SOIRÉES MATHÉMATIQUES DE LYON

Cinq fois par an, des conférences pour les étudiants et étudiantes dès la L1

JEAN-BAPTISTE AUBIN
INSA LYON

ANTOINE ROLLAND
LYON 2

LES MATHÉMATIQUES AU SECOURS DE LA DÉMOCRATIE

LUNDI 15 NOVEMBRE 2021 - 20H
INSA LYON - BIBLIOTHÈQUE MARIE CURIE

MMI MAISON DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

INFOS, CONFÉRENCES FILMÉES ET VIDÉOS : MMI-LYON.FR ET

CONTACT@MMI-LYON.FR -

LABEX MILYON · Lyon 1 · INSA · Inria

Antoine ROLLAND

- Maître de conférence en statistique
- Enseignant à l'IUT Lumière Lyon II (dpt STID)
- Thème de recherche : le choix en présence de plusieurs critères / votants

Jean-Baptiste AUBIN

- Maître de conférence en statistique
- Enseignant à l'INSA
- Thème de recherche : statistique non paramétrique

Travail en collaboration avec
Irène GANNAZ (INSA) et
Samuela LEONI (INSA)

1. PLANTONS LE DÉCOR
2. PROPRIÉTÉS IMPOSSIBLES
3. SCRUTINS UNINOMINAUX BASÉS SUR DES ÉVALUATIONS
   - Définition et visualisation
   - Les différentes façons de faire...
   - Propriétés mathématiques du wL^p deepest voting
   - Les simulations

Histoire...

J.C. de Borda

Marquis de Condorcet

…ET ACTUALITÉ

LE PROBLÈME DU FESTIVAL 1/2

Le BDE de l'INSA veut organiser un concert. Qui choisir ?

Angèle

Big Flo (et Oli)

Columbine

Diams

Eddy de Pretto

On demande aux 15 membres du BDE leur **classement** sur la liste des 5 artistes.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D	C	A
2	D	C	B	E	E	D
3	C	D	C	C	D	E
4	E	E	D	B	B	C
5	B	A	A	A	A	B

Qui va venir chanter ?

Le vainqueur est celui qui est le préféré du plus grand nombre.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D	C	A
2	D	C	B	E	E	D
3	C	D	C	C	D	E
4	E	E	D	B	B	C
5	B	A	A	A	A	B

Nombre de voix : A=5 ; B=4 ; C=1 ; D=2 ; E=3

A est choisi

Les deux premiers du premier tour sont qualifiés pour un deuxième tour. Le vainqueur est celui qui a le plus de voix au deuxième tour.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D	C	A
2	D	C	B	E	E	D
3	C	D	C	C	D	E
4	E	E	D	B	B	C
5	B	A	A	A	A	B

Premier tour : A et B qualifiés
Deuxième tour, nombre de voix : A=5 ; B=10
B est choisi

Est vainqueur celui qui gagne en duel contre tous les autres candidats (s'il existe).

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D	C	A
2	D	C	B	E	E	D
3	C	D	C	C	D	E
4	E	E	D	B	B	C
5	B	A	A	A	A	B

Exemples de duel
C contre B : B=4+3=7 ; C=4+2+1+1=8 ;
C contre D : C=4+3+1=8 ; D=4+2+1=7

Duels

	A	B	C	D	E
A					
B	+				
C	+	+		+	+
D	+	+	+		
E	+	+		+	

C est le gagnant de Condorcet

On donne 5 points à celui classé premier, 4 points à celui classé deuxième, etc. Le gagnant est celui qui a le plus de points.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D	C	A
2	D	C	B	E	E	D
3	C	D	C	C	D	E
4	E	E	D	B	B	C
5	B	A	A	A	A	B

Exemple : score de
B=$4 \times 1 + 4 \times 5 + 3 \times 4 + 2 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 43$
Scores : A=35 ; B=43 ; C=50 ; D=51 ; E=46 ;
D est le vainqueur de Borda

A chaque tour de scrutin on élimine celui qui est classé dernier. Le dernier qualifié remporte l'élection.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D	C	A
2	D	C	B	E	E	D
3	C	D	C	C	D	E
4	E	E	D	B	B	C
5	B	A	A	A	A	B

Tour 1 ; nombre de voix : A=5 ; B=4 ; C=1 ; D=2 ; E=3
C est éliminé

A chaque tour de scrutin on élimine celui qui est classé dernier. Le dernier qualifié remporte l'élection.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E	D		A
2	D		B	E	E	D
3		D			D	E
4	E	E	D	B	B	
5	B	A	A	A	A	B

Tour 2 ; nombre de voix : A=5 ; B=4 ; D=2 ; E=4
D est éliminé

A chaque tour de scrutin on élimine celui qui est classé dernier.
Le dernier qualifié remporte l'élection.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A	B	E			A
2			B	E	E	
3						E
4	E	E		B	B	
5	B	A	A	A	A	B

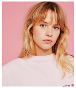
Tour 3 ; nombre de voix : A=5 ; B=4 ; E=6 ;
B est éliminé

A chaque tour de scrutin on élimine celui qui est classé dernier. Le dernier qualifié remporte l'élection.

option	O1	O2	O3	O4	O5	O6
nb votants	4	4	3	2	1	1
1	A		E			A
2				E	E	
3						E
4	E	E				
5		A	A	A	A	

Tour 4 ; nombre de voix : A=5 ; C=10 ;
A est éliminé, **E est gagnant**

RÉSULTATS

- scrutin majoritaire à un tour : **A**ngèle est choisie 
- scrutin majoritaire à deux tours : **B** est choisi 
- méthode de Condorcet : **C**olumbine est choisi 
- méthode de Borda : **D**iams est choisi 
- srutin par élimination : **E**ddy de Pretto est choisi 

Le bon mode de scrutin, il voit un candidat préféré, ben, il le choisit. Mais le mauvais mode de scrutin, il voit un candidat préféré, ben il le choisit. Mais c'est un mauvais mode de scrutin.

Où sommes-nous ?

On suppose qu'on connait :

- la liste des candidats : a, b, c...
- la liste des votants : v_1, v_2, v_3...
- les préférences de **tous** les votants sur **l'ensemble** des candidats

On suppose aussi que :

- les votants sont sincères
- les préférences des votants ne changent pas entre deux tours de scrutins

Un **mécanisme de vote** permet d'agréger les préférences individuelles en une préférence collective, pour dégager un vainqueur du scrutin.

$$\left\{\begin{array}{ll} v_1: & a \succ_1 b \succ_1 c \\ v_2: & b \succ_2 a \succ_2 c \\ v_3: & b \succ_3 c \succ_3 a \\ v_4: & \ldots \\ \ldots & \end{array}\right. \Rightarrow \quad a \succ b \succ c$$

Quelques propriétés

1. Unanimité
2. Anonymat et neutralité
3. Universalité
4. Vainqueur et perdant de Condorcet
5. Monotonie
6. Consistance aux rassemblements
7. Indépendance vis-à-vis des autres candidats

Unanimité, anonymat, neutralité, universalité

1. Unanimité : si tous les votants sont unanimes pour A, alors A est élu
2. Anonymat : tous les votants sont égaux ; et neutralité : tous les candidats sont égaux
3. Universalité : toutes les opinions sont acceptables *a priori*

$\Rightarrow$ les cinq modes de scrutins présentés vérifient ces propriétés

Vainqueur et perdant de Condorcet

SUM Le vainqueur de Condorcet

- n'est pas forcément élu (autres scrutins)
- n'existe pas forcément (Scrutin de Condorcet)

Le perdant de Condorcet

- c'est le pire candidat
- il peut être élu au SM1T

- Monotonie : accroitre les performances du vainqueur ne peut pas le faire perdre

SM2T n'est pas monotone :

option	O_1	O_2	O_3	O_4
nb de votants	6	5	4	2
1	a	c	b	b
2	b	a	c	a
3	c	b	a	c

Premier tour : 6 voix pour *a*, 5 pour *c* et 6 pour *b*.
Deuxième tour : 11 voix pour *a*, 6 pour *b*.
a élu.

Changement des préférences du groupe O_4 :

option	O_1	O_2	O_3	O_4
nb de votants	6	5	4	2
1	a	c	b	**a**
2	b	a	c	**b**
3	c	b	a	c

Premier tour : 8 voix pour a, 5 pour c et 4 pour b.
Deuxième tour : 8 voix pour a, 9 pour c.
c élu !.

- Le vainqueur dans chaque collège n'est pas le vainqueur total.

Exemple avec le scrutin par élimination

option	O_1	O_2	O_3	O_4
nb vot.	4	3	3	3
1	a	b	c	c
2	b	a	a	b
3	c	c	b	a

$$a \succ c \succ b$$

option	O'_1	O'_2	O'_3	O'_4
nb vot.	4	3	3	3
1	a	b	c	b
2	b	a	a	c
3	c	c	b	a

$$a \succ b \succ c$$

Exemple avec le scrutin par élimination

option	O_1	O_2	O_3	O_4	O_4'
nb de votants	8	6	6	3	3
1	a	b	c	c	b
2	b	a	a	b	c
3	c	c	b	a	a

$b \succ c \succ a$!

- Les préférences par paires de candidats sont indépendantes de la présence d'autres candidats.

Exemple avec le scrutin de Borda

option	O_1	O_2	O_3
nb de votants	6	5	3
1	a	b	c
2	b	a	a
3	c	c	b

a (34pts) $\succ$ b (30pts)

option	O_1	O_2	O_3
nb de votants	6	5	3
1	a	b	c
2	b	d	a
3	c	a	b
4	d	c	d

a (43pts) $\prec$ b (44pts)

Prop.	SM1T	SM2T	SE	Bo	Con
Anonymat	+	+	+	+	+
Unanimité	+	+	+	+	+
Universalité	+	+	+	+	+
Vainq. Condorcet	-	-	-	-	+
Perd. Condorcet	-	+	+	+	-
Monotonie	+	-	-	+	+
Cons. rassembl.	+	-	-	+	-
Indép. cand.	-	-	-	-	-
Prop. vérifiées	5	4	4	6	5

Propriétés souhaitables :

- universalité : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- unanimité : si tous les votants pensent que $a \succ b$, alors il faut que dans la préférence globale $a \succ b$
- indépendance vis-à-vis des alternatives tierces : le classement relatif de a et b ne dépend pas de la présence ou l'absence de c
- transitivité : la relation obtenue doit être transitive
- non dictature : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde

Théorème d'Arrow (51)

Il n'existe pas de procédure d'agrégation de préférences vérifiant simultanément les 5 propriétés précitées

Autrement dit : le scrutin démocratique ne peut pas exister !

On ne choisit plus un candidat, mais on leur donne à tous une appréciation ou une note.

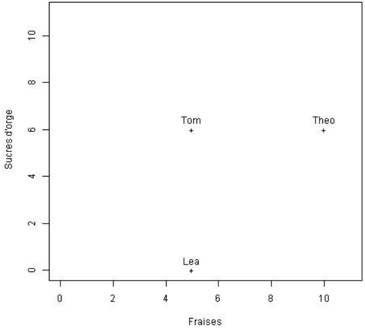
Marie-Claude Pietragalla, Jean-Marc Généreux, Shy'm et Chris Marques sur le plateau de *Danse avec les stars* (© TF1)

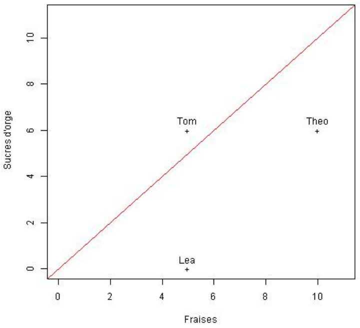
Premier effet : plus d'information, plus de nuances !

Comment visualiser ces notes ?

Sur un exemple simple :

	Fraises	Sucres d'orges
Léa	5	0
Tom	5	6
Théo	10	6





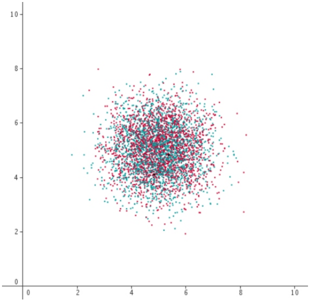
La droite rouge sépare ceux qui préfèrent les fraises des supporters des sucres d'orge.

Le **scrutin majoritaire à un tour** consiste à couper le nuage de point en deux et à compter.

Comment prendre en compte toute l'information des notes attribuées ?

Le scrutin suit la préférence du votant (possiblement virtuel) le plus au "centre" du nuage, le plus "profond".

C'est quoi le "centre" d'un nuage de points ? ? ?



$\rightarrow$ Il en existe plusieurs définitions !

1 : LE VOTE À LA MOYENNE (*range voting*)

Centre = point qui a pour coordonnées les moyennes des notes obtenues candidat par candidat (c'est le centre de gravité des points du nuage).

Est élu le candidat dont la moyenne des notes est la plus élevée (c'est le “range voting”).

Exemple :

- Moyenne de $\frac{5+5+10}{3} = 6,67$ pour les fraises et
- Moyenne de $\frac{0+6+6}{3} = 4$ pour les les sucres d'orge.

Les fraises sont élues.

Un petit problème...

Si un votant n'est pas honnête, il pourrait avantager artificiellement son candidat préféré :

Pour son candidat préféré

Pour les autres

Si l'échelle des votes possibles est seulement 0 (inacceptable) et 1 (acceptable) et que l'on élit le candidat avec la meilleur moyenne, alors c'est le vote par approbation !

	Fraises	Sucres d'orges
Léa	5	0
Tom	5	6
Théo	10	6

Si l'échelle des votes possibles est seulement 0 (inacceptable) et 1 (acceptable) et que l'on élit le candidat avec la meilleur moyenne, alors c'est le vote par approbation !

	Fraises	Sucres d'orges
Léa	1	0
Tom	1	1
Théo	1	1

Alternative 1 : le vote par approbation

- Très facile à mettre en place : le votant peut juste voter pour autant de candidats qu'il le souhaite.
- Très bons résultats en terme de satisfation pour les votants.

ALTERNATIVE 2 : LE VOTE À LA MÉDIANE (*jugement majoritaire*)

Centre = point qui a pour coordonnées les médianes des notes obtenues candidat par candidat.

Est élu le candidat dont la médiane des notes est la plus élevée (c'est le jugement majoritaire).

Rappel : la médiane d'une série de notes ordonnées est la note "du milieu" (il y a autant de notes inférieures à la médiane que de supérieures).

Problème, notre exemple initial donne :

	Fraise	Sucre d'orge
Léa	5	0
Tom	5	6
Théo	10	6

- les fraises ont une médiane de 5 et
- les sucres d'orge ont une médiane de 6.

Les sucres d'orge sont élus alors que deux des trois votants les aiment bien moins que les fraises et que le troisième est presque indécis !

	Fraise	Sucre d'orge
Léa 1	5	0
Léa 2	5	0
⋮	⋮	⋮
Léa 1 000	5	0
Tom	5	6
Théo 1	10	6
Théo 2	10	6
⋮	⋮	⋮
Théo 1 000	10	6

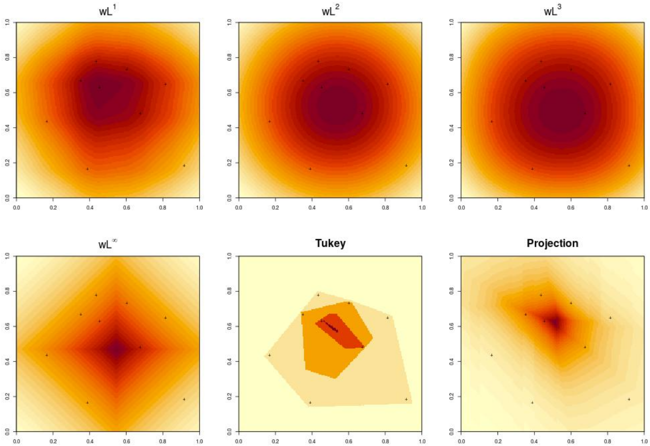
S'il y avait mille votants comme Léa et mille votants comme Théo, le résultat du vote donnerait toujours les sucres d'orge vainqueurs alors que toute la population (sauf un) préfèrerait largement les fraises !

Passer du *vote* aux *notes* semble un progrès mais...

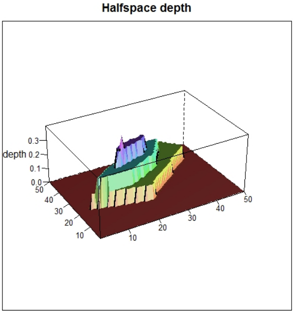
- comparer les moyennes des candidats est peu robuste,
- comparer les médianes des candidats amène des paradoxes.

D'autres définitions de centres sont-elles possibles ?

Il existe de très nombreuses définitions de centres ! Les **fonctions de profondeur** (ou "**depth function**") sont très efficaces pour trouver les centres des nuages de points !

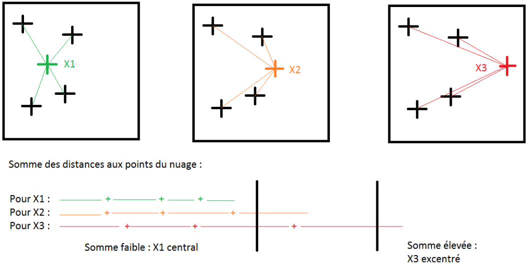


Donné un nuage de point dans $\mathbb{R}^d$, une fonction de profondeur est une fonction de $\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ positive prenant de grandes valeurs au centre du nuage et décroissant à 0 à l'infini. Un exemple :



Le centre maximise la fonction de profondeur (autant de centres que de fonctions de profondeur) !

Les fonctions de profondeur wL^p de Zuo



Centre des profondeurs wL^p = point qui minimise la somme de ses distances à tous les points du nuage.

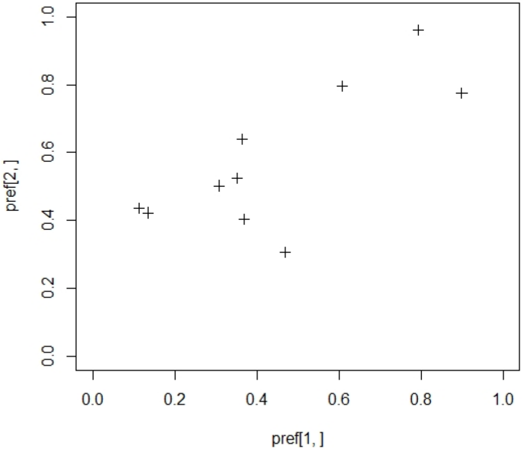
Une *weighted L^p depth* d'un point $x \in \mathbb{R}^d$, $wL^pD(x)$, donné un ensemble de n points $\Phi(.,1), \ldots, \Phi(.,n)$ dans $\mathbb{R}^d$, est définie par

$$wL^pD(x,\Phi) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \omega(\|\Phi(.,j) - x\|_p)},$$

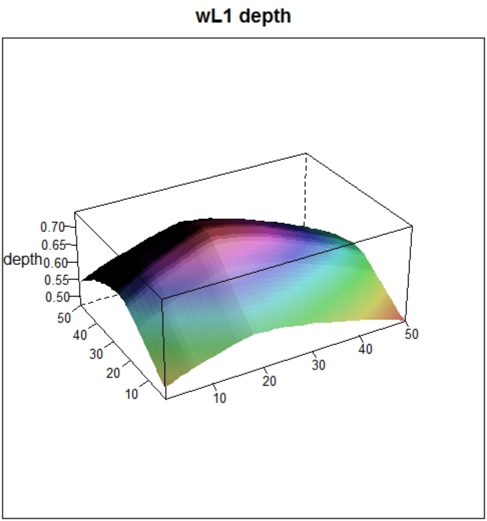
où $p > 0$, ω est une fonction non décroissante et continue sur $[0,\infty)$ avec $\omega(\infty) = \infty$ et
$\|x - \Phi(.,j)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - \Phi(i,j)|^p\right)^{1/p}$.

Si $\omega(x) = x^p$, alors $wL^pD(x,\Phi) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i - \Phi(i,j)|^p\right)}$.

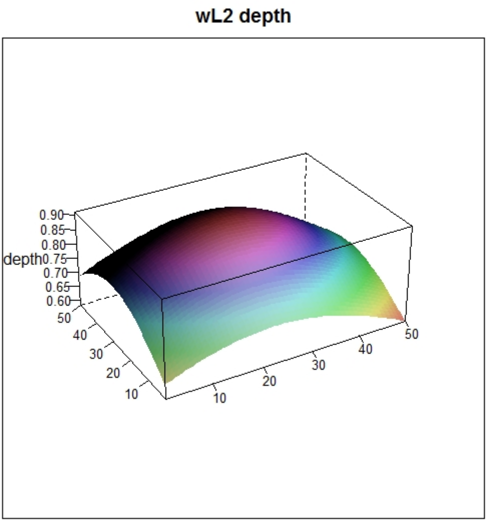
Un jeu de 10 votants pour visualiser tout ça...



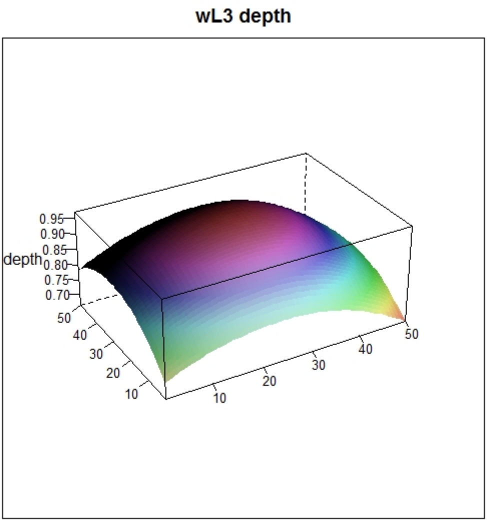
"WEIGHTED L^1 DEPTH" DE ZUO



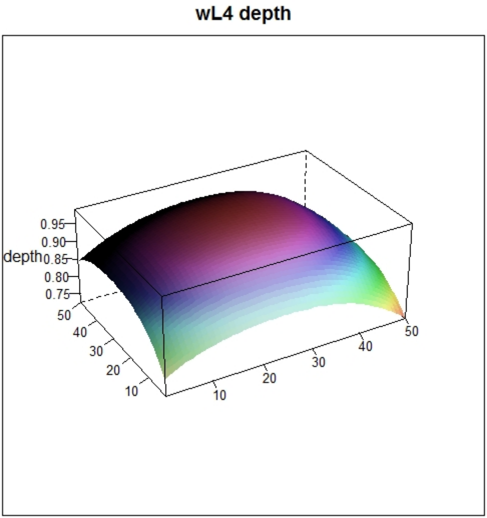
“Weighted L^2 depth” de Zuo



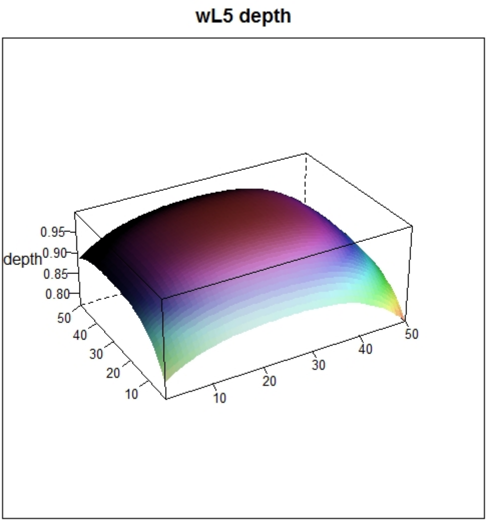
“WEIGHTED L^3 DEPTH” DE ZUO



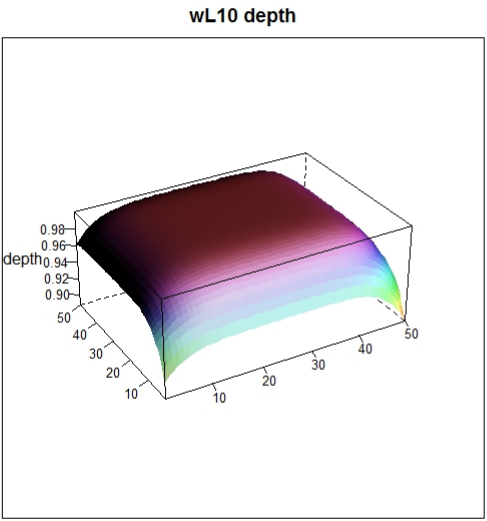
“WEIGHTED L^4 DEPTH” DE ZUO



"Weighted L^5 depth" de Zuo



“Weighted L^{10} depth” de Zuo



LE wL^p DEEPEST VOTING EST GÉNÉRAL

PROPRIÉTÉ 1

- **Si p=1**, le wL^p Deepest voting est confondu avec le jugement majoritaire.
- **Si p=2**, le wL^p Deepest voting est confondu avec le”range voting” (et le vote par approbation).

Si $\omega(x) = x^p$, alors $wL^pD(x,\Phi) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i-\Phi(i,j)|^p\right)}$.

Attention MAGIE :

$$wL^pD(x,\Phi) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_i-\Phi(i,j)|^p\right)}.$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|x_1-\Phi(1,j)|^p+\ldots+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|x_d-\Phi(d,j)|^p}.$$

Les quantités dépendant des candidat 1, ..., candidat d sont disjointes, on peut les minimiser indépendamment les unes des autres !

Cas p=2

Pour le candidat 1, minimisons $Q_1(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x - \Phi(1,j))^2$ par rapport à x en dérivant :

$$Q_1'(x) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}(x - \Phi(1,j))$$

Q_1 étant convexe, le x annulant la dérivée est un minimum. $Q_1'(x_1^*) = 0$ pour $x_1^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi(1,j)$. On retrouve bien la moyenne des évaluations reçues par le candidat 1.

De même dans le **Cas p=1**, on montre que la quantité minimisant $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\Phi(i,j) - x_i|$ (le point le plus profond) est la médiane des points du nuage pour chaque candidat i.

Le wL^p deepest voting vainc le théorème d'impossibilité d'Arrow !

Propriété 2

Le wL^p Deepest voting vérifie les conditions suivantes :

- **Universalité** : tout ordre de préférences d'un votant sur les candidats est acceptable *a priori*
- **Unanimité** : si tous les votants pensent que $x \succ y$, alors il faut que dans la préférence globale $x \succ y$
- **Indépendance vis-à-vis des alternatives tierces** : le classement relatif de x et y ne dépend pas de la présence ou l'absence de z
- **Non dictature** : ce n'est pas un votant qui décide pour tout le monde

Idée de la preuve de la propriété 2

A-t-on le temps ?

Les “deepest voting”...

- généralisent les principaux modes de scrutin par évaluation (Jugement Majoritaire, Range Voting, Vote par Approb.),
- tirent profit d’une information plus nuancée et plus large sur les préférences des votants,
- ne sont plus sensibles au théorème d’impossibilité d’Arrow,
- sont moins sensibles à de nombreux autres “paradoxes”,
- élisent des candidats mieux aimés, plus consensuels,
- nous donnent un moyen de refuser tous les candidats (si leurs notes sont trop faibles).

Bibliographie

- Y. Zuo, R. Serfling, General notions on statistical depth function, Ann. Stat., Volume 28, Number 2, 2000
- D. Felsenthal, M. Machover, Electoral systems, Springer, 2012
- K. Arrow, Social choice and Individual values, New-york, Wiley, 1951

En pratique, comment se comportent ces nouveaux modes de scrutin par rapport aux anciens ?

- conduisent-ils à l'élection de candidats plus appréciés ?
- conduisent-ils à l'élection de candidats plus consensuels ?

L'EFFICACITÉ DE L'UTILITÉ SOCIALE

1. Simuler un tableau de notes d'électeurs sur des candidats,
2. Déterminer quel candidat remporte les élections,
3. Calculer la moyenne des évaluations du vainqueur,
4. Déduire l'efficacité de l'utilité sociale :

$$\frac{\text{Moyenne des évaluations du candidat vainqueur - Moyenne totale}}{\text{Meilleure moyenne sur tous les candidats - Moyenne totale}}$$

Répéter un grand nombre de fois pour des nombres de candidats différents.

$$\frac{\text{Moyenne des évaluations du candidat vainqueur - Moyenne totale}}{\text{Meilleure moyenne sur tous les candidats - Moyenne totale}}$$

Comme utilité, nous considérerons successivement :

- la moyenne des évaluations des votants,
- la médiane des évaluations des votants,
- la dispersion des évaluations des votants.

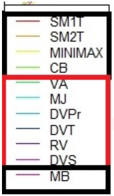
Utilité égale à 1 : le candidat élu obtient le maximum.

Utilité négative : le candidat élu fait moins bien qu'un candidat moyen.

LE PLAN DE SIMULATIONS

- 101 votants,
- Nombre de candidats de 2 à 11,
- Les évaluations sont i.i.d. suivant une normale tronquée sur [0 ;1] de paramètres $m = 0,5$ et $\sigma = 0,25$,
- 1000 réplications.

LES MODES DE SCRUTINS TESTÉS

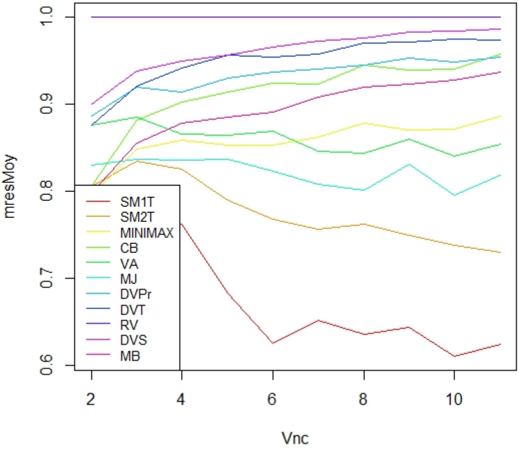


modes de scrutin basés sur l'ordre des préférences

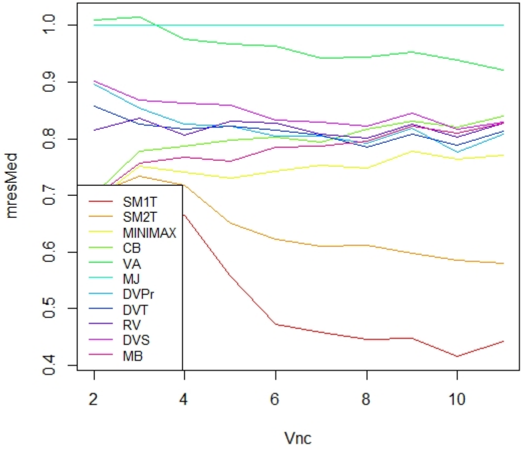
modes de scrutin basés sur l'évaluation des candidats (Vote par Approbation, "Majority Judgement", "Deepest voting" par projection, "deepest voting" de Tukey, "Range Voting", "Deepest voting par simplicial depth").

mode de scrutin basé sur l'ordre des préférences (méthode de Black -entre Condorcet et Borda-)

Les résultats pour la moyenne



Les résultats pour la médiane



Les résultats pour la dispersion