Algèbre Linéaire

Devoir Maison - Fiche 1
Licence 2 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Travail à rendre pour le jeudi 02 février 2023

Résumé

Cette fiche est composée de questions de cours dont les justifications sont en générales très courtes et dont toutes les réponses figurent dans le cours (moyennant une petite réflexion par moment). Les questions ne sont pas difficiles et sont un bon moyen pour vous de travailler le cours et de vérifier que les notions sont comprises.

1. Soit un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.
   (a) E est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) $\emptyset$ est un sous-espace vectoriel de E ?
   (c) $\{\mathbf{0}_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (d) Un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ peut avoir un nombre fini d'éléments.

2. Soit un E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.
   (a) $0_E \in F$.
   (b) Si $\mathbf{x} \in F$, alors $2\mathbf{x} \in F$.
   (c) Si $\mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{y} \in E \setminus F$ alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E \setminus F$.
   (d) Si $\mathbf{x} \in E \setminus F$ et $\mathbf{y} \in E \setminus F$ alors $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E \setminus F$.
   (e) Si $\mathbf{x} \in E \setminus F$ alors $2\mathbf{x} \in E \setminus F$.
   (f) $E \setminus F$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (g) $F = E \iff E \subset F$.
   (h) $F = \{\mathbf{0}_E\} \iff \{\mathbf{0}_E\} \subset F$
   (i) $F = \{\mathbf{0}_E\} \iff F \subset \{\mathbf{0}_E\}$
   (j) Si G est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F, alors G est un sous-espace vectoriel de F.

3. Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans E'. Montrer que $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_{E'}$.

4. Les espaces suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?
   (a) $\mathbb{R}^2$
   (b) $\mathbb{R}$
   (c) $\mathbb{C}$
   (d) $\mathbb{Q}$

5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.
   (a) Soit $\mathbf{x} \in E \setminus F$, peut-on affirmer que $\mathbf{x} \in G$?
   (b) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
   Montrer que :
   $$\forall \mathbf{x} \in E, \mathbf{x} \in F \iff p(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

et montrer que

$$\forall \mathbf{x} \in E, \mathbf{x} \in G \iff p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$