Points de référence en décision multicritère

Antoine Rolland

LIP6 - Laboratoire d'Informatique de Paris VI
8 rue du Capitaine Scott 75015 Paris
antoine.rolland@lip6.fr

Résumé L'introduction de points de référence dans une relation de préférence ordinale permet de décrire des relations de préférence multicritères non représentables par une approche reposant uniquement sur une comparaison directe des alternatives. En particulier, nous montrons ici comment l'introduction de plusieurs points de référence permet de dépasser le théorème d'Arrow et d'obtenir des relations de préférences transitives et non dictatoriales par agrégation lexicographique de préférences ordinales.

Mots-Clefs. Agrégation multicritère ; méthodes ordinales, points de référence.

1 Introduction

De nombreuses méthodes naïves (apparemment naturelles mais recelant des propriétés peu souhaitables) sont couramment employées pour des problèmes de choix ou de classement en aide à la décision. Pourtant, en théorie de la décision, de nombreux travaux axiomatiques montrent les difficultés théoriques et pratiques que pose l'agrégation de relations de préférences partiellement conflictuelles dans le domaine de l'agrégation ordinale. Les théorèmes d'impossibilité produits expliquent les difficultés rencontrées par les concepteurs de méthodes multicritères. Il faut cependant remarquer que ces résultats reposent, pour la plupart, sur une hypothèse d'indépendance qui n'autorise de définir la préférence entre deux solutions potentielles que par comparaison directe de ces deux solutions. Pourtant, une alternative intéressante existe : il s'agit de comparer les solutions de manière indirecte en examinant leurs mérites respectifs par rapport à des points de références (e.g. profils types spécifiant des desiderata, niveaux d'exigences, exemples de cas typiques auxquels il convient de se référer). Si ce type de règles de décision (qui rappelle certaines méthodes de classification supervisées développés en intelligence artificielle) est déjà fréquemment utilisé en aide à la décision pour certains problèmes tri multicritère, mais aussi pour la décision à partir de cas, il n'a encore fait l'objet d'études systématiques sur le plan théorique et les fondements axiomatiques de ces méthodes méritent encore d'être développés. Dans cette perspective, l'objet de cet article est d'étudier le potentiel descriptif et prescriptif de certains modèles de comparaison indirects utilisant des points de références. Il s'agit donc d'étudier les propriétés formelles des règles d'agrégation associées, de proposer des théorèmes de représentation caractérisant les préférences représentables par de ces modèles. Après avoir montré l'intérêt descriptif que présente les points de référence dans la section 2, nous établissons le modèle de base de l'agrégation de préférences avec points de référence dans la section 3, puis présentons en section 4 quelques procédures d'agrégation particulières.

2 Points de référence en décision

2.1 En décision multicritère ordinale

Malgré la diversité des modèles existant pour représenter les préférences en multicritère, il arrive que l'on ne dispose pas toujours de la capacité descriptive souhaitée. Considérons l'exemple suivant

Exemple 1 *Une agence de voyage souhaite pouvoir proposer, sur son site internet, un classement des séjours de vacances (clubs, hôtels, chambres d'hôtes...) personnalisé suivant les demandes du client. Elle a identifié trois critères principaux sur lesquels se basent ses clients pour effectuer leurs choix, une fois la destination sélectionnée : le prix (1), le confort (2) et la proximité du site touristique choisi (3).*

Les performances de chaque lieu potentiel sont évaluées suivant trois échelles différentes. Le prix est en euros (et d'autant plus apprécié qu'il est bas !), le confort est noté de zéro à cinq étoiles et la distance au site choisi (que l'on cherche à minimiser) est répartie en quatre catégories (A : sur place ; B : à proximité ; C : dans les environs, D : éloigné).

Considérons les quatre alternatives suivantes :

	1	2	3
x^1	40	***	C
x^2	60	***	A
x^3	40	**	C
x^4	60	**	A

Supposons que le décideur ait comme préférences $x^2 \succ x^1$ et $x^3 \succ x^4$.

Ces préférences semblent plausibles : dans le cadre d'un hébergement trois étoiles, le prix a moins d'importance que la proximité au site choisi, alors que dans le cadre d'un hébergement de moins bonne qualité, le prix devient le critère important. Or ces préférences ne peuvent être obtenues par des modèles de préférence classiques : l'utilité additive (voir par exemple [11]), ou, dans le domaine ordinal, la règle de concordance généralisée (voir par exemple [18] [6]) ne peuvent modéliser une telle relation de préférence :

- **utilité additive :** selon le modèle de l'utilité additive, $x \succsim y$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$. On peut vérifier que dans le cas présent, $x^2 \succ x^1$ entraîne obligatoirement que $u_1(60) + u_3(A) > u_1(40) + u_3(C)$, alors que $x^3 \succ x^4$ entraîne l'inverse : il y a donc une contradiction.

- **règle de concordance généralisée :** selon le modèle de concordance, $x \succsim y$ si et seulement si $C(x,y) \succsim' C(y,x)$, avec $C(x,y) = \{j \in N, \quad x_j \succsim_j y_j\}$, où les relations $\succsim_j$ sont des relations de préférence sur les valeurs prises par chaque critère, et $\succsim'$ une relation d'importance sur les coalitions de critères, N étant l'ensemble des critères. On peut vérifier qu'ici, $x^2 \succ x^1$ entraîne obligatoirement que la coalition $\{2,3\}$ est plus importante que la coalition $\{1,2\}$, alors que $x^3 \succ x^4$ entraîne l'inverse : il y a donc une impossibilité.

Nous voyons donc que les modèles de préférences multicritères considérés ci-dessus ne sont pas suffisants pour pouvoir décrire les préférences d'un décideur. Une autre approche possible est de considérer que le décideur raisonne par rapport à une norme préétablie quand il doit établir une relation de préférence, en comparant les performances des alternatives à des profils de référence types. Ainsi, considérons le point de référence $p = (50, ***, A, =)$, et la règle d'agrégation suivante : $x \succsim y \iff \{j, \quad x_j \succsim_j p_j\} \succsim' \{j, \quad y_j \succsim_j p_j\}$, avec $\succsim'$ une relation d'importance sur les coalitions de critères telle que $\{1,2,3\} \succ' \{2,3\} \succ' \{1,2\} \succ' \{1\} \succ' \{3\}$. Cette règle nous permet de retrouver les préférences $x^2 \succ x^1$ et $x^3 \succ x^4$, car $\{j, \quad x^1_j \succsim_j p_j\} = \{1,2\}$, $\{j, \quad x^2_j \succsim_j p_j\} = \{2,3\}$, $\{j, \quad x^3_j \succsim_j p_j\} = \{1\}$ et $\{j, \quad x^4_j \succsim_j p_j\} = \{3\}$.

Cet exemple montre que l'introduction de points de références peut, dans certains cas, faciliter la description de préférences observées. L'introduction de points de référence dans une procédure de choix ou de classement est donc naturelle dans certain cas.

L'utilisation de points de référence est déjà présente dans certains problèmes multicritères, tels que ceux relevant de la problématique du tri. On définit la problématique du tri comme celle où le problème consiste à affecter chaque alternative à une catégorie spécifique prédéfinie. On parlera de tri ordonné si les catégories sont ordonnées. Une possibilité pour trier les alternatives consiste à les comparer à des alternatives de référence : c'est l'objet de la méthode Electre Tri (voir Roy [17]), et des développements proposés par Roy et Bouyssou [18], Perny [15], Mousseau et al. [12], Henriet [10] et Yu [22]. Plus récemment, Bouyssou et Marchant ([2],[3]) ont eu une approche plus théorique du problème du tri ordonné, en proposant une axiomatique des modèles de tri non-compensatoire utilisant les techniques du mesurage conjoint.

L'objet de cet article est de proposer des méthodes de rangement dérivées des méthodes de tri ordonné, en utilisant des points de référence. Le but de ces méthodes est donc de produire une relation de préférence entre les alternatives. Nous ne nous intéressons pas ici aux affectations d'alternatives à des catégories pour elles-mêmes, mais à une relation de préférence sur ces alternatives induite par les affectations aux catégories.

2.2 En théorie du choix social

Un problème très voisin de celui de l'agrégation des préférences en multicritère a été étudié depuis longtemps en théorie des élections. Il consiste en la recherche d'une procédure permettant d'agréger de manière raisonnable les avis exprimés par plusieurs votants concernant divers candidats afin de dégager un élu (ou de classer les candidats). Les nombreux résultats obtenus en théorie du choix social sont riches d'enseignements pour l'aide multicritère à la décision (voir Bouyssou et Perny [4]). Il est aisé de voir le lien entre les deux domaines, grâce aux correspondances suivantes :

Choix social	Multicritère
candidat	alternative
votant	critère
préférence individuelle	préférence partielle
préférence collective	préférence globale

Cependant, ces correspondances ne sont pas des équivalences, et si certaines conditions sont transposables aisément du cadre du choix social vers celui de la décision multicritère (unanimité, monotonie...), il faut éviter toute généralisation hâtive.

Le théorème d'Arrow [1] est central en théorie du choix social. Il concerne les méthodes qui visent à agréger n, $(n \geq 3)$, préordres complets en un préordre complet synthétique. Chaque votant fournit donc une liste classant par ordre de préférence les candidats (avec éventuellement des ex-aequo), une procédure d'agrégation devant ensuite synthétiser ces avis en un seul. Passons en revue les conditions que l'on aimerait voir remplies par cette procédure d'agrégation.

- **Non dictature :** il n'existe pas de dictateur (aucun des votants ne peut dicter en toute circonstance ses préférences à la majorité)
- **Universalité :** toute configuration de liste est admissible
- **Transitivité :** la méthode doit fournir un classement sous la forme d'un préordre complet
- **Unanimité :** le résultat de la méthode ne doit pas contredire un avis unanime des votants
- **Indépendance :** le résultat de la comparaison entre deux candidats ne dépend que de leur position relative dans les listes ordonnées fournies par les votants

On peut alors énoncer le célèbre théorème d'Arrow :

Théorème 1 *Théorème d'Arrow (1951)*
Dès lors qu'il y a plus de trois candidats, aucune méthode d'agrégation ne peut satisfaire les conditions d'universalité, de transitivité, d'unanimité, d'indépendance et de non dictature.

Transposé dans le cas de la décision multicritère, ce résultat indique l'impossibilité d'obtenir une procédure d'agrégation non dictatoriale, transitive, et respectant les principes d'universalité, d'unanimité et d'indépendance. Par contre, différents types de règles peuvent apparaître dès que l'on abandonne l'un ou l'autre de ces principes. On trouvera des exemples dans Fishburn [7], [8] (procédures d'agrégation lexicographiques) ou Weymark [21] (procédures quasi-transitives).

Il semble exclu de renoncer au principe d'unanimité (que dire d'une procédure qui donnerait la préférence à y sur x sachant que x est préféré sur chaque critère à y ?). De même, on préférerait ne pas avoir à contraindre par avance les préférences possibles du décideur sur chaque attribut, et donc respecter le principe d'universalité. Comme l'acceptation de règles dictatoriales va à l'encontre du principe même de décision multi-attribut (si un attribut seul est décisif, il est inutile d'en étudier plusieurs), les deux seuls principes entre lesquels ont doit arbitrer sont la transitivité et l'indépendance (voir à ce sujet Perny [14]).

De fait, les méthodes d'agrégation aboutissent la plupart du temps à des relations de préférence ni complètes, ni transitives. Ce n'est pas un problème en soi dans les procédures d'aide à la décision (le fait de ne pas pouvoir comparer directement deux alternatives apporte tout de même de l'information), mais c'est un inconvénient majeur pour obtenir une recommandation (choix ou rangement). La plupart des méthodes d'agrégation sont basées sur l'hypothèse que la comparaison relative de deux alternatives ne dépend que de ces deux alternatives, et non des alternatives tierces. Cette indépendance vis-à-vis des autres alternatives dans la première phase est importante pour garantir une certaine stabilité des préférences par rapport à des ajouts ou des suppressions d'alternatives, mais amène, dans le cadre de l'agrégation ordinale, à des relations généralement non transitives. En relâchant un peu cet axiome d'indépendance, nous pouvons obtenir des relations de préférence complètes et transitives.

Campbell et Kelly ([5]) ont exploré une voie où la procédure d'agrégation multicritère change suivant la valeur prise par les alternatives à comparer sur un critère. C'est une première remise en cause de l'axiome d'indépendance vis à vis des alternatives non concernées. Dans un esprit légèrement différent, nous proposons pour notre part d'utiliser un (ou plusieurs) "points de référence" qui serviront de support à l'évaluation respective des deux alternatives à comparer.

2.3 En psychologie et en économie

La théorie économique classique vise à proposer une modélisation du comportement de l'agent économique. Elle est basée entre autre sur l'hypothèse que les préférences du consommateur suivent un modèle unique quel que soit la situation initiale. Or il est maintenant admis, à la suite de nombreuses expériences, que les préférences d'un agent économique entre deux options varient suivant ce qui est perçu comme étant le point de référence : le consommateur ne réagit pas seulement par rapport à la valeur intrinsèque du bien qui lui est proposé (évaluée à l'aide d'une fonction d'utilité), mais aussi de ses possessions ou de son état initial : c'est ce qui est appelé le biais de *statu quo*. En particulier, il est bien établi qu'une personne a plus tendance à préférer une certaine option à une autre si cette option est le statu quo que si elle ne l'est pas. C'est le biais de statu quo, décrit par Thaler [19]. Mais c'est un des rares exemples d'étude du rôle qui peut être joué par un point de référence : peu de travaux ont été consacré à des théories économiques cohérentes avec ce biais de status quo. Le travail le plus complet proposé est certainement la théorie des préférences dépendant d'un point de référence de Tversky et Kahneman [20], dans laquelle les préférences d'un individu sur des biens sont conditionnées par ce qu'il possède déjà, ce qui joue le rôle de point de référence. Cette théorie a prédit de manière satisfaisante des résultats obtenus lors d'expériences psychologiques. Des développements de cette théorie, et en particulier les bases axiomatiques des préférences dépendant d'un point de référence, ont récemment été proposés par Munro et Sugden [13].

3 Points de référence : un modèle de base

La présence d'un point de référence dans des relations de préférence a déjà été étudiée dans le cadre de relations bien définies : information parfaitement disponible, commensurabilité des différents critères... Les méthodes d'optimisation multicritères basées sur l'utilisation d'un point idéal et/ou nadir utilisent *de facto* des points de référence. Cependant, l'information disponible sur les alternatives est parfois pauvre ou imprécise. C'est pourquoi nous nous intéressons ici aux approches ordinales, pour lesquelles l'apport d'un point de référence n'a pas encore étudié à notre connaissance. Il s'agit donc ici d'étudier les relations de préférence basées sur une première comparaison ordinale avec un points de référence. Ces relations de préférence sont basées sur l'utilisation des ensembles de critères sur lesquels les alternatives sont meilleures que le point de référence. En particulier, la comparaison entre deux alternatives x et $y \in \mathcal{X}$, relativement à un ensemble de points de référence $\mathcal{P} = \{p^1, \ldots, p^m\}$, dépend de l'importance relative des ensembles de critères où les alternatives x et y sont meilleures que les points de référence. Nous désignerons ces relations de préférence comme étant des relations basées sur l'utilisation d'une règle de concordance à partir de points de référence.

Soit $N = \{1, \ldots, n\}$l'ensemble des critères, et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$ l'espace de description des alternatives. Il existe sur chaque critère $j \in N$ une relation de préférence $\succsim_j$. On note $C(x, y) = \{j \in N,\ x_j \succsim_j y_j\}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points de référence. Nous supposerons ici que les points de référence sont connus et ont été explicités par le décideur. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on note X_{p^i} (ou simplement X_i) l'ensemble $C(x, p^i)$.

On considère alors le modèle de relation de préférence suivant :

$$x \succsim y \iff (C(x, p^1), \ldots, C(x, p^m)) \succsim' (C(y, p^1), \ldots, C(y, p^m)) \qquad (1)$$

où $\succsim'$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de $(2^N)^m$, ce qui se réécrit (Modèle MPR1)

$$x \succsim y \iff (X_1, \ldots, X_m) \succsim' (Y_1, \ldots, Y_m) \qquad (2)$$

Exemple 2 *Considérons un problème avec 5 critères, et un ensemble de points de référence $\mathcal{P} = \{p^1, p^2, p^3\}$. Une relation de préférence vérifiant le modèle MPR1 peut être la suivante : l'alternative x est préférée à l'alternative y s'il existe une majorité de points de référence pour lesquels le cardinal de l'ensemble des critères où x est meilleur que le point de référence est plus grand que le cardinal de l'ensemble des critères où x est meilleur que le point de référence. Soit :*

$$x \succsim y \iff |\ \{p \in \mathcal{P},\ |X_p| \geq |Y_p|\}\ | \geq |\ \{p \in \mathcal{P},\ |Y_p| \geq |X_p|\}\ |$$

Nous donnons ici une condition nécessaire et suffisante pour que la relation de préférence $\succsim$ s'exprime grâce au modèle MPR1.

Axiome 1 Indépendance conditionnelle par rapport aux points de référence (IC$\mathcal{P}$)

$$\begin{bmatrix} (X_1, \ldots, X_m) = (Z_1, \ldots, Z_m) \\ (Y_1, \ldots, Y_m) = (W_1, \ldots, W_m) \end{bmatrix} \Rightarrow x \succsim y \iff z \succsim w$$

Cet axiome signifie simplement que si deux alternatives se comportent de la même manière vis-à-vis de chaque point de référence, elles sont équivalentes aux yeux du décideur. La relation de préférence ne dépend que de la comparaison des alternatives aux points de référence. Cet axiome est suffisant pour caractériser les relations de préférence satisfaisant le modèle MPR1.

Théorème 2 *Soient $p^1, \ldots, p^m \in X$ m points de référence. Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$ vérifie l'axiome IC$\mathcal{P}$ alors il existe une relation d'importance $\succsim'$ sur $(2^N)^m$ telle que*

$$x \succsim y \iff (X_1, \ldots, X_m) \succsim' (Y_1, \ldots, Y_m)$$

Preuve. On définit la relation de préférence $\succsim'$ sur les m-uplets d'ensembles de critères tels que $A \succsim' B \iff \exists x, y, | \ x \succsim y$ et $A = (X_1, \ldots, X_m)$ et $B = (Y_1, \ldots, Y_m)$. La définition de $\succsim'$ ne dépend pas de la paire choisie. En effet, supposons qu'il existe x, y et z, w tels que $A = (X_1, \ldots, X_m) = (Z_1, \ldots, Z_m)$ et $B = (Y_1, \ldots, Y_m) = (W_1, \ldots, W_m)$. Alors par l'axiome IC$\mathcal{P}$ on a $x \succsim y \iff z \succsim w$.

$\square$

4 Règle de concordance avec points de référence

En décision multicritère, on suppose que les différentes alternatives se présentant au décideur peuvent être décrites sur un certain nombre de critères par les valeurs prises par ces alternatives sur les critères. La problématique de la décision multicritère consiste, à partir des valeurs partielles prises par deux alternatives sur chaque critère, à produire une relation de préférence globale sur ces alternatives. Pour ce faire, deux voies générales peuvent être envisagées (Perny [16], Grabisch et Perny [9]) :

- la voie "agréger puis comparer" : il s'agit, pour chaque alternative, d'agréger toutes les valeurs prises sur chacun des critères pour obtenir un "score" unique pour chacune des alternatives, un critère unique de synthèse. Il suffit ensuite pour comparer deux alternatives de comparer leurs scores respectifs.
- la voie "comparer puis agréger" : il s'agit ici au contraire de comparer, critère par critère, les deux alternatives afin d'obtenir autant de relations de préférences partielles entre les deux alternatives qu'il existe de critères, puis d'essayer d'agréger ces préférences partielles en une préférence globale.

L'introduction de plusieurs points de référence pour comparer les alternatives multicritères entre elles nécessite plusieurs opérations (comparaisons et agrégations) pour obtenir une relation de préférence à partir des valeurs des alternatives sur chaque critère. On peut en particulier distinguer quatre étapes, qui pourront se succéder suivant différents ordres :

- une étape d'agrégation vis à vis des critères ;
- une étape d'agrégation vis à vis des points de référence ;
- une étape de comparaison des alternatives aux points de référence ;
- une étape de comparaison des alternatives entre elle.

Nous pouvons alors distinguer plusieurs approches possibles pour comparer deux alternatives avec l'aide de plusieurs points de référence. Nous limitons notre étude ici à l'approche directement inspirée de la règle de concordance généralisée, qui consiste à appliquer successivement deux règles de concordance, sur les ensembles de critères premièrement, puis sur les ensembles de points de référence. Plus précisément, l'approche proposée consiste à comparer deux alternatives x et y de $\mathcal{X}$ en comparant, critère par critère, chacune de ces alternatives à chaque point de référence $p \in \mathcal{P}$, puis à agréger ces comparaisons critère par critère pour obtenir un "score" pour chaque alternative comparativement à chaque point de référence. Ce score peut par exemple être simplement l'ensemble des critères où l'alternative est meilleure que le point de référence. Vient ensuite la comparaison de ces différents scores (un par point de référence) entre deux alternatives, puis l'agrégation de ces différentes comparaisons en une comparaison unique pour obtenir une relation de préférence sur l'espace des alternatives $\mathcal{X}$. Autrement dit, ces relations de préférences peuvent être modélisées par l'équation suivante :

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid C(x,p) \succsim'_p C(y,p)\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid C(y,p) \succsim'_p C(x,p)\} \quad (3)$$

où les $\succsim'_p$ sont des relations d'importance sur les sous-ensembles de N et $\succsim_{\mathcal{P}}$ est une relation d'importance sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$.

Avec les notations vues précédemment, l'équation (3) peut aussi s'écrire :

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid X_p \succsim'_p Y_p\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid Y_p \succsim'_p X_p\} \quad (4)$$

4.1 Les points de référence induisent des relations de préférence

Les relations de préférence sur $\mathcal{X}$ satisfaisant le modèle (3) peuvent être caractérisées par des propriétés spécifiques que nous étudions dans cette section.

En premier lieu, le modèle (3) suppose qu'il existe m relations de préférence basées sur la comparaison des ensembles de critères où l'alternative considérée est meilleure que le point de référence. Cela signifie d'abord que la relation de préférence $\succsim$ entre deux alternatives $x, y \in \mathcal{X}$ ne dépend que des ensembles $X_p = C(x,p)$, $p \in \mathcal{P}$ et $Y_p = C(y,p)$, $p \in \mathcal{P}$. Cela signifie aussi qu'il existe une propriété d'indépendance impliquant que pour un point de référence spécifique $p \in \mathcal{P}$, la relation de préférence $\succsim_p$ entre deux alternatives x et y ne dépend que des ensembles respectifs $X_p = C(x,p)$ et $Y_p = C(y,p)$.

Définissons m relations de préférence $\succsim'_p$, $p \in \mathcal{P}$, sur les sous-ensembles de N par

$$A \succsim'_p B \iff \exists x, y \mid \begin{cases} X_p = A \\ Y_p = B \\ X_{p'} = Y_{p'} \ \forall p' \in \mathcal{P}, p' \neq p \end{cases} \text{et } x \succsim y \qquad (5)$$

Les relations $\succsim'_p$ peuvent être vues comme m projections de la relations $\succsim$ sur l'espace des sous-ensembles de N.

Ces relations sont cohérentes s'il n'existe pas de couples (x, y) and (z, w) induisant des contradictions dans les relations définies en (5), i.e. des couples tels qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que :

$$\begin{cases} X_p = Z_p = A \\ Y_p = W_p = B \\ X_{p'} = Y_{p'} \ \forall p' \in \mathcal{P}, p' \neq p \\ Z_{p'} = W_{p'} \ \forall p' \in \mathcal{P}, p' \neq p \end{cases} \text{et } x \succsim y \text{ et } w \succ z$$

Cette condition est résumée par l'axiome suivant :

Axiome 2 Séparabilité par rapport aux points de référence (SEP) *$\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall x, y, z, w \in \mathcal{X}$,*

$$\begin{bmatrix} X_p = Z_p \ X_{p'} = Y_{p'} \ \ \forall p' \neq p \\ Y_p = W_p \ Z_{p'} = W_{p'} \ \forall p' \neq p \end{bmatrix} \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

L'axiome SEP est suffisant pour obtenir m relations de préférence bien définies $\succsim'_p$ sur les sous-ensembles de N, et par là même m relations de préférence $\succsim_p$ sur X définies par

$$x \succsim_p y \iff X_p \succsim'_p Y_p$$

L'axiome SEP est plus fort que l'axiome IC$\mathcal{P}$ introduit en section 3, car IC$\mathcal{P}$ peut être vérifié sans que SEP le soit, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3 *Supposons que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_4$. Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont trois valeurs de $\mathcal{X}_j$ telles que $\forall j \in N$, $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3$. Soient $x, y, z, w \in \mathcal{X}$ et p^1, p^2 deux points de référence tels que :*

	p^1	p^2	x	y	z	w
1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_2
2	α_1	α_2	α_2	α_2	α_1	α_1
3	α_1	α_2	α_2	α_3	α_2	α_3
4	α_1	α_2	α_3	α_2	α_3	α_2

Nous avons $X_1 = \{1\} = Y_1$, $Z_1 = \{2\} = W_1$, $X_2 = \{1, 2, 3\} = Z_2$, $Y_2 = \{1, 2, 4\} = W_2$. Si $x \succ y$ et $w \succ z$, ce qui est possible même si l'axiome IC$\mathcal{P}$ est satisfait, alors l'axiome SEP n'est pas satisfait.

4.2 Agrégation des relations de préférence induites

L'axiome SEP implique que les relations de préférence $\succsim_p$ dérivées de la relation de préférence $\succsim$ utilisée dans l'équation (5) sont bien définies. Mais rien ne garantit en retour que la relation de préférence $\succsim$ puisse être obtenue par une méthode spécifique d'agrégation des relations de préférence $\succsim_p$, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 4 *Supposons que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$. Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ soient quatre valeurs de $\mathcal{X}_j$ telles que $\forall j \in N$, $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3 \succ_j \alpha_4$. Soient $x, y, z, w \in \mathcal{X}$, p^1, p^2, p^3 trois points de référence tels que :*

	p^1	p^2	p^3	x	y	z	w
1	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_1	α_2
2	α_1	α_2	α_3	α_2	α_2	α_4	α_3
3	α_1	α_2	α_3	α_4	α_3	α_4	α_3

Supposons que grâce aux autres alternatives nous savons que pour chaque point de référence p, $A \succsim'_p B \iff |A| \geq |B|$ (ce qui signifie, par exemple, que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2) \succ (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2)$. Nous avons alors :

$$\begin{array}{ll} x \succ_{p^1} y & z \succ_{p^1} w \\ x \sim_{p^2} y & z \sim_{p^2} w \\ x \prec_{p^3} y & z \prec_{p^3} w \end{array}$$

Supposons que $x \succ y$ et $w \succ z$. Alors nous voyons que les couples (x, y) et (z, w) se comportent de la même façon vis-à-vis de chacun des points de référence, mais qu'ils se comporte différemment pour la relation de préférence finale. La relation de préférence $\succsim$ ne peut donc pas être obtenue comme fonction des relations de préférence $\succsim_p$.

L'axiome d'indépendance conditionnelle par rapport aux relations induites présenté ci dessous est donc nécessaire et suffisant pour préciser que la relation de préférence $\succsim$ est obtenue par agrégation des relations induites $\succsim_p$.

Axiome 3 Indépendance conditionnelle par rapport aux relations induites (ICRI)
Soit $\succsim$ une relation de préférence satisfaisant l'axiome SEP et $\{\succsim_p, p \in \mathcal{P}\}$ les relations de préférence induites comme décrit en 5. Les relations de préférences $\succsim$ et $\succsim_{p^i}$ satisfont l'axiome d'indépendance conditionnelle si et seulement si $\forall x, y, x', y' \in \mathcal{X}$:

$$\left[\forall p \in \mathcal{P}, \begin{array}{c} x \succsim_p y \iff z \succsim_p w \\ y \succsim_p x \iff w \succsim_p z \end{array}\right] \Rightarrow [x \succsim y \iff z \succsim w]$$

Nous pouvons maintenant établir le théorème caractérisant les relations de préférence satisfaisant le modèle (3) :

Théorème 3 *Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$*

1. *satisfait l'axiome SEP*
2. *satisfait l'axiome ICRI*

alors il existe une relation d'importance $\succsim_{\mathcal{P}}$ *sur les sous-ensembles de* $\mathcal{P}$ *telle que*

$$x \succsim y \iff \{p \in \mathcal{P} \mid X_p \succsim'_p Y_p\} \succsim_{\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid Y_p \succsim'_p X_p\}$$

Preuve. Soit une relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$. On définit une relation $\succsim_{\mathcal{P}}$ sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ de la manière suivante. Soit $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}$. On dit que $\mathcal{Q} \succsim_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}' \iff \exists x, y \in \mathcal{X}$ tels que $x \succsim y$ et $\begin{cases} \{p \in \mathcal{P} \mid X_p \succsim'_p Y_p\} = \mathcal{Q} \\ \{p \in \mathcal{P} \mid Y_p \succsim'_p X_p\} = \mathcal{Q}' \end{cases}$.

Supposons qu'il existe deux couples de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ x, y et z, w tels que

$$\begin{cases} \mathcal{Q} = \{p \in \mathcal{P} \mid X_p \succsim'_p Y_p\} = \{p \in \mathcal{P} \mid Z_p \succsim'_p W_p\} \\ \mathcal{Q}' = \{p \in \mathcal{P} \mid Y_p \succsim'_p X_p\} = \{p \in \mathcal{P} \mid W_p \succsim'_p Z_p\} \end{cases}$$

Grâce à l'axiome ICRI, nous avons $x \succsim y \iff z \succsim w$, ce qui montre que la relation $\succsim_{\mathcal{P}}$ ne dépend pas de la paire choisie. □

Exemple 5 *Reprenons le cadre de l'exemple 1, avec deux points de référence* $p^1 = (50, ***, B)$ *et* $p^2 = (30, **, C)$. *Un exemple de relations d'importance* $\succsim_{\mathcal{P}}$ *sur les ensembles de points de référence, et* $\succsim'_p$ *sur les ensembles de critères est le suivant :*

– $\{p^1, p^2\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^1\} \sim \{p^2\} \succ_{\mathcal{P}} \emptyset$
– $\{1,2,3\} \succ'_p \{2,3\} \succ'_p \{1,2\} \sim'_p \{1,3\} \succ'_p \{1\} \succ'_p \{3\} \succ'_p \{2\} \succ'_p \emptyset.$

On a alors $x = (60, ***, A) \sim y = (40, **, C)$ *car :*

– $X_{p^1} = \{2,3\}$ *et* $Y_{p^1} = \{1\}$, *donc* $X_{p^1} \succ'_{p^1} Y_{p^1}$
– $X_{p^2} = \{2,3\}$ *et* $Y_{p^2} = \{1,2,3\}$, *donc* $X_{p^2} \prec'_{p^2} Y_{p^2}$
– *d'où* $\{p \mid X_p \succsim'_p Y_p\} = \{p^1\}$ *et* $\{p \mid Y_p \succsim'_p X_p\} = \{p^2\}$

4.3 Transitivité et ordre lexicographique

Dans cette partie, nous proposons une caractérisation des relations de préférence transitives satisfaisant les axiomes SEP et ICRI. Supposons que la relation de préférence $\succsim$ satisfait SEP et l'axiome ICRI. Nous avons montré que la relation de préférence globale $\succsim$ entre deux alternatives x et $y \in \mathcal{X}$ dépend seulement de l'agrégation des préférence induites $\succsim_p$. Les différents points de références peuvent être considérés comme autant de votants différents, et le problème étudié est alors clairement identifiable aux problèmes d'agrégation ordinale étudiés en théorie du choix social. Cependant, nous devons souligner que l'axiome d'universalité classiquement présent dans la théorie du choix social n'a pas lieu d'être ici, puisque les relations induites $\succsim_p$ ne sont pas complètement indépendantes.

Supposons que la relation de préférence $\succsim$ est transitive et respecte la monotonie sur les critères. Il a été montré dans la théorie du choix social (voir Fishburn [7]) que dans cette situation, la seule procédure d'agrégation des préférences partielles en une relation de préférence globale transitive est un ordre lexicographique sur les votants. Nous transposons ce résultat au cas de préférences utilisant des points de référence.

Théorème 4 *Si la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{X}$*

1. *satisfait l'axiome SEP*
2. *satisfait l'axiome ICRI*
3. *est un pré-ordre total satisfaisant la monotonie sur les critères ($z_j \succsim_j x_j \Rightarrow [x \succsim y \Rightarrow (z_j, x_{-j}) \succsim y]$)*
4. *et si $\mathcal{P}$ possède au moins trois éléments*

alors il existe un ordre $\{1, \ldots, m\}$, et m relations de préférence induites $\succsim'_p$ sur les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ tel que

$$\begin{array}{rll} x \succ y & \iff & X_1 \succ'_{p^1} Y_1 \\ & \textit{ou} & X_1 \sim'_{p^1} Y_1 \textit{ et } X_2 \succ'_{p^2} Y_2 \\ & \ldots & \\ & \textit{ou} & \forall i \neq m,\ X_i \sim'_{p^i} Y_i \textit{ et } X_m \succ'_{p^m} Y_m \\ x \sim y & & \textit{sinon} \end{array}$$

Preuve. La trame de la preuve du théorème est inspirée de la preuve établie par Fishburn dans [7]. Il faut tout de même prendre soin de vérifier que les relations $\succsim_{p^i}$ peuvent induire des profils adéquats pour la preuve.

Montrons tout d'abord que la dominance stricte de Pareto sur les relations $\succsim_p$ est vérifiée par un pré-ordre $\succsim$ satisfaisant les axiomes SEP et ICRI, si $\succsim$ satisfait aussi la monotonie sur les critères (et par conséquent l'unanimité sur les critères). Soit p^k et p^{k+1} deux éléments de $\mathcal{P}$. Nous avons $C(p^k, p) = C(p^{k+1}, p)$ $\forall p \neq p^k \in \mathcal{P}$, et donc $p^k \sim_p p^{k+1}\ \forall p \in \mathcal{P}$. De plus, nous avons $C(p^k, p^k) = N$ et $C(p^{k+1}, p^k) = \emptyset$. L'unanimité nous donne $p^k \succsim p^{k+1}$, et par définition de $\succsim'_{p^k}$, $N \succsim'_{p^k} \emptyset$. Si $N \sim'_{p^k} \emptyset$, alors, par monotonie, nous avons $N \sim'_{p^k} A\ \forall A \subset N$, et donc $x \sim_{p^k} y\ \forall x, y \in \mathcal{X}$. Dans ce cas, nous voyons que le point de référence p^k n'a pas d'influence dans la relation de préférence $\succsim$ et nous pouvons donc l'ignorer. On peut alors supposer que $\forall p \in \mathcal{P}$, $N \succ'_p \emptyset$, ce qui implique que $\forall p^k \in \mathcal{P}$, $p^k \succ_{p^k} p^{k+1}$ et $p^k \succ p^{k+1}$. Comme l'axiome ICRI est vérifié, il implique que $[\forall x, y \in \mathcal{X},\ x \sim_p y \forall p \in \mathcal{P} - \{p^*\}$ et $x \succ_{p^*} y] \Rightarrow x \succ y$. Par transitivité de $\succsim$, nous avons $x \succsim_p y\ \forall p \in \mathcal{P}$ et $\exists p \in \mathcal{P}$ tel que $x \succ_p y$ implique $x \succ y$, et donc $x \succ_p y \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow x \succ y$.

Un sous-ensemble de points de référence $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ est dit décisif pour $x \in \mathcal{X}$ s'il existe un couple $(x, y) \in \mathcal{X}^2$ tel que $\{p \in \mathcal{P}| \mid x \succ_p y\} = \mathcal{Q}$, $\{p \in \mathcal{P}| \mid y \succ_p x\} = \mathcal{P} - \mathcal{Q}$ et $x \succ y$. Par l'axiome ICRI, si $\mathcal{Q}$ est décisif pour un x, il est décisif pour tout $x \in \mathcal{X}$. On dit alors que $\mathcal{Q}$ est totalement décisif.

Comme nous avons vu précédemment, l'unanimité implique que si $\forall p \in \mathcal{P}, x \succ_p y$, alors $x \succ y$, ce qui signifie que $\mathcal{P}$ est décisif. Soit K un plus petit (au sens e l'inclusion) sous-ensemble de $\mathcal{P}$ décisif.

Supposons que K possède plus d'un élément. Soient $x, y, z \in \mathcal{X}$ tels que

$$\begin{array}{l} x \succ_{p^i} y \succ_{p^i} z\ \ i \in K \\ y \succ_{p^k} z \succ_{p^k} x\ \forall k \in K - \{i\} \\ z \succ_{p^j} x \succ_{p^j} y\ \forall j \notin K \end{array}$$

Une telle situation est possible. Par exemple, soit $\mathcal{P} = \{p^1, p^2, p^3\}$ et $N = \{1, 2, 3\}$. Chaque alternative peu prendre une valeur dans l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ sur chaque critère, avec $\alpha_1 \succ_j \alpha_2 \succ_j \alpha_3 \succ_j \alpha_4 \forall j \in N$.

	p^1	p^2	p^3	x	y	z
1	α_1	α_2	α_3	α_1	α_4	α_2
2	α_1	α_2	α_3	α_3	α_1	α_3
3	α_1	α_2	α_3	α_4	α_2	α_2

Supposons que $\forall p^i \in \mathcal{P}$, $\{1,2,3\} \succ'_{p^i} \{1,2\} \succ'_{p^i} \{2,3\} \succ'_{p^i} \{1,3\} \succ'_{p^i} \{1\} \succ'_{p^i} \{2\} \succ'_{p^i} \{3\} \succ'_{p^i} \emptyset$. Alors
$$\begin{array}{l} X_1 \succ'_{p^1} Y_1 \succ'_{p^1} Z_1 \;\Rightarrow x \succ_{p^1} y \succ_{p^1} z \\ Y_2 \succ'_{p^2} Z_2 \succ'_{p^2} X_2 \;\Rightarrow y \succ_{p^2} z \succ_{p^2} x \\ Z_3 \succ'_{p^3} X_*3 \succ'_{p^3} Y_3 \Rightarrow z \succ_{p^3} x \succ_{p^3} y \end{array}$$

Alors $x \succ y$ puisque K est décisif. Si $y \succsim z$ alors $x \succ z$ par transitivité, mais cela viole le fait que K soit le plus petit ensemble décisif. Donc $z \succ y$ mais ceci aussi viole le fait que K soit un plus petit ensemble décisif. Donc K ne contient qu'un élément, que nous notons p^1.

Soient $x, y, z \in \mathcal{X}$ tels que $x \succ_{p^1} y \succ_{p^1} z$, et pour chaque $p \neq p^1$, $y \succ_p x_j$ et $y \succ_p z_j$. Alors $x \succ y$ car $\{1\}$ est décisif, $y \succ z$ par unanimité, et alors $x \succ z$ par transitivité. Puisque $x \succ_{p^1} z$ et puisque x, z peuvent être choisis de telle manière que $x \succ_p z$, $z \succ_p x$ ou $x \sim_p z$ soit vérifié pour tout $p \neq p^1$, l'axiome ICRI implique que pour tout $a, b \in \mathcal{X}$, $a \succ_{p^1} b \Rightarrow a \succ b$.

Supposons que $x \sim_{p^1} y$ et considérons l'ensemble réduit $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{p^1\}$. Dans $\mathcal{P}'$, K est décisif pour x sur y si $x \succ y$ quand $x \succ_p \forall p \in K$ et $y \succ_p x$ $\forall p \notin K$. Comme précédemment, il existe un plus petit ensemble totalement décisif K pour $\mathcal{P}'$ qui contient un singleton, noté $p^{(2,x)}$, qui a la propriété que $a \succ b$ quand $a \sim_{p^1} b$ et $a \succ_{p^{(2,x)}} b$. Un tel $p^{(2,x)}$ est obtenu pour tout $x \in \mathcal{X}$. Cependant, l'axiome ICRI implique immédiatement qu'il existe un unique p^2 tel que $p^{(2,x)} = p^2$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. En conséquence, $a \succ b$ quand $a \sim_{p^1} b$ et $a \succ_{p^2} b$.

La preuve continue ainsi jusqu'au dernier point de référence, où l'unanimité implique la conclusion désirée. □

Exemple 6 *Reprenons le cadre de l'exemple 5, avec les trois points de référence suivant :* $p^1 = (30, ****, A), p^2 = (50, ***, B)$ *et* $p^3 = (60, **, C)$*. Supposons que la relation* $\succsim'_p$ *soit la même qu'à l'exemple 5. Soient les trois alternatives* a, b, c *suivantes :* $a = (30, **, D)$*,* $b = (60, **, A)$ *et* $c = (50, *, B)$*. Il est aisé de vérifier que :*

- $a \succ_{p^1} b \succ_{p^1} c$
- $c \succ_{p^2} a \succ_{p^2} b$
- $b \succ_{p^3} c \succ_{p^3} a$

Il est alors évident qu'une règle d'agrégation majoritaire sur les points de référence ne fournira pas une relation transitive. La seule solution pour que la relation $\succsim$ *sur* $\mathcal{X}$ *soit un préordre total est d'avoir un ordre lexicographique comme relation* $\succsim_{\mathcal{P}}$ *sur les points de référence, par exemple* $\{p^1, p^2, p^3\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^1, p^2\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^1, p^3\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^1\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^2, p^3\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^2\} \succ_{\mathcal{P}} \{p^3\} \succ_{\mathcal{P}} \emptyset$*.*

L'agrégation lexicographique des relations de préférence induites par les points de référence amène une hiérarchisation des points de référence. Cette hiérarchisation des points de référence apparaît comme une solution naturelle au problème de l'agrégation de préférences menant à une relation de préférence globale transitive. En effet, l'introduction de points de référence conduit à un déplacement du théorème d'Arrow de l'agrégation des préférences sur les critères vers l'agrégation des préférences induites par les points de référence. Cependant, autant une procédure dictatoriale sur les critères apparaît gênante dans un cadre multicritère, autant une procédure dictatoriale (ou lexicographique) sur les points de référence est acceptable. Cette hiérarchisation des points de référence est d'ailleurs présente dans d'autres méthodes d'aide à la décision multicritère, telle que la méthode ELECTRE TRI (voir par exemple Roy [18]). Cette méthode utilise des relations de préférence $\succsim_{p^i}$ telles que $a \succsim_{p^i} b \iff (a \succsim p^i$ et non $b \succsim p^i)$. Un filtrage descendant (ou ascendant) sur les relations de préférence $\succsim_{p^i}$ permet d'obtenir alors une relation de préférence $\succsim$: $a \succ b \iff \exists p^i \mid a \succ_{p^i} b$ et $a \sim_{p^j} b \forall j < i$. Cela induit une hiérarchisation des points de référence (voir Perny [15], Yu [22]).

5 Conclusion

L'introduction de points de référence dans une relation de préférence ordinale permet de décrire des relations de préférence multicritères non représentables par une approche reposant uniquement sur une comparaison directe des alternatives. En particulier, nous avons montré ici comment l'introduction de plusieurs points de référence permet de dépasser le théorème d'Arrow et d'obtenir des relations de préférences transitives et non dictatoriales par agrégation lexicographique de préférences ordinales. D'autres procédures d'agrégation sont cependant possibles, possédant des propriétés différentes de la lexicographie. Leur étude fera l'objet d'un prochain article.

Références

1. K.J. Arrow. *Social choice and individual values.* Cowles Foundations and Wiley, New York, 1951.
2. D. Bouyssou and T. Marchant. An axiomatic approach to noncompensatory sorting method in MCDM, I : the case of two categories. *Working paper*, 2004.
3. D. Bouyssou and T. Marchant. An axiomatic approach to noncompensatory sorting method in MCDM, II : the general case. *Working paper*, 2004.
4. D. Bouyssou and P. Perny. Aide multicritère à la décision et théorie du choix social. *Nouvelles de la Science et de la Technologie*, 15(4) :61–72, 1997.
5. D. Campbell and J. Kelly. Information and preference aggregation. *Social Choice and Welfare*, (17) :3–24, 2000.
6. D. Dubois, H. Fargier, P. Perny, and H. Prade. A characterization of generalized concordance rules in multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems, special issue on preference modeling application*, (18) :751–774, 2003.

7. P. C. Fishburn. Axioms for lexicographic preferences. *Review of economic studies*, 42 :415–419, 1975.
8. P. C. Fishburn. Noncompensatory preferences. *Synthèse*, 33 :393–403, 1976.
9. M. Grabisch and P. Perny. *Agrégation multicritère*, pages 81–120. C. Marsala (Ed), 2003.
10. L. Henriet. *Systèmes d'évaluation et de classification multicritère pour l'aide à la décision : construction de modèles et procédures d'affectation*. PhD thesis, université Paris Dauphine, 2000.
11. R.L. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives : Preferences and value tradeoffs*. J. Wiley, New York, 1976.
12. V. Mousseau, R. Slowinski, and P Zielniewicz. A user-oriented implementation of the ELECTRE TRI method integrating preference elicitation suuport. *Computer and Operations Research*, 27 :757–777, 2000.
13. A. Munro and R. Sugden. On the theory of reference-dependant model. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 50 :407–428, 2003.
14. P. Perny. Sur le non-respect de l'axiome d'indépendance dans les méthodes de type ELECTRE. *Cahiers du CERO*, 34 :211–232, 1992.
15. P. Perny. Multicriteria filtering methods based on concordance and non discordance principles. *Annals of operations Research*, (80) :137–165, 1998.
16. P. Perny. Modélisation des préférences, agrégation multicritère et systèmes d'aide à la décision. *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, LIP6*, 2000.
17. B. Roy. Classement et choix en présence de point de vue multiples (la méthode electre). *Les cahiers du CERO*, (8) :57–75, 1968.
18. B. Roy and D. Bouyssou. *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris, 1993.
19. R. Thaler. Toward a positive theory of consuumer choice. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1 :39–60, 1980.
20. A. Tversky and D. Kahneman. Loss aversion in riskless choice : a reference-dependant model. *Quaterly Journal of Economics*, 106 :1039–1061, 1991.
21. J. Weymark. Arrow's theorem with social quasi-ordering. *Public Choice*, (42) :235–246, 1984.
22. W. Yu. *Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique du tri : concepts, méthodes et applications*. PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 1992.