# Algèbre Linéaire

# Devoir Maison - Fiche 5
# Licence 2 Informatique (2022-2023)

**Guillaume Metzler**
**Institut de Communication (ICOM)**
**Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2**
**Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France**
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

**Travail à rendre pour le 09 mars 2023**

**Résumé**

Cette fiche se décompose en deux parties. La première partie est composée de questions de cours dont les justifications sont en générales très courtes et dont toutes les réponses figurent dans le cours (moyennant une petite réflexion par moment). Les questions ne sont pas difficiles et sont un bon moyen pour vous de travailler le cours et de vérifier que les notions sont comprises. La deuxième partie est composée de trois exercices d'applications pour vérifier que les exercices effectuées en TD sont maîtrisées. A nouveau, ces derniers sont très proches de ceux effectués en TD et seront un excellent moyen pour vous de vérifier que vous savez refaire ce qui a été fait en TD.

# 1 Questions de cours

1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

   (a) L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

   $$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_2 + 6x_2y_2 + 3x_1y_1 + 4x_2y_1$$

   est-elle une forme bilinéaire ?

   (b) L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

   $$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2x_1y_2^2 + 5x_2y_2 - 7x_1y_1$$

   est-elle une forme bilinéaire ?

   (c) L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

   $$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 6x_2y_2$$

   est-elle une forme bilinéaire symétrique ?

   (d) L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

   $$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2y_2$$

   est-elle une forme bilinéaire symétrique ?

   (e) Les matrices associées aux formes bilinéaires symétriques sont nécessairement symétriques.

   (f) A toute forme bilinéaire symétrique, il est possible d'associer une forme quadratique.

   (g) Une forme quadratique est dite positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

   (h) L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie par

   $$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$$

   est-elle un produit scalaire ?

   (i) L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

   $$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 6x_2y_2$$

   est-elle un produit scalaire ?

   (j) On peut associer une norme à tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

   (k) Tout endomorphisme d'un espace euclidien est diagonalisable.

(l) De toute base $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ d'un espace euclidien $E$ de dimension $n$, il est possible de construire une base orthonormale.

(m) L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité lorsque les deux vecteurs sont orthogonaux.

(n) Si une matrice $P$ est orthogonale, alors son inverse est égale à sa transposée.

(o) L'application définie comme la combinaison linéaire de deux normes est une norme.

(p) Une application définie comme la somme positive de deux normes est encore une norme.

(q) Toute matrice orthogonale $P$ est inversible.

## 2 Exercices

**Exercice 2.1.** *Déterminer si les colonnes des matrices suivantes forment une base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.2.** *Déterminer le signe des formes quadratiques suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 5 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.3.** *On se donne une droite générée par le vecteur* $\mathbf{a} = (-2, 3, 4)$. *Déterminer le projeté orthogonal des vecteurs suivant sur la droite vectorielle engendrée par* $\mathbf{a}$.

1. $\mathbf{x} = (-2, 4, 1)$,
2. $\mathbf{y} = (0, 3, 0)$,
3. $\mathbf{z} = (-1, -3, 0.5)$.