

SÉMINAIRE DÉTENTE VOTES ET PARADOXES

A. ROLLAND, Laboratoire ERIC
UNIVERSITE LUMIERE LYON II

4 février 2015

la présentation est disponibles sur internet :

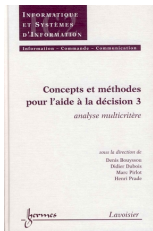
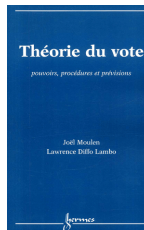
[http ://eric.univ-lyon2.fr/~arolland/](http://eric.univ-lyon2.fr/~arolland/)



J.C. de Borda



Marquis de Condorcet



- Balinski, Le suffrage universel inachevé, Belin, 2004
- Moulen & Difo, Théorie du vote, Hermes, 2001
- Bouyssou, Marchand & Perny, Théorie du Choix Social et décision multicritère, Concepts et méthodes pour l'aide à la décision, vol 3, Hermes, 2006
- Hudry, Votes et paradoxes, les élections ne sont pas monotones !, in Mathématiques et Sciences Humaines, 2003

- 1 Modélisation des modes de scrutin
- 2 Le scrutin majoritaire à deux tours
- 3 Autres modes de scrutin uninominal

On suppose qu'on connaît :

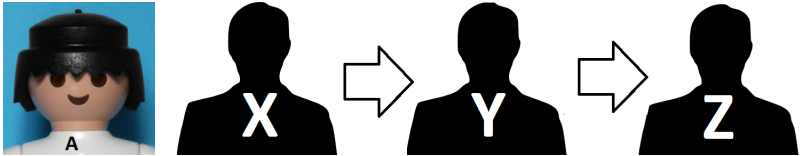
- la liste des candidats : $x, y, z...$
- la liste des votants : $a, b, c...$
- les préférences de **tous** les votants sur l'**ensemble** des candidats

On suppose qu'on connaît :

- la liste des candidats : $x, y, z...$
- la liste des votants : $a, b, c...$
- les préférences de **tous** les votants sur l'**ensemble** des candidats

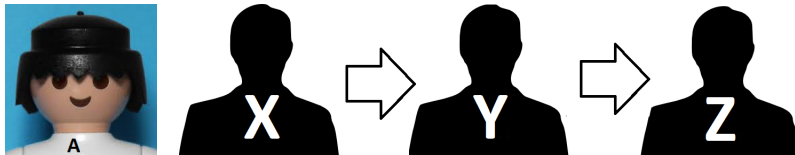
On suppose aussi que :

- les votants sont sincères
- les préférences des votants ne changent pas entre deux tours de scrutins

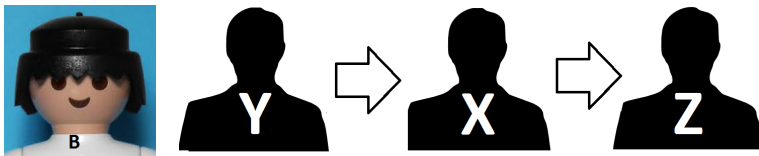


Préférence de $a : x \succ y \succ z$

FORMALISME : EXEMPLE



Préférence de $a : x \succ y \succ z$



Préférence de $b : y \succ x \succ z$

Tableau de votants :

	a	b	c	...
1	x	y	y	...
2	y	x	z	...
3	z	z	x	...

Tableau de groupes de votants :

groupe	A	B	C	...
nb votants	3	2	7	...
1	x	y	y	...
2	y	x	z	...
3	z	z	x	...

Un **mécanisme de vote** permet d'agréger les préférences individuelles en une préférence collective, pour dégager un vainqueur du scrutin.

$$\left\{ \begin{array}{l} a: x \succ_a y \succ_a z \\ b: y \succ_b x \succ_b z \\ c: y \succ_c z \succ_c x \\ d: \dots \\ \dots \end{array} \right. \Rightarrow x \text{ ou } y \text{ ou } z$$

- scrutin majoritaire à un tour (Elections législatives en Angleterre...)
- scrutin majoritaire à deux tours (Elections présidentielles et législatives en France...)
- vote préférentiel (Australie)
- scrutin “chaises musicales” (Elections internes aux Verts...)

MONOTONIE

On dit qu'une procédure de vote est monotone si, dans le cas où un candidat x est élu, le fait qu'un votant "remonte" x dans ses préférences sans toucher aux autres candidats ne défavorise pas x .

Naturel... mais loin d'être vérifié !

SINCÉRITÉ

On dit qu'une procédure de vote est sincère si tout votant a toujours intérêt à voter pour son candidat préféré.

Souhaitable... mais tout le monde sait que c'est loin d'être le cas !

FAVORISATION DE L'ABSTENTION

On dit qu'une procédure de vote encourage le vote si tout votant a toujours intérêt à voter plutôt qu'à s'abstenir.

Les “pêcheurs à la ligne” peuvent-ils faire gagner leur candidat ?

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

Premier tour : chacun vote pour son premier choix.

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

Résultats du premier tour : x a 7 voix, y a 6 voix, z a 9 voix.
⇒ **x et z** qualifiés pour le deuxième tour.

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

Deuxième tour : chacun vote pour son meilleur choix restant.

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z		
2		x	z	x
3	z		x	z

SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z		
2		x	z	x
3	z		x	z

Résultats du deuxième tour : x a 9 voix, z a 13 voix.
⇒ **z** a gagné l'élection.

Le scrutin majoritaire est-il monotone ?

option	A	B	C	D
nb de votants	6	5	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

Le scrutin majoritaire est-il monotone ?

option	A	B	C	D
nb de votants	6	5	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

Premier tour : 6 voix pour x, 5 pour z et 6 pour y.

Deuxième tour : 11 voix pour x, 6 pour y.

x élu.

Changement des préférences du groupe D :

option	A	B	C	D
nb de votants	6	5	4	2
1	x	z	y	x
2	y	x	z	y
3	z	y	x	z

Changement des préférences du groupe D :

option	A	B	C	D
nb de votants	6	5	4	2
1	x	z	y	x
2	y	x	z	y
3	z	y	x	z

Premier tour : 8 voix pour x, 5 pour z et 4 pour y.

Deuxième tour : 8 voix pour x, 9 pour z.

z élu !

Le scrutin majoritaire n'est pas monotone !

Le scrutin majoritaire est-il sincère ?

option	A	B	C	D
nb de votants	6	2	5	4
1	x	x	z	y
2	y	z	x	z
3	z	y	y	x

Le scrutin majoritaire est-il sincère ?

option	A	B	C	D
nb de votants	6	2	5	4
1	x	x	z	y
2	y	z	x	z
3	z	y	y	x

Premier tour : 8 voix pour x, 5 pour z et 4 pour y.

Deuxième tour : 8 voix pour x, 9 pour z.

z élu.

Et si les électeurs du groupe B votent pour y, leur “pire” candidat ? :

option	A	B	C	D
nb de votants	6	2	5	4
1	x	x	z	y
2	y	z	x	z
3	z	y	y	x

Et si les électeurs du groupe B votent pour y, leur “pire” candidat ? :

option	A	B	C	D
nb de votants	6	2	5	4
1	x	x	z	y
2	y	z	x	z
3	z	y	y	x

Premier tour : 6 voix pour x, 5 pour z et 6 pour y.

Deuxième tour : 13 voix pour x, 4 pour y !

x élu !

Le scrutin majoritaire n'est pas sincère !

Le scrutin majoritaire incite-t-il au vote ?

option	A	B	C
nb de votants	4	4	3
1	x	z	y
2	y	y	z
3	z	x	x

Le scrutin majoritaire incite-t-il au vote ?

option	A	B	C
nb de votants	4	4	3
1	x	z	y
2	y	y	z
3	z	x	x

Premier tour : 4 voix pour x, 4 pour z et 3 pour y.

Deuxième tour : 4 voix pour x, 7 pour z !

z élu.

Et si la moitié des électeurs du groupe A s'abstiennent ? :

option	A	B	C
nb de votants	2	4	3
1	x	z	y
2	y	y	z
3	z	x	x

Et si la moitié des électeurs du groupe A s'abstiennent ? :

option	A	B	C
nb de votants	2	4	3
1	x	z	y
2	y	y	z
3	z	x	x

Premier tour : 2 voix pour x, 4 pour z et 3 pour y.

Deuxième tour : 4 voix pour z, 7 pour y !

y élu.

Le scrutin majoritaire peut ne pas inciter au vote !

SCRUTIN MAJORITAIRE À UN TOUR : PRINCIPE

option	A	B	C
nb de votants	7	9	4
1	x	z	y
2	y	x	z
3	z	y	x

SCRUTIN MAJORITAIRE À UN TOUR : PRINCIPE

option	A	B	C
nb de votants	7	9	4
1	x	z	y
2	y	x	z
3	z	y	x

le vainqueur est celui qui a le plus de voix au premier tour.
x a 7 voix, y 4 voix, z 9 voix
 $z \succ x \succ y$: z est élu

SCRUTIN DE BORDA : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

SCRUTIN DE BORDA (1783)

- Principe : on donne 3 points à un candidat classé premier, 2 points à un candidats donné deuxième, 1 points à un candidat donné troisième. Le candidat au plus de points est déclaré élu. (système classement “ tour de France ” par point, Formule 1, ...)

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

SCRUTIN DE BORDA (1783)

- Principe : on donne 3 points à un candidat classé premier, 2 points à un candidats donné deuxième, 1 points à un candidat donné troisième. Le candidat au plus de points est déclaré élu. (système classement “ tour de France ” par point, Formule 1, ...)
- ici, x a 47 points, y 41 points , z 44 points.

SCRUTIN DE BORDA : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	7	9	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	z	x
3	z	y	x	z

SCRUTIN DE BORDA (1783)

- Principe : on donne 3 points à un candidat classé premier, 2 points à un candidats donné deuxième, 1 points à un candidat donné troisième. Le candidat au plus de points est déclaré élu. (système classement “ tour de France ” par point, Formule 1, ...)
- ici, x a 47 points, y 41 points , z 44 points.
- donc $x \succ z \succ y$: c'est x qui est élu

SCRUTIN DE CONDORCET : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	5	3	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	x	z
3	z	y	z	x

SCRUTIN DE CONDORCET (1785)

- Principe : on regarde combien de fois x bat y , x bat z , y bat z et on déclare vainqueur de Condorcet le candidat qui bat tous les autres s'il existe.

option	A	B	C	D
nb de votants	5	3	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	x	z
3	z	y	z	x

SCRUTIN DE CONDORCET (1785)

- Principe : on regarde combien de fois x bat y , x bat z , y bat z et on déclare vainqueur de Condorcet le candidat qui bat tous les autres s'il existe.
- x bat y pour 8 votants, y bat x pour 6 votants : $x \succ y$.
 x bat z pour 9 votants, z bat x pour 5 votants : $x \succ z$.
 y bat z pour 11 votants, z bat y pour 3 votants : $y \succ z$.

option	A	B	C	D
nb de votants	5	3	4	2
1	x	z	y	y
2	y	x	x	z
3	z	y	z	x

SCRUTIN DE CONDORCET (1785)

- Principe : on regarde combien de fois x bat y , x bat z , y bat z et on déclare vainqueur de Condorcet le candidat qui bat tous les autres s'il existe.
- x bat y pour 8 votants, y bat x pour 6 votants : $x \succ y$.
 x bat z pour 9 votants, z bat x pour 5 votants : $x \succ z$.
 y bat z pour 11 votants, z bat y pour 3 votants : $y \succ z$.
- c'est donc le candidat x qui est élu

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	6	7	5	3
1	x	z	t	y
2	y	t	y	x
3	z	y	z	t
4	t	x	x	z

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION

- Principe : à chaque tour de scrutin on élimine celui qui a le plus petit score et on l'élimine. On recommence jusqu'à épuisement des candidats.

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	6	7	5	3
1	x	z	t	y
2	y	t	y	x
3	z	y	z	t
4	t	x	x	z

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION

- Principe : à chaque tour de scrutin on élimine celui qui a le plus petit score et on l'élimine. On recommence jusqu'à épuisement des candidats.
- ici, au premier tour, x a 6 voix, y 3, z 7 et t 5 : y est éliminé au deuxième tour, x a 9 voix, z 7 et t 5 : t est éliminé au troisième tour, x a 9 voix, z 12

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION : PRINCIPE

option	A	B	C	D
nb de votants	6	7	5	3
1	x	z	t	y
2	y	t	y	x
3	z	y	z	t
4	t	x	x	z

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION

- Principe : à chaque tour de scrutin on élimine celui qui a le plus petit score et on l'élimine. On recommence jusqu'à épuisement des candidats.
- ici, au premier tour, x a 6 voix, y 3, z 7 et t 5 : y est éliminé au deuxième tour, x a 9 voix, z 7 et t 5 : t est éliminé au troisième tour, x a 9 voix, z 12
- c'est donc le candidat z qui est élu

SCRUTIN MAJORITAIRE À UN TOUR

Ce scrutin peut faire élire le candidat le plus détesté !

Exemple :

option	A	B	C	D
nb de votants	6	7	5	3
1	x	z	t	y
2	y	t	y	x
3	t	y	x	t
4	z	x	z	z

SCRUTIN DE BORDA

Les préférences par paires sont dépendantes des forces en présence !

Exemple :

option	A	B	C
nb de votants	6	5	3
1	x	y	z
2	y	x	x
3	z	z	y

x (34pts) \succ y (30pts)

option	A	B	C
nb de votants	6	5	3
1	x	y	z
2	y	t	x
3	z	x	y
4	t	z	t

x (43pts) \prec y (44pts)

SCRUTIN DE CONDORCET

le vainqueur de Condorcet n'existe pas forcément ("triplet de Condorcet") !

Exemple :

option	A	B	C
nb de votants	6	7	5
1	x	y	z
2	y	z	x
3	z	x	y

$x \succ y$, $y \succ z$ et $z \succ x$!!

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION

Le vainqueur dans chaque collège n'est pas le vainqueur total !

Exemple :

option	A	B	C	D
nb de votants	4	3	3	3
1	x	y	z	z
2	y	x	x	y
3	z	z	y	x

$x \succ z \succ y$

option	A'	B'	C'	D'
nb de votants	4	3	3	3
1	x	y	z	y
2	y	x	x	z
3	z	z	y	x

$x \succ y \succ z$

SCRUTIN PAR ÉLIMINATION

Le vainqueur dans chaque collège n'est pas le vainqueur total !

Exemple :

option	A	B	C	D	D'
nb de votants	8	6	6	3	3
1	x	y	z	z	y
2	y	x	x	y	z
3	z	z	y	x	x

$y \succ z \succ x!$

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour :

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours :

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda :

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu

L'APOTHÉOSE !

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu
- Scrutin de Condorcet :

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu
- Scrutin de Condorcet : z est élu

option	A	B	C	D	E	F
nb de votants	5	4	2	6	8	2
1	x	x	t	t	z	t
2	y	z	y	y	y	z
3	z	y	x	z	x	y
4	t	t	z	x	t	x

- Scrutin majoritaire à un tour : t est élu
- Scrutin majoritaire à deux tours : x est élu
- Scrutin de Borda : y est élu
- Scrutin de Condorcet : z est élu

le choix du mode de scrutin décide du vainqueur !

QUESTION

Existe-t-il une procédure de vote sans défaut ?

QUESTION

Existe-t-il une procédure de vote sans défaut ?

RÉPONSE

Ça se saurait...

Propriétés souhaitables :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*

Propriétés souhaitables :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$

Propriétés souhaitables :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z

Propriétés souhaitables :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z
- transitivité : la relation obtenue doit être transitive

Propriétés souhaitables :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z
- transitivité : la relation obtenue doit être transitive
- non dictature : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde

THÉORÈME D'ARROW (51)

Il n'existe pas de procédure d'agrégation de préférences vérifiant simultanément les 5 propriétés précitées

Autrement dit : le scrutin démocratique ne peut pas exister !

Propriétés non vérifiées :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*

Propriétés non vérifiées :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$

Propriétés non vérifiées :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z

Propriétés non vérifiées :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z
- transitivité : la relation obtenue doit être transitive

Propriétés non vérifiées :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z
- transitivité : la relation obtenue doit être transitive
- non dictature : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde

Scrutin par assentiment ou jugement majoritaire

- idée : utiliser l'ensemble de l'information disponible sur les préférences des votants

Scrutin par assentiment ou jugement majoritaire

- idée : utiliser l'ensemble de l'information disponible sur les préférences des votants
- mise en œuvre : un votant met **autant de bulletins différents** qu'il souhaite dans l'enveloppe

Scrutin par assentiment ou jugement majoritaire

- idée : utiliser l'ensemble de l'information disponible sur les préférences des votants
- mise en œuvre : un votant met **autant de bulletins différents** qu'il souhaite dans l'enveloppe
- le candidat avec le plus de voix est élu

test en 2002 sur l'élection présidentielle (Balinski et al.)

<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/24/29/59/PDF/2005-02-17-216.pdf>

AVANTAGES

- permet une pluralité d'expression

AVANTAGES

- permet une pluralité d'expression
- permet de modérer une opinion

AVANTAGES

- permet une pluralité d'expression
- permet de modérer une opinion
- favorise le candidat de compromis

AVANTAGES

- permet une pluralité d'expression
- permet de modérer une opinion
- favorise le candidat de compromis

INCONVÉNIENTS

AVANTAGES

- permet une pluralité d'expression
- permet de modérer une opinion
- favorise le candidat de compromis

INCONVÉNIENTS

- plus délicat à manipuler

AVANTAGES

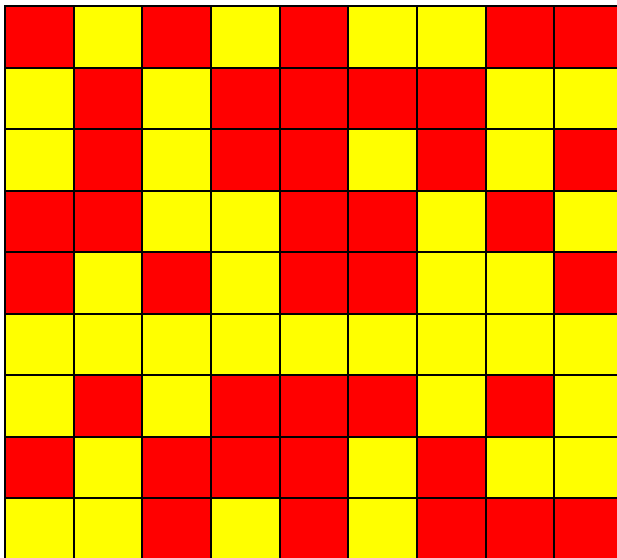
- permet une pluralité d'expression
- permet de modérer une opinion
- favorise le candidat de compromis

INCONVÉNIENTS

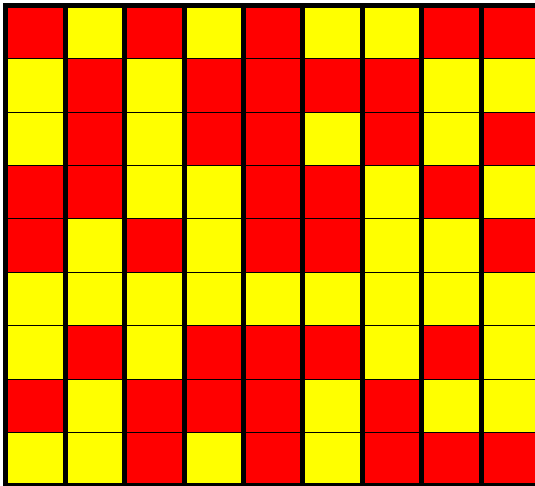
- plus délicat à manipuler
- favorise le candidat de compromis

N'oublions pas le découpage des circonscriptions

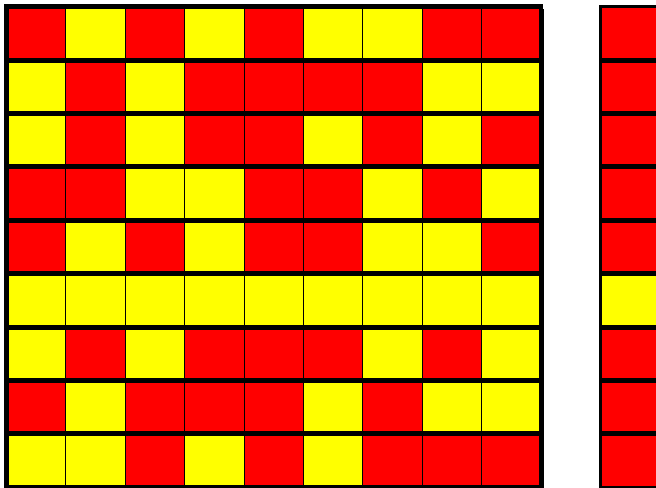
EXEMPLE THÉORIQUE



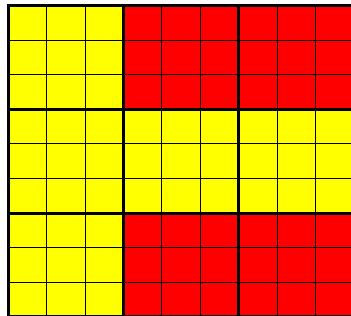
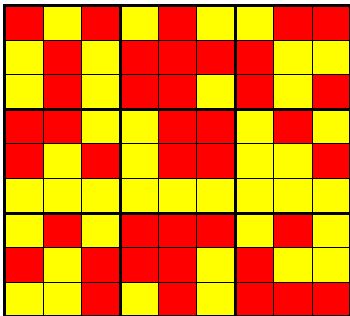
EXEMPLE THÉORIQUE



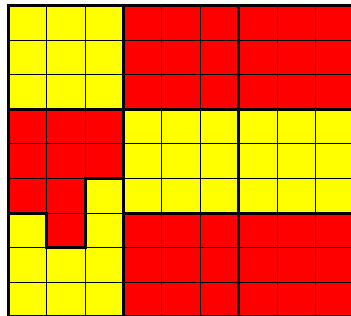
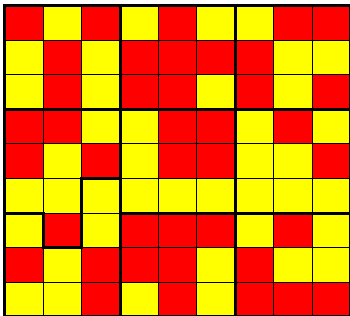
EXEMPLE THÉORIQUE



EXEMPLE THÉORIQUE



EXEMPLE THÉORIQUE



C'EST TOUT POUR AUJOUR'HUI !

