Algèbre Linéaire

Devoir Maison - Fiche 3
Licence 2 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Cette fiche se décompose en deux parties. La première partie est composée de questions de cours dont les justifications sont en générales très courtes et dont toutes les réponses figurent dans le cours (moyennant une petite réflexion par moment). Les questions ne sont pas difficiles et sont un bon moyen pour vous de travailler le cours et de vérifier que les notions sont comprises. La deuxième partie est composée de trois exercices d'applications pour vérifier que les exercices effectuées en TD sont maîtrisées. A nouveau, ces derniers sont très proches de ceux effectués en TD et seront un excellent moyen pour vous de vérifier que vous savez refaire ce qui a été fait en TD.

1 Questions de cours

1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   (a) Une colonne d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

   FAUX. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

   (b) Une ligne d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

   FAUX. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

   (c) Une matrice non nulle n'a pas de coefficient nul.

   FAUX. La matrice identité I_n est non nulle et elle contient pourtant des zéros.

   (d) Toute matrice carrée admet un inverse

   FAUX. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est carrée mais n'est pas inversible.

   (e) Les matrices diagonales sont les matrices carrées à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.

   VRAI.
   La conjonction d'être triangulaire inférieure et supérieure implique que tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls.

   (f) Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la multiplication matricielle est commutative.

   FAUX (en général). Prenons les deux matrices ci-dessous pour vérifier cela

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (g) Le produit d'une matrice par une matrice nulle est nul.

   VRAI.

   (h) Si A et B sont des matrices telles que le produit AB ait un sens alors

$$AB = 0 \iff A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0.$$

FAUX. On peut reprendre l'exemple des matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si A est une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout B

$$AB = 0 \iff B = 0.$$

VRAI. Si A est inversible

$$AB = 0 \iff A^{-1}AB = 0 \iff B = 0.$$

(j) Le rang d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est inférieure à $\inf(p, n)$.

VRAI. C'est la définition du rang qui est toujours plus petit que le nombre de ligne **et** que le nombre de colonne.

(k) La transposée d'un produit de matrices est le produit des transposées de ces matrices.

FAUX. En revanche, on a toujours $(AB)^T = B^T A^T$.

(l) L'inverse d'un produit de matrices inversibles est le produit des inverses de ces matrices.

FAUX. En revanche, on a toujours $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Préciser la base canonique de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

La base canonique est donnée par les 6 matrices ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer le produit AB où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le résultat de ce produit est une matrice de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   (a) La matrice de Id_E relativement à un couple de bases de E est I_n.

   FAUX. Il faut nécessairement que les bases soient identiques dans l'espace de départ et d'arrivée.

   (b) La matrice de Id_E relativement à une base de E est I_n.

   VRAI. Voir question précédente.

   (c) La matrice d'un automorphisme de E relativement à un couple de bases de E est inversible.

   VRAI.

   (d) La matrice d'un automorphisme de E relativement à une base de E est inversible.

   VRAI.

5. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?

   (a) A : P est inversible, B : P est de rang n.

   Les deux propositions sont équivalentes. En effet, si P est de rang n, cela signifie, d'après le théorème du rang que l'endomorphisme associé est à la fois surjectif et injectif. Il est donc bijectif.

(b) A : P est inversible,
B : Pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $P\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

On a clairement A implique B. En effet, P est inversible si et seulement si l'endomorphisme u associé à P est inversible.
En outre, si pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $P\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$, cela signifie que l'endomorphisme u associé à P voit son noyau réduit au vecteur nul, il est donc injectif. Or u étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est également surjectif, donc bijectif.
Ce qui montre l'équivalence.

(c) A : P est inversible,
B : aucune colonne de P n'est nulle

On a uniquement A implique B que l'on obtient par contraposée. En effet, si une colonne de la matrice P est nulle, alors P n'est pas inversible.
En revanche la réciproque est fausse. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 1 \end{pmatrix}$ n'a aucune colonne nulle mais elle n'est pas inversible pour autant.

(d) A : P est inversible,
B : L'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P est un automorphisme.

Les deux propositions sont équivalentes. C'est un résultat vu en cours.

6. Soient A et B deux matrices diagonales, que vaut le produit AB ?

On considère les deux matrices diagonales A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & b_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1,n-1}b_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

7. Si D est une matrice diagonale, que vaut D^p pour $p \in \mathbb{N}$?

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow D^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^p & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & d_{n-1,n-1}^p & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix}$$

8. Justifier que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont égales si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, on a $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$.

   L'implication dans le sens direct est trivial. Regardons la réciproque. Pour cela, on utilise les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{e}_i$ alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$A\mathbf{e}_i = B\mathbf{e}_i \iff \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}.$$

   Pour tout i les deux vecteurs précédents sont égaux, ce qui implique la i-ème colonne des matrices A et B sont égales. On balaye tous les vecteurs de la base de $\mathbb{R}^n$ et on a la résultat désiré.

9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   (a) Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E alors $\underset{\mathscr{B}}{det}(\mathscr{B}') = 1$.

   FAUX. Il n'y a pas de raison que le déterminant soit toujours égal à 1.

   (b) Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors $\underset{\mathscr{B}}{det}(\mathscr{B}) = 1$.

   VRAI. Dans ce cas la matrice associée est diagonale avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

   (c) Le déterminant de Id_E est égal à 1.

   VRAI.

   (d) Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $det(u) = 1$ alors $u = Id_E$.

FAUX. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ a bien un déterminant égal à 1 mais n'est pas l'identité.

(e) Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $det(u) = 1$ alors $u \in \mathscr{GL}(E)$.

VRAI. Si u a un déterminant non nul, cela signifie que l'application u est inversible et qu'elle est donc un automorphisme de E.

(f) Si $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $det(\lambda u) = \lambda det(u)$.

FAUX. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $det(\lambda u) = \lambda^n det(u)$, où n est la dimension de l'espace E.
Prendre une matrice diagonale pour s'en convaincre.

10. On considère $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions A et B sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ?

(a) A : $det(M) = 0$,
B : une des colonnes de M est nulle.

La proposition B implique la proposition A, la réciproque est fausse par contre. En effet la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à 0, pour autant elle n'a aucune colonne nulle.

(b) A : $det(M) = 0$,
B : deux colonnes de M sont proportionnelles.

La proposition B implique la proposition A, la réciproque est fausse par contre. En effet la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à 0, pour autant il n'y a pas de relation de proportionnalité entre les colonnes.

(c) A : $det(M) = 0$,
B : une des colonnes de M est combinaison linéaire des autres colonnes.

Cette fois-ci nous avons bien l'équivalence entre les deux. Le fait de ne pas être inversible signifie qu'il existe une relation linéaire qui lie un vecteur colonne d'une matrice aux autres vecteurs colonnes de cette matrice.

2 Exercices

Exercice 2.1. *On considère les questions suivantes sur les matrices*

1. *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ -12 & 3 & 14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-s \\ 1+s & -1 & 2 \\ 2 & -s & 3 \end{pmatrix}, \ \textit{où } s \in \mathbb{R}.$$

2. *Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le déterminant des matrices suivantes et préciser si elles sont inversibles et à quelle(s) condition(s).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Correction

1. La matrice A est triangulaire inférieure de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec des valeurs non nulles sur la diagonale. Elle est donc de rang 3.

   La matrice B est de rang 2. En effet, les deux dernières lignes de cette matrice sont égales (elles sont donc liées), donc le rang des trois vecteurs lignes est égal au rang des deux premières lignes. Ces dernières sont indépendantes.

   On regarde maintenant la matrice C, il va falloir discuter son rang en fonction des valeurs de s.

$$rg(C) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-s \\ 1+s & -1 & 2 \\ 2 & -s & 3 \end{pmatrix},$$

$$\downarrow \ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3 - (1-s)C_1$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+s & -2-s & 1+s^2 \\ 2 & -2-s & 1+2s \end{pmatrix}.$$

Remarquons que si $s = -2$

$$rg(C) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$

car les colonnes 1 et 3 sont indépendantes. Considérons maintenant le cas où $s \neq 2$. Alors

$$\begin{aligned} rg(C) &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+s & -2-s & 1+s^2 \\ 2 & -2-s & 1+2s \end{pmatrix}, \\ & \downarrow C_2 \leftarrow C_2 \times (1/(-s-2)) \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+s & 1 & 1+s^2 \\ 2 & 1 & 1+2s \end{pmatrix}, \\ & \downarrow C_3 \leftarrow C_3 - (1+s^2)C_2 \end{aligned}$$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+s & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2s-s^2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout s, les deux premières colonnes sont indépendantes. La matrice est donc de rang 2 ou 3 selon la dernière colonne. On va donc se focaliser sur cette dernière et regarder pour quelles valeurs elle est nulle. Cela arrive lorsque $-(s^2 - 2s) = -s(s-2) = 0$, *i.e.* lorsque $s = 0$ ou $s = 2$.

In fine

$$rg(C) = \begin{cases} 2 & \text{si } s \in \{-2, 0, 2\}, \\ 3 & \text{si } s \notin \{-2, 0, 2\}. \end{cases}$$

2. On calcule le déterminant à l'aide de la règle de Sarrus, cela nous donne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 4 + 2 \times 2 \times 0 \\ & \quad -0 \times 0 \times 3 - 1 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 \times 4, \\ &= 12 - 2 - 16, \end{aligned}$$

$$= \quad -6.$$

La matrice est donc inversible, nous pouvons alors calculer l'inverse maintenant. On va utiliser la technique présentée dans le cours en travaillant sur les lignes de la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -10 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3, \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ , \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/6 & 1/6 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1/6 \\ , \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 & 1/6 \\ -5/3 & 4/3 & -2/3 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, *i.e.*

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0 \iff a \neq b.$$

Faisons de même pour la matrice B. Mais pour calculer le déterminant, on va déjà transformer la matrice.

$$
\begin{aligned}
det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{vmatrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on va effectuer des transformations sur les lignes} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a^2 & b(1-a) \\ 0 & a(1-b) & 1-b^2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{matrix} \\
&\quad \downarrow \text{ on factorise la deuxième ligne par } 1-a \text{ et la troisième par } 1-b \\
&= (1-a)(1-b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1+a & b \\ 0 & a & 1+b \end{vmatrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on va développer selon la première colonne} \\
&= (1-a)(1-b)\begin{vmatrix} 1+a & b \\ a & 1+b \end{vmatrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on calcule le déterminant d'ordre 2} \\
&= (1-a)(1-b)[(1+a)(1+b)-ab], \\
&= (1-a)(1-b)(1+a+b)
\end{aligned}
$$

Cette matrice est donc inversible si et seulement si $a \neq 1$ et $b \neq 1$ et $1+b+a \neq 0$.

Regardons maintenant la matrice C. On va à nouveau faire des transformations sur les lignes pour calculer le déterminant

$$
\begin{aligned}
det(C) &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ \end{matrix}, \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{matrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on développe ensuite selon la troisième colonne}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & 0 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\quad \downarrow \text{ on développe ensuite selon la deuxième colonne} \\
&\quad \downarrow \text{ on peut aussi appliquer la règle de Sarrus} \\
&= -\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}, \\
&= -(a+b)(a-b).
\end{aligned}
$$

Ainsi la matrice est inversible si $a + b \neq 0$ et $a - b \neq 0$.

Exercice 2.2. *On considère l'endormorphisme u de E dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}
$$

1. *Quels sont les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée de l'application u ?*
2. *Déterminer une base de l'image de u et donner sa dimension.*
3. *Déterminer une base du noyau de u et donner sa dimension.*

Correction

1. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, donc les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension 3.

   Les questions suivantes se proposent d'être plus précis sur la dimension de l'espace d'arrivée.
2. On va traiter les deux dernières questions simultanément, en considérant la matrice étendue suivante et en travaillant sur les colonnes de cette matrice :

$$
\left(\frac{A}{I_3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

   On va ensuite effectuer une succession d'opérations sur les colonnes, pour savoir si certaines colonnes la matrice supérieure peuvent s'annuler ou non.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ \hline 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{C_3 \leftarrow C_3 + 25C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 15 \\ \hline 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On peut s'arrêter ici car on remarque que la matrice est de rang plein. L'espace image est donc dimension 3 et est engendrée par les colonnes de la matrice A équivalente qui constituent donc une base de $Im(A)$.
Le théorème du rang nous assure que le noyau est alors de dimension 0.

Exercice 2.3. *On considère le vecteur un vecteur* $\mathbf{x}$ *d'un espace vectoriel* E *de coordonnées* x_1, x_2 *et* x_3 *dans une base* $\mathscr{B}_E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. *On considère une nouvelle base* $\mathscr{B}'_E = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ *avec les relations suivantes entre les deux bases.*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= 2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

1. *Donner l'expression de la matrice de passage* P *de la base* $\mathscr{B}_E$ *vers la base* $\mathscr{B}'_E$.
2. *Donner l'expression de la matrice de passage* P' *de la base* $\mathscr{B}'_E$ *vers la base* $\mathscr{B}_E$.
3. *En déduire l'expression du vecteur* $\mathbf{x}$ *dans la base* $\mathscr{B}'_E$

Correction

1. Pour déterminer la matrice de passage P, on se rappelle qu'il faut exprimer (en colonne) les vecteurs de la base $\mathscr{B}'_E$ dans la base $\mathscr{B}_E$.
   Nous avons donc simplement à lire les coefficients de chaque équations et les écrire en colonne, ce qui nous donne :
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Après quelques calculs, comme ceux effectués à l'exercice précédent, on trouve
   $$P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -11 & 10 & 3 \\ -10 & 0 & 5 \\ 13 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, on va travailler sur la matrice étendue

$$\left(\frac{P}{I_3}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \color{red}{1} & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ 3 & \color{red}{1} & -5 \\ 2 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \color{blue}{0} & 1 & \color{blue}{0} \\ -13 & 5 & 25 \\ \hline -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On divise la troisième colonne par 25 afin de faire apparaître un nouveau 1 comme pivot que l'on va utiliser pour faire apparaître nos derniers 0 dans la dernière ligne. Ce qui nous donne

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3/25}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -13 & 5 & \color{red}{1} \\ \hline -2 & 1 & 3/25 \\ -3 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/25 \end{array}\right) \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + 13C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 1 \\ \hline -11/25 & 2/5 & 3/25 \\ -2/5 & 0 & 1/5 \\ 13 & -1/5 & 1/25 \end{array}\right).$$

On retrouve donc bien notre matrice P^{-1} à la fin.

3. On se rappelle que l'on a $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathscr{B}_E} = P\mathbf{x}_{\mathscr{B}'_E} = P\mathbf{x}'$ soit $\mathbf{x}' = p^{-1}\mathbf{x}$. Il faut donc simplement faire le calcul à l'aide de la matrice P^{-1} précédemment obtenue.