) dans le cadre de la décision dans l'incertain.

Nous avons présenté dans ce documents des méthodes originales d'agrégation de préférence permettant de prendre en compte une diversité de point de vue par l'introduction de points de référence. Nous espérons avoir contribuer à montrer l'intérêt de ces méthodes, et leurs caractéristiques et fondements mathématiques. Notre souhait est maintenant que ces méthodes puissent se développer en pratique et ainsi venir enrichir le champs des méthodes d'aide à la décision multicritère ou la décision dans l'incertain.

Annexe A

Principales notations

Décision multicritère

Ensembles

N	$= \{1, \dots, n\}$ ensemble des critères
$\mathcal{X}$	ensemble des alternatives
$\mathcal{X}_i$	ensembles des valeurs prises par le critère i
$\mathcal{P}$	ensemble des points de référence
$C(x, y)$	$= \{j \mid x_j \succsim_j y_j\}$: ensemble des critères où l'alternative x est préférée à l'alternative y
X^i	$= C(x, p^i)$
X_k^*	$= X^k - X^{k-1}$
$\mathbb{P}_m(N)$	$= \{(A_1, \dots A_m) \in (2^N)^m \mid \exists x \in \mathcal{X} \text{ tel que } (X^1, \dots X^m) = (A_1, \dots, A_m)\}$

Eléments

$(x_A, y_{\overline{A}})$	$= z$ tel que $z_i = x_i$ si $i \in A$, et $z_i = y_i$ si $i \in \overline{A}$
(x_i, y_{-i})	$= (x_{\{i\}}, y_{N-\{i\}})$
	alternative prenant la valeur x_i sur le critère i et les valeurs y_j sur les autres critères
p	point de référence
p^i	point de référence i

Relations

$\succsim$	relation de préférence
$\succ$	relation de préférence stricte
$\sim$	relation d'indifférence
$\succsim_i$	relation de préférence sur les valeurs du critère i
$\succsim_N$	relation d'importance sur les parties de N
$\overset{\triangleright}{\sim}$	relation d'importance sur les sous-ensembles de $(2^N)^m$
$\succsim^p$	relation de préférence du point de vue du point de référence p

Fonctions

$u(.)$	utilité
$\nu(.)$	capacité

Décision dans l'incertain

Ensembles

S	espace des états de la nature
X	espace des conséquences possibles
$\mathcal{A}$	$=X^S$, espace des actes potentiels
$\mathcal{R}$	ensemble des niveaux de référence
F_r	$=\{s \in S, f(s) \succsim_X r\}$

Eléments

A	événement (sous-ensemble de S)
$f : S \to X$	acte
f_x	acte constant de conséquence x : $f_x(s) = x \forall s \in S$
fAg	acte défini par : $fAg(s) = f(s)$ si $s \in A$ et $g(s)$ si $s \notin A$
fAx	$= fAf_x$
r	niveau de référence

Relations

$\succsim$	relation de préférence sur l'espace des actes
$\succsim_X$	relation de préférence sur l'espace des conséquences
$\succsim_\Lambda$	relation de vraisemblance sur l'espace des événements
$\succsim^r$	relation de préférence vis-à-vis du niveau de référence r
$\succsim_\mathcal{R}$	relation d'importance sur les sous-ensembles de $\mathcal{R}$

Annexe B

Liste des axiomes utilisés

Les axiomes sont présentés par ordre d'apparition.

Décision multicritère

Axiome DI (Discrimination).

$$\forall j \in N,\ \exists x, y \in X,\quad (x_j, y_{-j}) \succsim y \ \text{ et }\ \text{non}(y \succsim (x_j, y_{-j}))$$

Axiome MC (Comparabilité Minimale).

$$\forall x, y, z, \in X, \forall j \in N,\quad (x_j, z_{-j}) \succsim (y_j, z_{-j}) \ \text{ ou }\ (y_j, z_{-j}) \succsim (x_j, z_{-j})$$

Axiome NIM (Neutralité-Indépendance-Monotonie).

$$\forall x, y, z, w \in X,\quad [C(x, y) \subseteq C(z, w) \text{ et } \ C(y, x) \supseteq C(w, z)] \Rightarrow (x \succsim y \Rightarrow z \succsim w)$$

Axiome CMp : Comparabilité minimale vis à vis des points de référence

$$\forall j \in N, \forall x \in \mathcal{X}, \forall p \in \mathcal{P},\ x_j \succsim_j p_j \text{ ou } p_j \succsim_j x_j$$

Axiome IC$\mathcal{P}$: Indépendance conditionnellement aux points de référence
$\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \{X^1, \ldots, X^m\} & = & \{Z^1, \ldots, Z^m\} \\ \{Y^1, \ldots, Y^m\} & = & \{W^1, \ldots, W^m\} \end{array}\right\} \Rightarrow [(x \succsim y) \iff (z \succsim w)]$$

Axiome EC$\mathcal{P}$: Equivalence conditionnellement aux points de référence

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\quad \{X^1, \ldots, X^m\} = \{Y^1, \ldots, Y^m\} \Rightarrow x \sim y$$

Axiome Cl_{m+1} : m+1 classes d'équivalence
Soit $\succsim$ une relation de préférence. On définit n relations binaires E_j sur chaque ensemble $\mathcal{X}_j$ par $a_j E_j b_j \iff \forall x \in \mathcal{X},\ (a_j, x_{-j}) \sim (b_j, x_{-j})$. On dit que $\succsim$ vérifie l'axiome Cl_{m+1} si et seulement si les relations E_j sont des relations d'équivalence et si $\forall j \in 1, \ldots, N$, la relation E_j possède au plus m+1 classes d'équivalences.

Axiome IC_1

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & Z \\ Y & = & W \end{array}\right\} \Rightarrow [(x \succsim y) \iff (z \succsim w)]$$

Axiome SEP : Séparabilité vis-à-vis des points de référence
$\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}$,

$$\left[\begin{array}{lll} X^p = Z^p & X^{p'} = Y^{p'} & \forall p' \neq p \\ Y^p = W^p & Z^{p'} = W^{p'} & \forall p' \neq p \end{array}\right] \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

Axiome ICRI : Indépendance conditionnellement aux relations induites
Soit $\succsim$ une relation de préférence satisfaisant l'axiome SEP et $\{\succsim_p, p \in \mathcal{P}\}$ les relations de préférence dérivées de $\succsim$ comme décrit en (2.13). Les relations de préférence $\succsim$ et $\succsim_{p^i}$ satisfont l'axiome ICRI si et seulement si $\forall x, y, x', y' \in \mathcal{X}$:

$$\left[\forall p \in \mathcal{P},\ \begin{array}{c} x \succsim^p y \iff z \succsim^p w \\ y \succsim^p x \iff w \succsim^p z \end{array}\right] \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

Axiome UNA : Unanimité On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte l'unanimité (UNA) si $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$[\forall i \in N,\ x_i \succsim_i y_i] \Rightarrow x \succsim y$$

Axiome MON : monotonie On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte la monotonie (MON) si $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$,

$$[z_j \succsim_j x_j \text{ et } x \succsim y] \Rightarrow (z_j, x_{-j}) \succsim y$$

Axiome SMON : stricte monotonie On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte la monotonie stricte (SMON) si $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$,

$$[z_j \succ_j x_j \text{ et } x \succsim y] \Rightarrow (z_j, x_{-j}) \succ y]$$

Axiome MIC : monotonie sur les ensembles de critère On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte la monotonie par inclusion sur les ensembles de critères (MIC) si $\forall A, B, C, D \subseteq N$, $\forall p \in \mathcal{P}$,

$$[A \subseteq B \text{ et } C \subseteq D] \Rightarrow [A \overset{\triangleright^p}{\sim} D \Rightarrow B \overset{\triangleright^p}{\sim} C]$$

Axiome MIPR : monotonie sur les ensembles de points de référence On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte la monotonie par inclusion sur les ensembles de points de reference (MIPR) si $\forall Q,\ R,\ S,\ T \subseteq \mathcal{P}$,

$$[Q \subseteq R \text{ et } T \subseteq S,\ Q \cup S = R \cup T = \mathcal{P}] \Rightarrow [Q \succsim_{\mathcal{P}} S \Rightarrow R \succsim_{\mathcal{P}} T]$$

Axiome UC : unanimité sur les ensembles de critère On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte l'unanimité sur les ensembles de critères (UC) si $\forall A, B \subseteq N$, $\forall p \in \mathcal{P}$,

$$A \subseteq B \Rightarrow B \overset{\rhd p}{\sim} A$$

Axiome UPR : unanimité sur les points de référence On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte l'unanimité sur les points de référence (UPR) si $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$[\forall p \in \mathcal{P},\ x \succsim^p y] \Rightarrow x \succsim y$$

Axiome SUPR : unanimité stricte sur les points de référence On dit que la relation de préférence $\succsim$ respecte l'unanimité stricte sur les points de référence (SUPR) si $\forall x, y \in \mathcal{X}$,

$$\begin{bmatrix} \forall p \in \mathcal{P},\ x \succsim^p y \\ \exists p \in \mathcal{P},\ x \succ^p y \end{bmatrix} \Rightarrow x \succsim y$$

Décision dans l'incertain

Axiomes de Savage

Axiome P1 : $\succsim$ est un pré-ordre complet sur $\mathcal{A}$, i.e., $\succsim$ est réflexive, complète et transitive.

Axiome WP1 : $\succsim$ est réflexive, quasi-transitive et sa restriction aux actes constants est un ordre complet.

Axiome P2 (ou STP) : $\forall f, g, h, h' \in \mathcal{A}$,

$$fAh \succsim gAh \iff fAh' \succsim gAh'$$

Axiome P3 : $\forall A \subseteq S, \forall h \in \mathcal{A}$,

$$x \succsim_X y \iff f_x Ah \succsim f_y Ah$$

.

Axiome WP3 : $\forall A \subseteq S, \forall h \in \mathcal{A}$,

$$(x \succ_X y \Rightarrow f_x Ah \succsim f_y Ah)$$

Axiome P4 : $\forall A, B \subseteq S, \forall x, y, x', y' \in X : x \succ_X y$ et $x' \succ_X y'$,

$$xAy \succsim xBy \iff x'Ay' \succsim x'By'$$

Axiome P5 : $\exists, x, y \in X$ tels que $f_x \succ f_y$ (i.e. $x \succ_X y$).

Axiome SP5 : $\exists, x, y, z, w \in X$ tels que $f_x \succ f_y \succ f_z \succ f_w$

Autres axiomes

Axiome de séparabilité vis-à-vis des niveaux de référence (SNR)
$\forall f, g, f', g' \in \mathcal{A}$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\left.\begin{array}{r} F_i = F'_j, \quad G_i = G'_j \\ \forall k \neq i, F_k = G_k \\ \forall k \neq j, F'_k = G'_k \end{array}\right\} \Rightarrow \; [f \succsim g \iff f' \succsim g']$$

Axiome de dépendance vis-à-vis des niveaux de référence (DNR)

$$\left.\begin{array}{r} \forall r \in \mathcal{R}, \quad F_r = F'_r \\ \forall r \in \mathcal{R}, \quad G_r = G'_r \end{array}\right\} \Rightarrow [f \succsim g \iff f' \succsim g']$$

Axiome d'Invariance ordinale vis-à-vis des niveaux de référence (IONR)
$\forall f, g, f', g' \in \mathcal{A}$:

$$\forall r \in \mathcal{R}, \; \left.\begin{array}{c} f \succsim^r g \iff f' \succsim^r g' \\ g \succsim^r f \iff g' \succsim^r f' \end{array}\right\} \Rightarrow [f \succsim g \iff f' \succsim g']$$

Axiome MON : Monotonie stricte
La relation de préférence $\succsim$, vérifiant les axiomes SNR et IONR est dite monotone stricte si $\forall f, g \in \mathcal{A}$:

$$\left.\begin{array}{r} \forall r \in \mathcal{R}, f \succsim^r g \\ \exists r^* \in \mathcal{R}, f \succ^{r^*} g \end{array}\right\} \Rightarrow f \succ g$$

Axiome d'anonymat Soit $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$. On dit que $\succsim$ respecte l'anonymat des niveaux de référence si et seulement si

$$\forall \sigma \text{ permutation sur } \{1, \ldots, p\}, \; \succsim^{r_1, \ldots, r_p} = \succsim^{r_{\sigma(1)}, \ldots, r_{\sigma(p)}}$$

Bibliographie

M. Aizerman et F. Aleskerov (1995) *Theory of choice*, Elsevier Science, Amsterdam.

M. Allais (1953) "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine", *Econometrica*, tm. 21, pp. 503–46.

K. Arrow (1951) *Social choice and individual values*, Cowles Foundations and Wiley, New York.

K. J. Arrow (1974) *Choix collectif et préférences individuelles*, Calman-Lévy, Paris.

K. J. Arrow et H. Raynaud (1986) *Social choice and Multicriteria decision making*, MIT Press, Cambridge.

K. J. Arrow, A. Sen et K. Suzumura (2002) *Handbook of Social Choice and Welfare*, Amsterdam.

H. Bartussek, C. Leeb et S. Held (2000) *Animal Needs Index for Cattle (Ani 35 L/2000 - cattle)*, Bal Gumpenstein.

P. Batteau, E. Jacquet-Lagreze et B. Monjardet, réds. (1981) *Analyse et agrégation des préférences*, Economica, Paris.

R. Benayoun, J. de Mongolfier, J. Tergny et O. Larichev (1971) "Linear programming with multiple objective functions : Step method (stem)", *Mathematical Programming*, , no. 1, pp. 366–375.

D. Black (1948) "On the rationale of group decision-making", *Journal of Political Economy*, , no. 56.

J. C. Borda (1781) *Mémoire sur les élections au scrutin*, Académie des sciences, Paris.

R. Botreau (2008) *Evaluation multicritère du bien-être animal*, Thèse de doctorat, Agro Paris Tech.

R. Botreau et A. Rolland (2008) “Evaluation multicritère du bien-être animal en ferme : une application des méthodes développées en aide à la décision multicritère”, dans *8ème congrès de la ROADEF, Clermont-Ferrand*.

B. Bouchon (1995) *La logique floue et ses applications*, Addison Wesley, New York.

C. Boutilier (1994) “Toward a logic for qualitative decision theory”, dans *Proc. of the International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pp. 75–86.

D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot et H. Prade (2006) *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision, volume 2, risque et incertain*, Hermes.

D. Bouyssou et T. Marchant (2007a) “An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in mcdm, I : The case of two categories”, *European Journal of Operational Research*, tm. 178, pp. 217–245.

D. Bouyssou et T. Marchant (2007b) “An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in mcdm, II : More than two categories”, *European Journal of Operational Research*, tm. 178, pp. 246–276.

D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, A. Tsoukiàs et P. Vincke (2000) *Evaluation and decision models : a critical perspective*, Kluwer Academic, Dordrecht.

D. Bouyssou et P. Perny (1997) “Aide multicritère à la décision et théorie du choix social.”, *Nouvelles de la Science et de la Technologie*, tm. 15, no. 4, pp. 61–72.

D. Bouyssou et M. Pirlot (2002a) “A characterization of strict concordance relations”, dans *Aiding decisions with multicriteria*, Kluwer's academic publishers, pp. 121–146.

D. Bouyssou et M. Pirlot (2002b) “Non transitive decomposable conjoint measurement”, *Journal of Mathematical Psychology*, tm. 46, pp. 677–703.

D. Bouyssou et J. Vansnick (1986) “Non compensatory and generalized noncompensatory preference structures”, *Theory and decision*, , no. 251, pp. 251–266.

M. Bracke, B. Spruijt, J. Metz et S. Schouten (2002) “Decision support system for overall welfare assessment in pregnant sows : a model structure and weighting procedure”, *J. Anim. Sci.*, tm. 80, pp. 1819–1834.

R. Brafman et M. Tennenholtz (1997) “Modeling agents as qualitative decision makers”, *Artificial Intelligence*, tm. 94, pp. 217–268.

J. Brans, B. Mareschal et P. Vincke (1984) “PROMETHEE : a new family of outranking methods in multicriteria analysis”, dans *Operational Research '84*, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland, pp. 408–421.

D. Campbell et J. Kelly (2000) “Information and preference aggregation”, *Social Choice and Welfare*, , no. 17, pp. 3–24.

A. Charnes, W. W. Cooper et R. O. Ferguson (1955) “Optimal estimation of executive compensation by linear programming”, *Management Sciences*, , no. 1, pp. 138–151.

G. Choquet (1953) “Theory of capacities”, *Annales de l'Institut Fourier*, , no. 5, pp. 131–295.

Y. Colette et P. Siary (2002) *Optimisation multiobjectif*, Eyrolles.

D. Condorcet (1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprimerie royale, Paris.

G. Debreu (1954) “Representation of a preference ordering by a numerical function”, dans P. Newman, réd., *Readings in Mathematical Economics*, John Hopkins University Press, pp. 257–263.

G. Debreu (1960) “Topological methids in cardinal utility theory”, dans K. J. Arrow, S. Karlin et P. Suppes, réds., *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Standford University Press, pp. 16–26.

D. Denneberg (1994) *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic.

Doignon, Monjardet, Roubens et Vincke (1986) “Biorders families, valued relations and preference modelling”, *Journal of Mathematical Psychology*, tm. 30.

J. Doyle et M. Wellman (1999) “Background to qualitative decision theory”, *AI Magazine*, tm. 20.

D. Dubois, H. Fargier et P. Perny (2002) “On the limitations of ordinal approaches to decision-making”, dans *Proceeding of KR 2002*, pp. 133–144.

D. Dubois, H. Fargier et P. Perny (2003a) “Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty : an axiomatic approach”, *Artificial Intelligence Journal*, tm. 148, pp. 219–260.

D. Dubois, H. Fargier, P. Perny et H. Prade (2003b) “A characterization of generalized concordance rules in multicriteria decision making”, *International Journal of Intelligent Systems, special issue on preference modeling application*, , no. 18, pp. 751–774.

D. Dubois, H. Fargier et H. Prade (1997) “Decision-making under ordinal preferences and comparative uncertainty”, dans D. Geiger et P. P. Shenoy, réds., *Proc. of UAI'97*, pp. 157–164.

D. Dubois et H. Prade (1980) *Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications*, Academic Press, New York.

D. Dubois et H. Prade (1985) *Théorie des Possibilités. Applications à la Représentation des Connaissances en Informatique*, Collection Méthode + Programmes, Masson, Paris, 2e édn., seconde édition revue et augmentée, Masson, Paris, 1987.

D. Dubois et H. Prade (1995) "Possibility theory as a basis for qualitative decision theory", dans *Proc. of IJCAI'95, Montreal*, pp. 1924–1930.

D. Dubois et H. Prade, réds. (1998-2000) *Handbooks of fuzzy sets series*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Pays-Bas.

D. Dubois, H. Prade et R. Sabbadin (1998) "Qualitative decision theory with Sugeno integrals", dans *Proc. of UAI'98*, pp. 121–128.

D. Dubois, H. Prade et R. Sabbadin (2001) "Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory ", *European Journal of Operational Research*, tm. 128, pp. 459–478.

M. Ehrgott et X. Gandibleux (2000) "A survey and annoted bibliography of multiobjective combinatorial optimization", *OR Spektrum*, tm. 22, pp. 425–460.

D. Ellsberg (1961) "Risk, ambiguity and the Savage axioms", *Quarterly Journal of Economics*, tm. 75, pp. 643–669.

L. Euler (1736) "Solution problematis ad geometriam situs pertinentis", *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol*, tm. 7, pp. 128–14O.

H. Fargier et P. Perny (1999) "Qualitative decision models under uncertainty without the commensurability hypothesis", dans K. Laskey et H. Prade, réds., *Proceedings of UAI'99*, Morgan Kaufmann, pp. 188–195.

H. Fargier et P. Perny (2000) "Modélisation des préférences par une règle de concordance généralisée", dans M. P. A. Colorni et B. Roy, réds., *Selected Papers from* $49^t h$ *and* $50^t h$ *meeting of the EURO working group on MCDA*.

Farm Animals Welfare Council (1992) "Fawc updates the five freedoms", *Veterinary Record*, tm. 17, p. 357.

P. Farquhar (1984) "Utility assessment methods", *Management Science*, tm. 30, pp. 1283–1300.

P. C. Fishburn (1967) "Methods of estimatnig additive utilities", *Management Science*, tm. 13, pp. 435–453.

P. C. Fishburn (1970) *Utility theory for decision making*, John Wiley and Sons, New York.

P. C. Fishburn (1973) *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press.

P. C. Fishburn (1975) "Axioms for lexicographic preferences", *Review of economic studies*, tm. 42, pp. 415–419.

P. C. Fishburn (1976a) "Dictators on blocks : Generalizations of social choice impossibility theorems", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, tm. 20, pp. 153–170.

P. C. Fishburn (1976b) "Noncompensatory preferences", *Synthèse*, tm. 33, pp. 393–403.

J. Fodor, , S. Orlovski, P. Perny et M. Roubens (1998) *The use of fuzzy preference models in multiple criteria choice, ranking and sorting*, chap. 3, Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 69–101.

J. Fodor et M. Roubens (1994) *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwer Academic Publishers.

M. Gardner (1970) "Mathematical games : The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference", *Scientific American*, tm. 223, pp. 110–114.

A. F. Gibbard (1969) "Intransitive social indifference and the arrow dilemma", *Unpublished Manuscript*.

I. Gilboa et D. Schmeidler (1995) "Case-based decision theory", *The Quaterly Journal of Economics*, tm. 110, pp. 605–639.

I. Gilboa et D. Schmeidler (2001) *A Theory of Case-based decisions*, Cambridge University Press.

M. Gondran et M. Minoux (1995) *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 3e édition.

C. Gonzales et P. Perny (2004) "Gai networks for utility elicitation", dans *9th International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 224.

M. Grabisch (1996) "The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making", *European Journal of Operational Research*, tm. 89, pp. 445–456.

M. Grabisch et C. Labreuche (2002a) "Bi-capacities", dans *1st Joint International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and 3rd International Symposium on Advanced Intelligent Systems*.

M. Grabisch et C. Labreuche (2002b) “Bi-capacities for decision making on bipolar scales”, dans *EUROFUSE, Workshop on information systems, Varenna, Italie*, pp. 185–190.

M. Grabisch et C. Labreuche (2003) “Capacities on lattices and k-ary capacities”, dans *Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, Zittau, Germany*.

M. Grabisch et P. Perny (2003) *Agrégation multicritère*, C. Marsala (Ed), pp. 81–120.

M. Grabisch et M. Roubens (2000) “Application of the Choquet integral in multicriteria decision making”, dans M. Grabisch, T. Murofushi et M. Sugeno, réds., *Fuzzy Measures and Integrals - Theory and Applications*, Physica Verlag, pp. 348–374.

S. Greco, B. Matarazzo et R. Slowinski (2002) “Bipolar sugeno and choquet integrals”, dans *EUROFUSE, Workshop on information systems, Varenna, Italie*, pp. 117–144.

C. Hadji (1997) *L'évaluation démystifiée*, ESF Editeur.

W. Hamilton (1856) “Account of the icosian calculus”, *Proc. Roy. Irish Acad.*, tm. 5, pp. 415–416.

P. Hansen (1980) “Bicriterion path problems”, dans G. Fandel et T. Gal, réds., *Multicriteria Decision Making*.

L. Henriet (2000) *Systèmes d'évaluation et de classification multicritère pour l'aide à la décision : construction de modèles et procédures d'affectation*, Thèse de doctorat, université Paris Dauphine.

M. Inuiguichi, H. Ichihashi et H. Tanaka (1989) “Possibilistic linear programming with measurable multiattribute value functions”, *ORSA Journal on Computing*, , no. 1.

J.-Y. Jaffray (2003) *Probabilités subjectives et rationalité de l'action*, CNRS Editions.

D. Kahneman et A. Tversky (1979) “Prospect theory : an analysis of decision under risk”, *Econometrica*, , no. 47.

E. Karni (1985) *Decision Making under Uncertainty : the Case of State-Dependent Preferences*, Cambridge : Harvard University Press.

R. Keeney et H. Raiffa (1976) *Decisions with multiple objectives : Preferences and value tradeoffs*, J. Wiley, New York.

J. Kelly (1987) *Social Choice Theory : an Introduction*, Springer Verlag.

J. Knetsch (1989) “The endowment effect and evidence of non-reversible indifference curves”, *American Economic Review*, , no. 79, pp. 1277–1284.

F. Knight (1921) *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Miffin.

D. Krantz, R. Luce, P. Suppes et A. Tversky (1971) *Foundations of measurement*, tm. 1 : Additive and polynomial representations, Academic Press, New York.

J. Laffont (1991) *Economie de l'incertain et de l'information*, Economica.

D. Lehmann (1996) "Generalized qualitative probability : Savage revisited", dans *Proc. 12th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Portland, OR*, pp. 381–388.

W. W. Leontief (1947) "Introduction to a theory of the internal structure of functional relationships", *Econometrica*, , no. 51, pp. 361–373.

S. Lichtenstein et P. Slovic (2006) *the construction of preference*, Cambridge University Press.

G. Loewenstein et D. Adler (1995) "A bias in the prediction of tastes", *Economic Journal*, , no. 105, pp. 507–521.

R. D. Luce (1956) "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, tm. 24, pp. 178–191.

P. Lévine et J. C. Pomerol (1986) "Priam, an interactive program for choosing among multiple attribute alternatives", *European Journal of Operationnal Research*, , no. 25, pp. 272–280.

J. Marichal (2000) "An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, tm. 8, no. 6, pp. 800–807.

C. F. McClennen (1990) *Rationality and Dynamic Choice*, Cambridge University Press.

V. Mousseau (2003) *Elicitation des préférences pour l'aide multicritère à la décision*, Thèse de doctorat, Mémoire présenté en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Dauphine, URL `http ://www.lamsade.dauphine.fr/ mousseau/hdr-main.pdf`.

V. Mousseau, R. Slowinski et P. Zielniewicz (2000) "A user-oriented implementation of the ELECTRE TRI method integrating preference elicitation suuport", *Computer and Operations Research*, tm. 27, pp. 757–777.

A. Munro et R. Sugden (2003) "On the theory of reference-dependant model", *Journal of Economic Behavior and Organization*, tm. 50, pp. 407–428.

P. Pattanaik et M. Salles, réds. (1983) *Social Choice and Welfare*.

P. Perny (1992) *Modélisation, agrégation et exploitation de préférences floues dans une problématique de rangement*, Thèse de doctorat, Université Paris-Dauphine.

P. Perny (1998) “Multicriteria filtering methods based on concordance and non discordance principles”, *Annals of operations Research*, , no. 80, pp. 137–165.

P. Perny (2000) “Modélisation des préférences, agrégation multicritère et systèmes d’aide à la décision”, *Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, LIP6*.

P. Perny et A. Rolland (2006) “Reference-dependent qualitative models for decision making under uncertainty”, dans Brewka et al., réds., *Actes 17ème conférence ECAI*, pp. 422–426.

P. Perny et M. Roubens (1998) *Preference Modelling*, Kluwer Academic Publishers, pp. 69–101.

H. Pieron (1963) *La docimologie*, PUF.

M. Pirlot et P. Vincke (1997) *Semiorders*, Kluwer Academic Publishers.

J. Pomerol et S. Barba-Romero (1993) *Choix multicritère dans l’entreprise*, Hermes.

F. Roberts (1979) *Measurement theory with applications to decision making, utility and the social science*, Addison-Wesley.

A. Rolland (2003) “Agrégation de préférences et point de référence”, dans *Ecole d’Automne de Recherche Opérationnelle, Tours, 2003*, pp. 154–160.

A. Rolland (2004) “Bi-capacity-based concordance rule”, dans *Proceeding of IPMU ’04, Peruggia*, pp. 209–216.

A. Rolland (2006a) “On bi-capacity-based concordance rules in multicriteria decision making”, dans Bouchon-Meunier, Coletti et Yager, réds., *Modern information Processing, From Theory to application*, Elsevier, pp. 231–244.

A. Rolland (2006b) “Points de référence en décision multicritère”, dans *Actes de la 7ème conférence ROADEF*, Presses Universitaires de Valenciennes, pp. 153–167.

B. Roy (1968) “Classement et choix en présence de point de vue multiples (la méthode electre)”, *Les cahiers du CERO*, , no. 8, pp. 57–75.

B. Roy (1973) “How outranking relations helps multiple criteria decision making”, dans J. Cochrane et M. Zeleny, réds., *Multicriteria Decision Making*, University of Carolina, pp. 179–201.

B. Roy (1976) “From optimization to multicriteria decision aid : three main operationnal attitudes”, dans H. Thiriez et S. Zionts, réds., *Multiple Criteria Decision Making, lectures notes in economics and mathematical systems*, Springer-Verlag, pp. 1–34.

B. Roy (1978) “Electre III : un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples”, *Les cahiers du CERO*, tm. 20, no. 1, pp. 3–24.

B. Roy (1985) *Méthodologie multicritère d’aide à la décision*, Economica.

B. Roy (1996) *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, Kluwer Academic, Dordrecht.

B. Roy et D. Bouyssou (1993) *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica, Paris.

W. Samuelson et R. Zeckhauser (1988) “Status quo bias in decision making”, *Journal of Risk and Uncertainty*, , no. 1, pp. 7–59.

L. J. Savage (1954) *The Foundations of Statistics*, J. Wiley and Sons, New-York.

D. Schmeidler (1986) “Integral representation without additivity”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, , no. 97, pp. 255–261.

A. Schärlig (1985) *Décider sur plusieurs critères*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes.

D. Scott (1964) “Measurement models and linear inequalities”, *Journal of Mathematical Psychology*, , no. 1, pp. 233–247.

A. K. Sen (1986) “Social choice theory”, dans M. I. K. J. Arrow, réd., *Handbook of Mathematical Economics*, chap. 22, Elsevier Sciences Publishers, North-Holland, pp. 1073–1181.

R. Slowinski, S. Greco et B. Matarazzo (2002) “Axiomatization of utility, outranking and decision-rule preference models for multiple-criteria classification problems under partial inconsistency with the dominance principle”, *Control and Cybernetics*, tm. 4, no. 31, pp. 1005–1035.

O. Spanjaard (2003) *Exploitation de préférences non classiques dans les problèmes combinatoires : modèles et algorithmes pour les graphes*, Thèse de doctorat, Université Paris-Dauphine.

R. E. Steuer (1986) *Multiple criteria optimization : theory, computation and application*, John Wiley and Sons, New York.

R. E. Steuer et E. U. Choo (1983) “An interactive weighted tchebycheff procedure for multiple objective programming”, *Mathematical programming*, tm. 26, pp. 326–344.

R. Sugden (2003) “Reference-dependent subjective expected utility”, *Journal of Economic Theory*, tm. 111, pp. 172–191.

M. Sugeno (1974) *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Thèse de doctorat, Tokyo Institute of Technology.

M. Sugeno (1977) “Fuzzy measures and fuzzy integrals - a survey”, dans M. M. Gupta, G. N. Saridis et B. R. Gaines, réds., *Fuzzy automata and decision processes*, North Holland, Amsterdam, pp. 89–102.

M. Sugeno et T. Murofushi (1987) “Choquet integral as an integral form for a general class of fuzzy measures”, dans *2nd IFSA Congress*, pp. 408–411.

A. Sundrum et I. Rubelowski (2001) “The meaningfulness of design criteria in relation to the mortality of fattening bulls”, *Acta Agri. Scand., Section A, Animal Science Supplementum*, tm. 30, pp. 48–52.

R. Thaler (1980) “Toward a positive theory of consuumer choice”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, tm. 1, pp. 39–60.

A. Tversky et D. Kahneman (1991) “Loss aversion in riskless choice : a reference-dependant model”, *Quaterly Journal of Economics*, tm. 106, pp. 1039–1061.

E. Ulungu et J. Teghem (1994) “Multi-objective combinatorial optimization problems : a survey”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, tm. 3, pp. 83–104.

D. Vanderpooten et P. Vincke (1989) “Description and analysis of some representative interactive multicriteria procedures”, *Mathematical and Computer Modelling*, tm. 12, pp. 1221–1238.

J. Vansnick (1986) “On the problems of weights in mcdm (the noncompensatory approach)”, *European Journal of Operationnal Research*, tm. 24, pp. 288–294.

I. Veissier, H. Blokhuis, R. Geers, B. Jones et M. Miele (2005) “Le projet welfare quality : de l’attente des consommateurs à la mise en place de certifications bien-être en élevage”, *Bull. Acad. Vét. France*, tm. 158, no. 3, pp. 263–268.

P. Vincke (1989) *L’aide multicritère à la décision*, Ellipses.

P. Vincke (1992) *Multicriteria Decision-Aid*, J. Wiley, New York.

J. von Neumann et O. Morgenstern (1947) *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press.

P. Wakker (1989) *Additive representations of preferences - A new foundation of decision analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht.

J. Weymark (1984) "Arrow's theorem with social quasi-ordering", *Public Choice*, , no. 42, pp. 235–246.

A. P. Wierzbicki (1980) "The use of reference objectoves in multiobjective optimization", dans G. Fandel et T. Gal, réds., *Multiple Criteria decision making : theory and application, lecture notes in economics and mathematical systems*, Springer-Verlag, pp. 468–486.

A. P. Wierzbicki (1999) "Reference point approaches", dans T. Gal, T. J. Stewart et T. Hanne, réds., *Multicriteria decision making : advances in MCDM models, Algorithmes and Applications*, chap. 9, Kluwer Academic Publishers.

W. Yu (1992) *Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique du tri : concepts, méthodes et applications*, Thèse de doctorat, Université Paris-Dauphine.

L. Zadeh (1965) "Fuzzy sets", *Informations and Control*, , no. 8, pp. 338–353.

Résumé. Cette thèse porte sur l'étude de modèles d'agrégations de préférences utilisant des points de références. En théorie de la décision, de nombreux travaux axiomatiques montrent les difficultés théoriques et pratiques que pose l'agrégation de relations de préférences partiellement conflictuelles. Les théorèmes d'impossibilité existants expliquent d'une part les difficultés rencontrées par les concepteurs de méthodes multicritères reposant sur une modélisation ordinale des préférences mais aussi la difficulté de concevoir des modèles purement qualitatifs pour la décision dans l'incertain. Nous proposons ici de comparer les solutions non plus de manière directe, mais de manière indirecte en examinant leurs mérites respectifs du point de vue de plusieurs points de références. Nous étudions le potentiel descriptif et prescriptif de ces modèles, les propriétés formelles des règles d'agrégation associées, et nous proposons des théorèmes de représentation caractérisant les préférences représentables par ces modèles dans les domaines de la décision multicritère et la décision dans l'incertain. Enfin, nous montrons leur apport potentiel en aide à la décision à travers des exemples d'application.

Mots-clés : modélisation des préférences, méthodes ordinales d'agrégation, décision multicritère, décision dans l'incertain, points de référence.

Abstract The work detailled on this thesis is about the study of preference aggregation models using reference points. In decision theory, numerous axiomatic results show the theorical and practical difficulties due to the aggregation of preference relations which are partially in conflict. Impossibility theorems explain not only the difficulties to build purely ordinal methods in multicriteria decision aiding, but also the difficulties to obtain purely qualitative models in decision under uncertainty. We propose here to compare the alternatives not directly but through their respectives qualities from the point of view of several reference points. We study the descriptive and prescriptive potential of these models, the properties of the associated aggregation rules, and we propose representation theorems in order to caracterize the preference relations which are representable by such models in melticriteria decision theory or decision under uncertainy. We finish with a few application exemples.

Keywords : Preference modelling, ordinal aggregation methods, multricriteria decision, decision under uncertainty, reference points.