Algèbre Linéaire

Devoir Maison - Fiche 1
Licence 2 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Cette fiche est composée de questions de cours dont les justifications sont en générales très courtes et dont toutes les réponses figurent dans le cours (moyennant une petite réflexion par moment). Les questions ne sont pas difficiles et sont un bon moyen pour vous de travailler le cours et de vérifier que les notions sont comprises.

1. Soit un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

   (a) E est un sous-espace vectoriel de E.

   VRAI. E est un sous-espace vectoriel de lui même, c'est un sous-espace trivial avec le sous-espace réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$.

   (b) $\emptyset$ est un sous-espace vectoriel de E ?

   FAUX. En effet, un sous-espace vectoriel de E est avant tout un sous-ensemble **non vide** de E.

   (c) $\{\mathbf{0}_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   VRAI. C'est un sous-espace trivial de E, c'est le plus simple (ou le plus petit) des sous-espaces de E.

   (d) Un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ peut avoir un nombre fini d'éléments.

   FAUX. Si F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$, alors il existe $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$ tel que $\mathbf{x} \in F$.
   Or un sous-espace est censé être stable par combinaison linéaire, donc tous les vecteurs de la forme $\alpha\mathbf{x}$ appartiennent à ce sous-espace et ils sont en nombre infini.

2. Soit un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

   (a) $\mathbf{0}_E \in F$.

   VRAI. C'est une condition pour être un sous-espace d'ailleurs.

   (b) Si $\mathbf{x} \in F$, alors $2\mathbf{x} \in F$.

   VRAI. F étant un sous-espace, il doit être stable par combinaison linéaire et doit donc contenir tous les vecteurs de la forme $\alpha\mathbf{x}$.

(c) Si $\mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{y} \in E \setminus F$ alors $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in E \setminus F$.

VRAI. En effet, si $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in F$, alors $\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x} = \mathbf{y} \in F$, ce qui contredit l'hypothèse $\mathbf{y} \in E \setminus F$. Donc $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in E \setminus F$.

(d) Si $\mathbf{x} \in E \setminus F$ et $\mathbf{y} \in E \setminus F$ alors $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in E \setminus F$.

FAUX (en général). En effet, soit F un sous espace de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(1,0)$, *i.e.*

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, 0)\}.$$

Dans ce cas, les vecteurs $(1,-1)$ et $(1,1)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas dans F, mais $(1,-1)+(1,1) = (2,0) \in F$.

(e) Si $\mathbf{x} \in E \setminus F$ alors $2\mathbf{x} \in E \setminus F$.

VRAI. Supposons que $2\mathbf{x} \in F$, alors $\frac{1}{2}2\mathbf{x} \in F$, *i.e.* $\mathbf{x} \in F$, ce qui contredit l'hypothèse de de départ.

(f) $E \setminus F$ est un sous-espace vectoriel de E.
FAUX. En effet, voir la question *d*). On peut aussi remarquer que si F est un sous espace de E alors $\mathbf{0} \in F$ et donc $\mathbf{0} \notin E \setminus F$.

(g) $F = E \iff E \subset F$.
VRAI. Comme F est un sous-espace de E, on a nécessairement $E \subset F$, si de plus $E \subset F$, alors on nécessairement $E = F$ et réciproquement.

(h) $F = \{\mathbf{0}_E\} \iff \{\mathbf{0}_E\} \subset F$

FAUX. Si F est le sous-espace trivial réduit au vecteur nul, nécessairement le vecteur nul appartient au sous-espace. En revanche la réciproque est fausse.

(i) $F = \{\mathbf{0}_E\} \iff F \subset \{\mathbf{0}_E\}$

VRAI. L'implication dans le sens direct est vraie. La réciproque aussi. Si F est un sous-espace inclus dans l'ensemble réduit au vecteur nul, nécessairement $F = \{\mathbf{0}_E\}$.

(j) Si G est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F, alors G est un sous-espace vectoriel de F.

VRAI. G est alors inclus dans F et est donc sous-espace vectoriel de F pour les lois induites par les lois sur F.

3. Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans E'. Montrer que $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$.

$$f(\mathbf{0}_E) = f(\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E) = f(\mathbf{0}_E) + f(\mathbf{0}_E),$$

donc

$$2f(\mathbf{0}_E) = f(\mathbf{0}_E).$$

Ainsi

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$$

4. Les espaces suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

   (a) $\mathbb{R}^2$

   VRAI.

   (b) $\mathbb{R}$

   VRAI.

   (c) $\mathbb{C}$

   VRAI

   (d) $\mathbb{Q}$

   FAUX.

5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

   (a) Soit $\mathbf{x} \in E \setminus F$, peut-on affirmer que $\mathbf{x} \in G$?

FAUX. En effet, considérons $E = \mathbb{R}^2$ et considérons le sous-espace F engendré par le vecteur $(1, 0)$ (*i.e.* la droite vectorielle matérialisée par l'axe des abscisses) et le sous-espace G engendré par le vecteur $(0, 1)$ (*i.e.* la droite vectorielle matérialisée par l'axe des ordonnées).
Les deux sous-espaces sont bien supplémentaires et on vérifie, par exemple que

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \underbrace{(x_1, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, x_2)}_{\in G}.$$

Et le vecteur $\mathbf{x}$ n'appartient ni à F, ni à G.

(b) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
Montrer que :

$$\forall \mathbf{x} \in E, \mathbf{x} \in F \iff p(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

et montrer que

$$\forall \mathbf{x} \in E, \mathbf{x} \in G \iff p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

On rappelle que tout vecteur $\mathbf{x}$ se décompose de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \underbrace{(\mathbf{x}_1, \mathbf{0})}_{\in F} + \underbrace{(\mathbf{0}, \mathbf{x}_2)}_{\in G},$$

et on a $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$. Ainsi

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \\ \iff & \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \\ \iff & \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \\ \iff & \mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \\ \iff & \mathbf{x} \in F. \end{aligned}$$

De même pour la deuxième partie de la question

$$\begin{aligned} & p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ \iff & \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \\ \iff & \mathbf{x} = \mathbf{x}_2, \\ \iff & \mathbf{x} \in G. \end{aligned}$$