Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Corrections des TD
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Ce document contient la correction des exercices proposées pour la première partie de ce cours,*i.e.* sur la partie relative à l'algèbre linéaire et à la géométrique euclidienne.

Il est uniquement à destination des enseignants pour cet enseignement. Merci de ne pas le diffuser aux étudiants.

1 Espaces vectoriels et Applications linéaires

1.1 Applications du cours

Exercice 1.1. *Soit E un ensemble, typiquement $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une loi interne, notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$ définies pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad et \quad \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2) = (0, \lambda x_2).$$

L'ensemble $(E, +, \cdot)$ a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Correction

On peut montrer qu'il ne s'agit pas d'un espace vectoriel. En effet, rappelons que nous devons montrer que les différents points

1. $(E, +)$ est un groupe abélien (*i.e.* commutatif)
2. $\forall \mathbf{x} \in E,\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E,\ \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}'$.
5. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E,\ \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$.

1. (a) Il est clair que la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ reste un élément de $\mathbb{R}^2$.
   (b) La loi $+$ est associative, nous avons bien $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
   (c) Elle admet un élément neutre qui est le vecteur $(0, 0)$.
   (d) L'existence d'un inverse pour tout élément $\mathbf{x}$ défini par $-\mathbf{x}$ pour lequel on a $-\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = 0$.
   (e) La loi $+$ est bien commutative, on a bien $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
2. L'existence d'un élément neutre pour la loi externe, noté 1, pour lequel nous devons avoir $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ Or, pour tout $\mathbf{x}$, nous avons $1\mathbf{x} = 1 \cdot (x_1, x_2) = (0, x_2) \neq \mathbf{x}$ sauf lorsque $x_1 = 0$. Ce qui met en défaut ce point là.
3. La distributivité par rapport à la loi interne : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \mathbf{x} \in E$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = &\ (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2), \\
= &\ (0, (\alpha + \beta) x_2), \\
= &\ (0, \alpha x_2) + (0, \beta x_2), \\
= &\ \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}$$

4. On vérifie aisément la distributivité par rapport à la loi externe. Pour cela $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$,

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = &\ \lambda \cdot (x_1 + x_1', x_2 + x_2'), \\
= &\ (0, \lambda(x_2 + x_2')), \\
= &\ (0, \lambda x_2 + \lambda x_2'), \\
= &\ (0, \lambda x_2) + (0, \lambda x_2'), \\
= &\ \lambda \cdot (x_1, x_2) + \lambda \cdot (x_1', x_2'), \\
= &\ \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{x}'.
\end{aligned}$$

5. On vérifie l'associativitié par rapport à la loi externe $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\mathbf{x}\in E$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{x}) &= \alpha\cdot(0,\beta x_2),\\ &= (0,(\alpha\beta)x_2),\\ &= (\alpha\beta)\cdot\mathbf{x}\end{aligned}$$

L'espace ainsi étudié n'est donc pas un espace vectoriel.

Exercice 1.2. *Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré n, i.e. si P est un élément de E, alors il existe des coefficients $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et $a_n\neq 0$ tels que*

$$P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n=\sum_{k=0}^n a_kX^k.$$

L'ensemble E muni des lois internes et externes, respectivement définies, pour tout $P,Q\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ par

$$P(X)+Q(X)=\sum_{k=0}^n(a_k+b_k)X^k \quad \textit{et} \quad \lambda\cdot P(X)=\sum_{k=0}^n\lambda a_kX^k$$

a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Sans chercher à justifier votre réponse, quelle est une base de cet espace vectoriel et quelle est sa dimension ?

Correction

On refait exactement les mêmes vérifications que pour l'exercice précédent

1. (a) Il est clair que la somme de deux éléments de E reste un élément de E, *i.e.* la somme de deux polynôme reste un polynôme.

   (b) La loi $+$ est associative nous avons bien $P+(Q+R)=(P+Q)+R$. En effet

$$\begin{aligned}P(X)+(Q(X)+R(X)) &= \sum_{k=0}^n a_iX^i+(\sum_{k=0}^n b_iX^i+\sum_{k=0}^n c_iX^i),\\ &= \sum_{k=0}^n a_iX^i+\sum_{k=0}^n b_iX^i+\sum_{k=0}^n c_iX^i,\\ &= (\sum_{k=0}^n a_iX^i+\sum_{k=0}^n b_iX^i)+\sum_{k=0}^n c_iX^i,\\ &= (P(X)+Q(X))+R(X).\end{aligned}$$

   (c) Elle admet un élément neutre qui est le polynôme nul $P=0$.

   (d) L'existence d'un inverse pour tout élément P défini par $-P$ pour lequel on a $-P+P=P-P=0$.

   (e) La loi $+$ est bien commutative, on a bien $P+Q=Q+P$.

2. L'existence d'un élément neutre pour la loi externe, noté 1, pour lequel nous devons avoir $1\cdot P=P$ Or, pour tout P, nous avons $1\cdot P(X)=\sum_{k=0}^n 1a_kX^k=\sum_{k=0}^n a_kX^k=P(X)$.

3. La distributivité par rapport à la loi interne : $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall P\in E$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot P &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha+\beta)a_iX^i,\\ &= \sum_{k=0}^{n}\alpha a_iX^i+\sum_{k=0}^{n}\beta a_iX^i,\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{n}a_iX^i+\beta\sum_{k=0}^{n}a_iX^i,\\ &= \alpha\cdot P+\beta\cdot P\end{aligned}$$

4. On vérifie aisément la distributivité par rapport à la loi externe. Pour cela $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall P,Q\in E$,

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(P+Q) &= \lambda\cdot(\sum_{k=0}^{n}(a_i+b_i)X^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}\lambda(a_i+b_i)X^i,\\ &= \sum_{k=0}^{n}\lambda a_iX^i+\sum_{k=0}^{n}\lambda b_iX^i,\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{n}a_iX^i+\lambda\sum_{k=0}^{n}b_iX^i,\\ &= \lambda\cdot P+\lambda Q.\end{aligned}$$

5. On vérifie l'associativitié par rapport à la loi externe $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\mathbf{x}\in E$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot P)) &= \alpha\cdot(\sum_{k=0}^{n}\beta a_iX^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}\alpha(\beta a_iX^i),\\ &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha\beta)a_iX^i,\\ &= (\alpha\beta)\cdot P\end{aligned}$$

Exercice 1.3. *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathbf{v}_1=(1,1)$ *et* $\mathbf{v}_2=(2,0)$ *forme une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Correction

Pour cet exercice, on se rappelle simplement qu'une famille de E *est dite génératrice si tout élément* $\mathbf{x}$ *de* E *peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments de cette famille.*

Considérons $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ et exprimons $\mathbf{x}$ comme une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, *i.e.* trouver des valeurs α_1 et α_2 telles que

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2\quad\text{soit}\quad\begin{cases}x_1=\alpha_1+2\alpha_2\\ x_2=\alpha_1\end{cases}$$

La deuxième équation nous conduit à $\alpha_1 = x_2$ et avec la première équation on a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\alpha_2 + \alpha_1, \\
&\quad \downarrow \text{ en isolant } \alpha_2 \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 1.4. *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1)$ *et* $\mathbf{v}_3 = (1,-1,2)$ *forme une famille libre de* $\mathbb{R}^3$.

Correction

On rappelle qu'une famille est dite libre si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs conduisant au vecteur nul est la combinaison triviale.

Nous devons donc vérifier que l'équation

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = 0$$

admet pour une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On remarque que $\mathbf{v}_2$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On va donc se concentrer sur les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ et montrer qu'ils forment une famille libre. Plus précisément, on va se concentrer sur les deux premières composantes de ces vecteurs.
Il est très facile de voir qu'ils forment deux "vecteurs" linéairement indépendants.

Exercice 1.5. *Montrer que la famille* $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *forme une base de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *où*

$$\mathbf{v}_1 = (1,3,2), \quad \mathbf{v}_2 = (2,5,2) \quad \textit{et} \quad \mathbf{v}_3 = (-2,-2,1).$$

Correction

La famille $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une base de l'espace $\mathbb{R}^3$. En effet, il nous suffit de montrer qu'elle forme une famille libre et/ou génératrice de $\mathbb{R}^3$ (on pourra alors conclure à l'aide d'un argument portant la dimension de l'espace étudié).
On décide de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des nombres réels tels que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Montrons alors alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$
\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\
3\lambda_1 + 5\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\
2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 &= 0
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\
-\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
-2\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1
\end{cases}
$$

$$
\rightarrow
\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\
-\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\
-3\lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2
\end{cases}
$$

En remontant de bas en haut dans le système, on montre bien que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la familleest donc libre.
Ayant une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, cette famille constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.6. *On considère une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *définies par*

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0),\ \mathbf{v}_2 = (0,0,1,1) \quad et \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0-1, -2).$$

Cette famille est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$ *? Compléter cette famille en une base de l'espace* $\mathbb{R}^4$.

Correction

On procède comme à l'exercice précédent, considère λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Montrons alors alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

La deuxième équation implique que $\lambda_1 = 0$, la première équation va alors montrer que $\lambda_3 = 0$ et la dernière équation (ou la troisième) permettra de conclure que λ_3 est nul.

Regardons comment compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on va représenter la famille de vecteurs sous forme de matrice et appliquer la méthode du pivot de gauss pour obtenir une matrice triangulaire supérieure (l'ordre des vecteurs importe peu).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \end{array}$$

Pour compléter cette forme triangulaire, on peut donc prendre un vecteur $\mathbf{v}_4$ de la forme $(0,0,0,\alpha)$ où $\alpha \neq 0$.

Exercice 1.7. *Montrer que le noyau d'une application linéaire* ϕ *de* E *forme un sous-espace de* E*, i.e.*

$$Ker(\phi) = \{\mathbf{x} \in E : \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

muni des lois internes et externes de E *(addition et multiplication) est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Correction

$Ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, il suffit de montrer deux choses :

— que cet ensemble est non vide
— qu'il est stable par combinaison linéaire

Il est clair que $Ker(\phi)$ est non vide car nous avons $\mathbf{0} \in Ker(\phi)$ car ϕ est une application linéaire. Il nous reste alors à montrer que $Ker(\phi)$ est stable par combinaison linéiare. Pour cela, considérons $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ deux éléments du noyau de ϕ et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous devons montrer que $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}' \in Ker(\phi)$.

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}') &= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\alpha\mathbf{x}'), \\
&\downarrow \text{ linéarité de } \phi \\
&= \phi(\mathbf{x}) + \alpha\phi(\mathbf{x}'), \\
&\downarrow \ \mathbf{x} \in Ker(\phi) \text{ et } \mathbf{x}' \in Ker(\phi) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Donc $Ker(\phi)$ est bien un sous-espace de E.

Exercice 1.8. *On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E.*

Montrer que les ensembles P et I, munis des structures induites par celle de E sont des sous-espaces vectoriels de E. Que peut-on dire de l'intersection de ces deux sous-espaces.

Correction

On commence par rappeler qu'une fonction paire est une fonction f qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

De même, une fonction g est dite impaire si elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = -g(x).$$

Pour montrer que P et I sont des sous espaces de E, il faut à nouveau montrer que les ensembles sont non vides et qu'ils sont stables par combinaisons linéaires.

- **Espace P :** cet espace est clairement non vide car la fonction nulle, $f = 0$, vérifie bien $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x. Soient maintenant $f, g \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
(f + \lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x), \\
&\downarrow \ f \text{ et } g \text{ appartiennent à } P \\
&= f(-x) + \lambda g(-x), \\
&= (f + \lambda g)(-x)
\end{aligned}$$

  Donc P est bien un sous-espace de E.

- **Espace I :** cet espace est clairement non vide car la fonction nulle, $f = 0$, vérifie bien $-f(x) = f(-x)$ pour tout réel x. Soient maintenant $f, g \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
(f + \lambda g)(-x) &= f(-x) + \lambda g(-x), \\
&\downarrow \ f \text{ et } g \text{ appartiennent à } I \\
&= -f(x) - \lambda g(x), \\
&= -(f + \lambda g)(x)
\end{aligned}$$

  Donc I est bien un sous-espace de E.

Il est aussi évident que l'intersection de ces deux sous-espaces est nul. En effet, soit $h \in P \cap I$, alors la fonction h vérifie les relations suivantes

$$\begin{aligned} h(x) - h(-x) = 0 \quad & \forall x \text{ car } h \in P, \\ h(-x) + h(x) = 0 \quad & \forall x \text{ car } h \in I. \end{aligned}$$

En sommant les deux relations, nous avons $2h(x) = 0$ pour tout réel x, donc $h = 0$.

On pourrait aller plus loin dans cet exercice en montrant que P et I sont en somme directe, il nous resterait à montrer que toute fonction h de E peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Ce que l'on peut vérifier facilement en écrivant :

$$h(x) = \underbrace{\frac{h(x) + h(-x)}{2}}_{f \in P} + \underbrace{\frac{h(x) - h(-x)}{2}}_{g \in I}.$$

Exercice 1.9. *Montrer que l'application* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\phi(x_1, x_2) = (3x_1 + 6x_2, -2x_1)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*. Est-ce que cette application est injective ? Est-elle surjective ?*

Correction

Commençons par montrer qu'il s'agit d'une application linéaire. Considérons $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = & \phi(x_1 \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2), \\ & \downarrow \text{ définition de } \phi \\ & = (3x_1 + 6x_2 + \lambda(3y_1 + 6y_2), -2x_1 - \lambda y_1), \\ & = (3x_1 + 6x_2, -2x_1) + \lambda(3y_1 + 6y_2, -2y_1), \\ & = \phi(\mathbf{x}) + \lambda\phi(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Etudions maintenant le noyau de cette application. Considérons $\mathbf{x}$ un élément du noyau de ϕ, nous avons alors $\phi(\mathbf{x}) = 0$, ce qui nous conduit au système

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 & = & 0, \\ -2x_1 & = & 0. \end{cases}$$

La deuxième équation implique $x_1 = 0$, ce qui, répercuter dans la première, implique $x_2 = 0$. L'application ϕ est donc bien injective.

Pour voir si elle est surjective, considérons un élément $\mathbf{y}$ et montrons qu'il existe $\mathbf{x} \in E$ tel que $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Cela nous amène à considérer le système

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 & = & y_1, \\ -2x_1 & = & y_2. \end{cases} \to \begin{cases} x_2 & = & \frac{1}{6}(y_1 + \frac{y_2}{4}), \\ x_1 & = & -\frac{y_2}{2}. \end{cases}$$

qui admet une solution, l'application est donc bien surjective. L'application ϕ est donc bijective !

Exercice 1.10. *On considère l'application $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, i.e. une application de l'espace des polynômes dans l'espace des polynômes (de degré quelconque), définie par*

$$\phi(P(X)) = XP(X).$$

Montrer que cette application définie un endormorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{K}[X]$.

Correction

Il faut d'abord montrer que l'application ϕ est linéaire.

Soient P et Q deux polynômes et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha P(X) + \beta Q(X)) &= X(\alpha P(X) + \beta Q(X)), \\
&\downarrow \text{ on développe} \\
&= \alpha XP(X) + \beta XQ(X), \\
&\downarrow \text{ on applique la définition de } \phi \\
&= \alpha\phi(P(X)) + \beta\phi(Q(X)),
\end{aligned}$$

L'application ϕ est donc linéaire et on vérifie facilement qu'elle transforme tout polynôme en polynôme. c'est donc un endomorphisme.

Pour montrer que l'endomorphisme est injectif, on va montrer que $\phi(P(X)) = 0$ implique que P est le polynôme nul.

Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\phi(P(X)) = 0$, on a alors $XP(X) = 0$ pour tout X. Or X n'est pas nul pour tout X, nécessairement

Pour montrer que l'application n'est pas surjective, il suffit d'observer que le polynôme constant n'appartient pas à l'image de ϕ.

Pour cela, considérons $a \in \mathbb{R}^\star$ et supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\phi(P(X)) = a$ pour tout X Pour tout X nous aurions donc $XP(X) = a$. En particulier, pour $X = 0$ nous aurons $0 = a$, or $a \neq 0$, donc ϕ n'est pas surjective.

Exercice 1.11. *On considère l'application $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, i.e. une application de l'espace des polynômes dans l'espace des polynômes (de degré quelconque), définie par*

$$\phi(P(X)) = P'(X),$$

où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé. Montrer que cette application définie un endormorphisme surjectif mais non injectif de $\mathbb{K}[X]$.

Correction

Il faut d'abord montrer que l'application ϕ est linéaire.

Soient P et Q deux polynômes et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\phi(\alpha P(X) + \beta Q(X)) = (\alpha P(X) + \beta Q(X))',$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \downarrow \text{ la dérivation est linéaire} \\
&= \alpha P'(X) + \beta Q'(X), \\
&\quad \downarrow \text{ on applique la définition de } \phi \\
&= \alpha \phi(P(X)) + \beta \phi(Q(X)),
\end{aligned}
$$

L'application ϕ est donc linéaire et on vérifie facilement qu'elle transforme tout polynôme en polynôme. C'est donc un endormorphisme.

Pour montrer que l'endomorphisme est surjectif, on va montrer que tout polynôme appartient à l'image de ϕ à l'aide d'une construction explicite

Soit Q un élément de $\mathbb{K}[X]$, alors Q peut s'écrire sous la forme

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

Considérons maintenant le polynôme P défini par

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}.$$

On vérifie immédiatement que l'on a bien $\phi(P) = P' = Q$.

Pour montrer que l'application n'est pas injective, on va montrer que son noyau n'est pas réduit au polynôme nul, mais plutôt aux polynômes constants.

Supposons que l'on a $\phi(P(X)) = P'(X) = 0$. Donc P est un polynôme dont la première dérivée est nulle, or les seuls polynômes dont la dérivée est nulle sont les polynômes constants qui ne se limitent donc pas au polynôme nul (pour tout réel a, $\phi(a) = 0$). ϕ n'est donc pas injective.

Exercice 1.12. *On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\phi(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 8x_1 + 2x_3).$$

Déterminer le noyau de l'application linéaire ϕ. Quelle est sa dimension ?

Correction

Le noyau de l'application linéaire ϕ est défini comme l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ de $E = \mathbb{R}^3$ vérifiant $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

On va donc chercher à résoudre un système linéaire homogène de trois équations à trois inconnues.

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 8x_1 + 2x_3 &= 0 \end{cases} \to \begin{cases} -4x_1 &= x_3 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_3 &= -4x_1 \\ x_2 &= -6x_1 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Le noyau de ϕ est donc déterminé par l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ de la forme $\begin{pmatrix} t \\ -6t \\ -4t \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$

Le noyau de ϕ est donc engendré par un vecteur, il forme donc une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un espace de dimension 1.

Exercice 1.13. *Déterminer une base du noyau de l'application linéaire ϕ dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Pour déterminer une base du noyau de cette matrice, on considère un élément $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de ce noyau, ce dernier doit vérifier

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont identiques, cela nous ramène donc à un système à deux équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 &= x_3 + 2x_4, \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

On en déduit que le système admet pour solutions les éléments suivants

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base du noyau de cette application.

Exercice 1.14. *Déterminer une base de l'image de l'application linéaire ϕ dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

On rappelle que l'image d'une application est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice représentant cette application.

On peut déjà se douter, à l'aide du théorème du rang, de la dimension de l'espace image étant donné l'exercice précédent où l'on a a travaillé sur le noyau.

Ainsi déterminer une base de l'image de cette application, revient à déterminer une famille libre des vecteurs colonnes de la matrice.

Si les vecteurs étaient linéairement indépendants, alors le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ admettrait $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ comme unique solution, *i.e.*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ici on va chercher à exploiter le travail effectué sur le noyau en exploitant les relations obtenues à l'exercice précédent :

$$\begin{cases} x_1 &= & x_3 + 2x_4, \\ x_2 &= & -2x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

Posons $x_3 = -1$ et $x_4 = 0$ dans notre relation principale, on en déduit, en utilisant notre système précédent que $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. D'où :

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet d'exprimer la troisième colonne de notre matrice comme une combinaison linéaire des deux premières. De la même façon, posons $x_3 = 0$ et $x_4 = -1$ dans notre relation principale, on en déduit, en utilisant notre système précédent que $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. D'où :

$$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a exprimé la quatrième colonne de notre matrice comme une combinaison linéaire des deux premières. De plus, les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes (cela se voir très facilement), donc une base de l'image de notre application est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nous aurions également pu faire cela uniquement en nous ramenant à une matrice échelonnée réduite en travaillant sur les colonnes de la matrice, ce qui aurait été beaucoup plus rapide ! Je vous le laisse à titre d'entraînement

Exercice 1.15. *On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3).$$

Déterminer le noyau de cette application. Peut-on dire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Correction

Pour la première question, on procédera de la même manière que les fois précédentes.

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_3} \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ -2x_2 - 5x_3 &= 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ -5x_3 &= 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \end{cases}$$

On en déduit que la solution de ce système est le vecteur nul. Ainsi l'application ϕ est injective. Or il s'agit d'un endomorphisme (c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) de $\mathbb{R}^3$, elle est donc aussi surjective. In fine, l'application ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.16. *Considérons une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3).$$

Supposons que $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$.

1. *Déterminer la représentation matricielle de l'application ϕ.*
2. *Déterminer l'image du vecteur $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3$ avec **et** sans l'aide de la représentation matricielle.*

Correction

1. La représentation matricielle de cette application nous donnera une une matrice A de 2 lignes et 3 colonnes, dont les colonnes correspondent aux images des vecteurs de bases dans cette même base, *i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Commençons par la forme algébrique, c'est-à-dire en passant par la définition de la fonction ϕ.
   On commence par noter que les image des vecteurs de base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ sont données par les relations

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{e}'_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \phi(\mathbf{e}'_2) &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \phi(\mathbf{e}'_3) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

   On peut alors calculer l'image du vecteur $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3$ par l'application ϕ

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}) &= \phi(2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3), \\ &\quad \downarrow \ \phi \text{ est une application linéaire} \\ &= 2\phi(\mathbf{e}'_1) - 2\phi(\mathbf{e}'_2) - \phi(\mathbf{e}'_3), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\downarrow \text{ on calcule les images des vecteurs de base}\\
&= 2(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),\\
&= 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\\
&= 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

Avec la représente matricielle il suffit de faire le calcul suivant :

$$
A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2.
$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

1.2 Pour aller plus loin

Exercice 1.17 (Images et Noyaux)**.** *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les équivalence suivantes sont vraies*[1] *:*

1. $Ker(f^2) = Ker(f) \iff Ker(f) \cap Im(f) = \{\mathbf{0}\}$.
2. $Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f) + Im(f) = E$.

Correction

L'exercice ne suppose pas de grandes connaissances, il suffit simplement de se rappeler des définitions d'image et de noyau :

$$\mathbf{x} \in Ker(f) \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

et

$$\mathbf{x} \in Im(f) \iff \exists \mathbf{z} \in E, \mathbf{x} = f(\mathbf{z}).$$

Il faudra ensuite traiter chaque égalité entre les ensembles en montrant les inclusions réciproques, *i.e.* pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il nous faut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

1. Comme il s'agit d'une équivalence, il va falloir démontrer l'implication dans les deux sens.

   - On suppose que $Ker(f^2) = Ker(f)$

     (i) Il est clair que le vecteur nul $\mathbf{0}$ est un élément de $Im(f)$ et de $Ker(f)$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E. On en déduit que $0 \in Ker(f) \cap Im(f)$.
     (ii) Soit maintenant $\mathbf{x}$ un élément de $Ker(f) \cap Im(f)$, on a donc $f(\mathbf{x}) = 0$ et on sait qu'il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$. On en déduit que $f(f(\mathbf{z})) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ainsi $\mathbf{z} \in Ker(f^2) = Ker(f)$, ce qui signifie que $\mathbf{x} = f(\mathbf{z}) = 0$.

   - On suppose que $Ker(f) \cap Im(f) = \mathbf{0}$

     (i) Il est à nouveau évident que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$. En effet, soit $\mathbf{x} \in Ker(f)$, alors $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et $f(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Donc $\mathbf{x} \in Ker(f^2)$.
     (ii) Soit $\mathbf{x} \in Ker(f^2)$, on a alors $f(f(\mathbf{x})) = 0$. Cela signifie que $f(\mathbf{x}) \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors cette intersection est réduite au vecteur nul, donc $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Cette dernière égalité montre bien que $\mathbf{x}$ est un élément du noyau de f, *i.e.* $\mathbf{x} \in Ker(f)$.

2. Comme précédemment, nous devons démontrer l'implication dans les deux sens
   - Supposons que $Im(f^2) = Im(f)$

     (i) L'inclusion $Im(f) + Ker(f) \subset E$ est évidente car ce sont des sous-espaces vectoriels de E.
     (ii) Soit $\mathbf{x}$ un élément de E, par hypothèse on sait que $f(\mathbf{x}) \in Im(f^2)$, donc il existe un vecteur $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{z}))$. On en déduit que $f(f(\mathbf{z}) - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{x} - f(\mathbf{z}) \in Ker(f)$. En écrivant $\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x} - f(\mathbf{z})}_{\in Ker(f)} + \underbrace{f(\mathbf{z})}_{\in Im(f)}$, nous obtenons le résultat demandé.

1. Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il nous faut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

- Supposons que $Ker(f) + Im(f) = E$

  (i) L'inclusion $Im(f^2) \subset Im(f)$ est évidente. En effet, soit $\mathbf{x} \in Im(f^2)$, alors il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(f(\mathbf{z})) = \mathbf{x}$, par conséquente $\mathbf{x} = f(\mathbf{y})$ où $\mathbf{y} = f(\mathbf{z})$. On a bien écrit $\mathbf{x}$ comme l'image par f d'un vecteur de E.
  (ii) Considérons maintenant $\mathbf{x} \in Im(f)$, alors il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$. On doit maintenant utiliser notre hypothèse, on peut donc écrire $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ où $\mathbf{a} \in Ker(f)$ et $\mathbf{b} \in Im(f)$. Or comme $\mathbf{b} \in Im(f)$, on sait qu'il existe $\mathbf{c} \in E$ tel que $f(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$. Ainsi

  $$\mathbf{x} = f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{a} + f(\mathbf{c})) = f(\mathbf{a}) + f(f(\mathbf{c})) = f(f(\mathbf{c})) \in Im(f^2),$$

  ce qui termine la démonstration.

Exercice 1.18 (Images et noyaux en dimension finie)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer les équivalences suivantes*

$$Ker(f) \oplus Im(f) = E \iff Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f) = Ker(f^2)$$

Correction

Cela fonctionne comme pour l'exercice précédent, mais certaines démonstrations seront grandement simplifiées. On va ici démontrer les implications de gauche à droite : (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3) et (3) $\implies$ (1)

- Montrons que (1) $\implies$ (2)

  Aucune spécificité liée à l'étude d'un espace de dimension finie, on procèdera donc comme à l'exercice précédent.

- Montrons que (2) $\implies$ (3)

  (i) On a bien $Ker(f) \subset Ker(f^2)$. En effet, soit $\mathbf{x} \in Ker(f)$, alors $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et donc $f(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
  (ii) Comme $Ker(f) \subset Ker(f^2)$, pour que les deux ensembles soient égaux, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension ! Pour cela, on va utiliser le théorème du rang

  $$dim(Ker(f^2)) = n - dim(Im(f^2)) = n - dim(Im(f)) = dim(Ker(f)).$$

  On en déduit que $Ker(f) = Kerf(^2)$.

- Montrons que (3) $\implies$ (1)
  Il s'agit de démontrer que les espaces $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires dans E.
  (i) Soit $\mathbf{x} \in Ker(f) \cap Im(f)$, il existe $\mathbf{z} \in E$ tel que $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ d'où $f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{z})) = \mathbf{0}$. Donc $\mathbf{z} \in Ker(f^2) = Ker(f)$, ainsi $\mathbf{x} = f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Finalement

  $$Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}.$$

  (ii) Il suffit maintenant de démontrer que la somme des dimensions de ces deux sous-espaces est égale à n. Mais c'est une conséquence directe du théorème du rang, qui énonce

  $$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E) = n.$$

Exercice 1.19 (Homothéties)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. On appelle homothétie, une application linéaire h_a de la forme*

$$h_a : \begin{array}{l} E \to E, \\ \mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x}, \end{array}$$

où a est un nombre réel.

1. *Soit f un endomorphisme de E. Supposons que, quelque soit $\mathbf{x} \in E$, il existe $a_\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$f(\mathbf{x}) = a_\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

   (a) *Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ deux vecteurs linéairements indépendants. Montrer que $a_\mathbf{x} = a_\mathbf{y}$. On pourra chercher à calculer $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ de deux façons différentes.*

   (b) *Montrer que f est une homothétie.*

2. *On appelle centre de $\mathscr{L}(E)$ (i.e. centre de l'ensemble des endomorphismes de E) l'ensemble des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant*

$$\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f,$$

   i.e. il s'agit des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

   (a) *Soit $\mathbf{x} \in E$. Montrer qu'il existe un projecteur $p_\mathbf{x}$ de E dont l'image est égale à $Vect(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \rangle$.*

   (b) *Déterminer le centre de $\mathscr{L}(E)$.*

Correction

1. Soit f un endomorphisme de E. Supposons que, quelque soit $\mathbf{x} \in E$, il existe $a_\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(\mathbf{x}) = a_\mathbf{x}\mathbf{x}.$$

   (a) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ deux vecteurs linéairements indépendants. On va utiliser le fait que f est linéaire pour écrire : $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.
   Ce qui nous donne

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = a_\mathbf{x}\mathbf{x} + a_\mathbf{y}\mathbf{y}.$$

   Ce qui nous donne :

$$(a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_\mathbf{x})\mathbf{x} + (a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_\mathbf{y})\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

   Or les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ forment une famille libre, ce qui signifie que $a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_\mathbf{x} = 0$ et $a_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - a_\mathbf{y} = 0$. Par suite, on déduit que $a_\mathbf{x} = a_\mathbf{y}$.

   (b) Pour montrer que f est une homothétie il faut montrer que pour tout $\mathbf{x}$, f peut s'écrire sous la forme $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$ pour un certain réel a.
   Dans la définition actuelle de f, le rapport de l'homothétie dépend du vecteur $\mathbf{x}$ considéré, l'objectif de est montrer que $a_\mathbf{x} = a$ quel que soit $\mathbf{x}$.

   Pour cela on va considérer deux vecteur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et montrer que l'on a $a_\mathbf{x} = a_\mathbf{y}$ dans tous les cas.

La question précédente nous a permis de montrer que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont indépendants, alors $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$. Il reste à étudier le cas où les deux vecteurs sont liés. Deux vecteurs sont liés s'il existe un réel λ tel que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ (on va considérer $\mathbf{x}$ non nul). On alors

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{y}}\mathbf{y} &= f(\mathbf{y}) \\ &= f(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) \\ &= \lambda a_{\mathbf{x}}\mathbf{x} \\ &= a_{\mathbf{x}}\lambda\mathbf{x} \\ &= a_{\mathbf{x}}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

On a donc $a_{\mathbf{y}}\mathbf{y} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$, ce qui montre que $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$ quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

2. On appelle centre de $\mathscr{L}(E)$ (*i.e.* centre de l'ensemble des endomorphismes de E) l'ensemble des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f,$$

i.e. il s'agit des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

(a) Pour cela il suffit de définir le projecteur $p_{\mathbf{x}}$ qui projette sur la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{x}$, notée D, parallèlement à un supplémentaire de D.

(b) On doit maintenant déterminer l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les autres. La question précédente suggère qu'il s'agit des homothéties. On peut donc commencer par montrer que ce sont bien des éléments du centre de $\mathscr{L}(E)$.

Soit f une homothétie de E. f est donc de la forme $h_a = aId$ pour un certain réel a. Considérons maintenant g un endomorphisme de E, alors pour tout $\mathbf{x} \in E$ nous avons

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(f(\mathbf{x})) \\ &= g(a\mathbf{x}) \\ &= ag(\mathbf{x}) \\ &= f(g(\mathbf{x})) \\ &= (f \circ g)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Il faut maintenant montrer qu'il n'y pas d'autres endomorphimes qui appartiennent au centre de $\mathscr{L}(E)$ que les homothéties.

Pour cela, considérons f un élément du centre de $\mathscr{L}(E)$ et soit $\mathbf{x} \in E$. D'après la question *a*) il existe un projecteur $p_{\mathbf{x}}$ qui projette sur la droite vectorielle $D = Vect(\mathbf{x})$ et parallèlement à un supplémentaire de D. Comme f appartient au centre de $\mathscr{L}(E)$, on a

$$(f \circ p_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}) = (p_{\mathbf{x}} \circ f)(\mathbf{x}).$$

Ce qui montre que f laisse stable l'image du projecteur $p_{\mathbf{x}}$. Donc l'image d'un vecteur de $Vect(\mathbf{x})$ par l'application f est de la forme $\alpha_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. La question 1.*b*) permet de conclure que f est une homothétie. Ce qui achève la démonstration de cette question.