Algèbre Linéaire

Devoir Maison - Fiche 3
Licence 2 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Travail à rendre pour le 23 février 2023

Résumé

Cette fiche se décompose en deux parties. La première partie est composée de questions de cours dont les justifications sont en générales très courtes et dont toutes les réponses figurent dans le cours (moyennant une petite réflexion par moment). Les questions ne sont pas difficiles et sont un bon moyen pour vous de travailler le cours et de vérifier que les notions sont comprises. La deuxième partie est composée de trois exercices d'applications pour vérifier que les exercices effectuées en TD sont maîtrisées. A nouveau, ces derniers sont très proches de ceux effectués en TD et seront un excellent moyen pour vous de vérifier que vous savez refaire ce qui a été fait en TD.

1 Questions de cours

1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.
   (a) Une colonne d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
   (b) Une ligne d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Une matrice non nulle n'a pas de coefficient nul.
   (d) Toute matrice carrée admet un inverse
   (e) Les matrices diagonales sont les matrices carrées à la fois triangulaires inférieures et triangulaires supérieures.
   (f) Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la multiplication matricielle est commutative.
   (g) Le produit d'une matrice par une matrice nulle est nul.
   (h) Si A et B sont des matrices telles que le produit AB ait un sens alors
   $$AB = 0 \iff A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0.$$
   (i) Si A est une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout B
   $$AB = 0 \iff B = 0.$$
   (j) Le rang d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est inférieure à $\inf(p, n)$.
   (k) La transposée d'un produit de matrices est le produit des transposées de ces matrices.
   (l) L'inverse d'un produit de matrices inversibles est le produit des inverses de ces matrices.

2. Préciser la base canonique de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

3. Calculer le produit AB où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.
   (a) La matrice de Id_E relativement à un couple de bases de E est I_n.
   (b) La matrice de Id_E relativement à une base de E est I_n.
   (c) La matrice d'un automorphisme de E relativement à un couple de bases de E est inversible.

(d) La matrice d'un automorphisme de E relativement à une base de E est inversible.

5. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ? Justifiez.
   (a) A : P est inversible,
   B : P est de rang n.
   (b) A : P est inversible,
   B : Pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $P\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$
   (c) A : P est inversible,
   B : aucune colonne de P n'est nulle
   (d) A : P est inversible,
   B : L'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P est un automorphisme.

6. Soient A et B deux matrices diagonales, que vaut le produit AB ?

7. Si D est une matrice diagonale, que vaut D^p pour $p \in \mathbb{N}$?

8. Justifier que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont égales si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, on a $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$.

9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.
   (a) Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E alors $\underset{\mathscr{B}}{det}\,(\mathscr{B}') = 1$.
   (b) Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors $\underset{\mathscr{B}}{det}\,(\mathscr{B}) = 1$.
   (c) Le déterminant de Id_E est égal à 1.
   (d) Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $det(u) = 1$ alors $u = Id_E$.
   (e) Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $det(u) = 1$ alors $u \in \mathscr{GL}(E)$.
   (f) Si $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $det(\lambda u) = \lambda det(u)$.

10. On considère $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions A et B sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ? Justifiez.
   (a) A : $det(M) = 0$,
   B : une des colonnes de M est nulle.
   (b) A : $det(M) = 0$,
   B : deux colonnes de M sont proportionnelles.
   (c) A : $det(M) = 0$,
   B : une des colonnes de M est combinaison linéaire des autres colonnes.

2 Exercices

Exercice 2.1. *On considère les questions suivantes sur les matrices*

1. *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ -12 & 3 & 14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-s \\ 1+s & -1 & 2 \\ 2 & -s & 3 \end{pmatrix}, \text{ où } s \in \mathbb{R}.$$

2. *Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le déterminant des matrices suivantes et préciser si elles sont inversibles et à quelle(s) condition(s).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2. *On considère l'endormorphisme u de E dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *Quels sont les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée de l'application u ?*
2. *Déterminer une base de l'image de u et donner sa dimension.*
3. *Déterminer une base du noyau de u et donner sa dimension.*

Exercice 2.3. *On considère le vecteur un vecteur $\mathbf{x}$ d'un espace vectoriel E de coordonnées x_1, x_2 et x_3 dans une base $\mathscr{B}_E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. On considère une nouvelle base $\mathscr{B}'_E = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ avec les relations suivantes entre les deux bases.*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= 2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

1. *Donner l'expression de la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}_E$ vers la base $\mathscr{B}'_E$.*
2. *Donner l'expression de la matrice de passage P' de la base $\mathscr{B}'_E$ vers la base $\mathscr{B}_E$.*
3. *En déduire l'expression du vecteur $\mathbf{x}$ dans la base $\mathscr{B}'_E$*