Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Devoir Personnel
Licence 2 MIASHS (2021-2022)

Guillaume Metzler

Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France

guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

On rappelle l'objectif des différents exercices.

1. **Exercice 1 :** plutôt classique et calculatoire, ce premier exercice permet de mobiliser un large champ des notions en algèbre linéaire et géométrie euclidienne. Il ne présente pas de difficultés majeures et consiste à mobiliser des résultats du cours et à effectuer une quantité de calculs. Par sa nature, c'est un bon exercice pour réviser mais aussi s'assurer que vous connaissez les techniques vues en cours.

2. **Exercice 2 :** il se décompose en deux parties. La première partie de ce problème est relativement calculatoire et se concentre sur la notion de diagonalisation, valeurs propres, vecteurs propres. Il nécessitera de connaître les notions de noyaux et d'image ainsi que les propriétés des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
La deuxième partie est plus théorique dans le sens où vous n'aurez pas de valeurs sur les objets, ces derniers sont ainsi plus *abstraits*. Les deux premières questions peuvent se traiter aisément. La difficulté est ensuite croissante à partir de la question 3.
L'exercice 2 cherche à montrer une condition pour que deux matrices qui commutent possède ce que l'on appelle un vecteur sparse,i.e. qui contient au moins un 0.

Exercice 1 : Etude d'une forme quadratique

On considère la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Peut-on dire que la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$?

   Plusieurs possibilités s'offrent à nous :

   i) on peut montrer qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ ce qui montrera directement qu'elle est aussi génératrice et qu'elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$

   ii) calculer directement le déterminant de la matrice formée par cette famille de vecteurs et montrer qu'il est non nul, ces trois vecteurs formeront donc une base de $\mathbb{R}^3$

   On se propose de faire les deux.

   i) Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels tels que

   $$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

   Cette équation est équivalente au système suivant

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 &= 0, \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \end{cases}$$

   Cette dernière équivalence montre directement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc la famille constituée des 3 vecteurs forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$.

   ii) On considère la matrice formée des trois vecteurs et on calcule son déterminant

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

2. On note V la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$, *i.e.*

   $$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) La matrice V est-elle inversible ?

   La matrice V est inversible. En effet, nous avons précédemment montré que les colonnes de cette matrice forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) On note u l'application linéaire associée à V. Donner l'expression de l'application u.

   L'application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est définie, pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ par :

   $$u(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

est l'application linéaire (c'est même un automorphisme) associée à la matrice V.

(c) Déterminer son application réciproque.

L'application linéaire u est un automorphisme, elle est donc inversible. Pour déterminer l'expression de l'application réciproque u^{-1}, nous pouvons chercher à déterminer l'inverse de la matrice V et en déduire l'application linéaire associée.
Pour calculer l'inverse, on utilisera la matrice étendue suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 0.5 \times L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 + 0.5 \times L_3 \\ L_3 \leftarrow 0.5 \times L_3 \end{array}$$

On en déduit que

$$V^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la réciproque de l'application linéaire u, notée u^{-1}, est définie par

$$u^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$$

(d) Soit $\mathbf{w} = (-1, 1, -1)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image de $\mathbf{w}$ par l'application u.

Il suffit d'appliquer la définition de u ou de calculer le produit $V\mathbf{w}$, ce qui nous donne

$$V\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. On considère maintenant l'espace E des matrices de $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \text{ tel que } b = f,\ c = e,\ \text{et } a = g \right\}.$$

On considère également l'application

$$\phi : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$$

en posant, pour tous $A, B \in F$,

$$\phi(A, B) = tr(AVB).$$

On remarque que l'on peut réécrire F de la façon suivante :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \right\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

On va simplement montrer que F est non vide et stable par combinaison linéaire.
Il est facile de voir que F est non vide car la matrice nulle est élément de F. De plus, soient A et B deux éléments de F et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ c' & d' & c' \\ 0 & b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' & 0 \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' & \alpha c + \beta c' \\ 0 & \alpha b + \beta b' & \alpha a + \beta a'. \end{pmatrix}$$

Cette matrice a bien la même structure qu'un élément de F, donc F est bien stable par combinaison linéaire, c'est donc bien u nsous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

Les éléments de l'espace F sont constitués des matrices qui dépendent de 4 valeurs, on peut donc écrire tout élément de F sous la forme

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces éléments sont générateurs de F et ils forment une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est donc bien une base de F.

(c) Quelle est la dimension de F ?

La question précédente a montré que F admettait une base constituée de 4 éléments, c'est donc un espace de dimension 4.

(d) Montrer que l'application ϕ est une forme bilinéaire ? Est-elle symétrique [1] ?

Il s'agit bien d'une forme linéaire car la trace est une forme linéaire. Il nous reste à montrer qu'elle est bien linéaire à gauche et à droite.
On commence par la linéarité à gauche :

$$\begin{aligned}
\phi(A + \alpha A', B) &= tr((A + \alpha A')VB), \\
&\quad \downarrow \text{ distributivité du produit matricielle par rapport à la loi "+"} \\
&= tr((AVB) + \alpha A'VB), \\
&\quad \downarrow \text{ la trace est une application linéaire} \\
&= tr(AVB) + \alpha tr(A'VB), \\
&\quad \downarrow \text{ définition de } \phi \\
&= \phi(A, B) + \alpha \phi(A'VB).
\end{aligned}$$

Faisons de même à droite :

1. On pourra par exemple considérer la matrices $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et une matrice B_0 diagonale telle que $d = 0$.

$$
\begin{aligned}
\phi(A, B+\beta B') &= tr(AV(B+\beta B')),\\
&\quad \downarrow \text{ distributivité du produit matricielle par rapport à la loi "+"}\\
&= tr(AVB + \beta AVB'),\\
&\quad \downarrow \text{ la trace est une application linéaire}\\
&= tr(AVB) + \beta tr(AVB'),\\
&\quad \downarrow \text{ définition de } \phi\\
&= \phi(A,B) + \beta\phi(AVB').
\end{aligned}
$$

On a donc bien une forme bilinéaire. Est-elle symétrique, on va montrer que non en considérant les matrices $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors

$$
\begin{aligned}
\phi(A_0, B_0) &= tr(A_0 V B_0),\\
&= tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),\\
&= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),\\
&= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
\phi(B_0, A_0) &= tr(B_0 V A_0),\\
&= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right),\\
&= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right),\\
&= tr\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right),\\
&= -2
\end{aligned}
$$

Nous avons donc $\phi(A_0, B_0) \neq \phi(B_0, A_0)$, l'application ϕ n'est donc pas symétrique.

(e) Montrer que l'expression de la forme quadratique q, donnée par $q(A) = \phi(A, A)$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in F$ est de la forme

$$q(A) = 2(a(a+b) + ca + cd + b(c+d)).$$

Il suffit simplement d'appliquer la définition de q et de faire le calcul

$$\begin{aligned}
q(A) &= \phi(A, A), \\
&= tr\left(\left(\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}\right)\right), \\
&= tr\left(\begin{pmatrix} a+b & a & b \\ c+d & 2c & d+c \\ b & a & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}\right), \\
&= tr\left(\begin{pmatrix} a(a+b)+ac & \dots & \dots \\ \dots & b(c+d)+2cd+b(d+c) & \dots \\ \dots & \dots & ac+a(a+b) \end{pmatrix}\right), \\
&= 2a(a+b) + 2ac + 2cd + 2b(c+d).
\end{aligned}$$

4. On admettra que la représentation matricielle Q de la forme quadratique q est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) On admettra que la forme quadratique q voit son noyau réduit au vecteur nul. En déduire le rang de cette forme quadratique.

Cette forme quadratique agit de l'espace $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, son noyau étant réduit au vecteur nul, on en déduit que le rang est égal à 4, *i.e.* l'image de cette forme quadratique est l'espace $\mathbb{R}^4$ tout entier.

(b) La forme quadratique q est-elle définie ?

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède, la forme quadratique étant de rang plein, elle est donc définie, ce qui veux dire que seul le vecteur nul a pour image le vecteur nul.

(c) La matrice Q est-elle diagonalisable ?

La matrice Q est symétrique réelle, elle est donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale, *i.e.* la matrice Q est diagonalisable dans la base de ses vecteurs propres qui sont deux à deux orthogonaux.

(d) On admet (mais vous pouvez essayer de le montrer) que le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_Q$ associé à Q est donné par

$$\mathcal{X}_Q(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Peut-on dire que la forme quadratique q est (définie) positive ou négative [2] ?

Nous avons déjà vu que la forme q était définie. On va maintenant chercher à déterminer les valeurs propres de Q à l'aide de l'expression du polynôme caractéristique.

2. On pourra évaluer le polynôme χ_q en deux valeurs très simples.

On peut remarquer que $\mathcal{X}_Q(1) = 0$ et $\mathcal{X}_Q(-1) = 0$. Ainsi, Q admet une valeur propre positive et une valeur propre négative, donc Q n'est ni positive, ni négative.

(e) Déterminer la forme polaire ϕ' associée à forme quadratique q.

Nous avons vu que la forme ϕ n'était pas symétrique, on va donc utiliser l'identité de polarisation pour trouver la forme bilinéaire symétrique ϕ' associée à q. D'où :

$$\begin{aligned}
\phi'(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(q(X+Y) - q(X) - q(Y)\right), \\
&\downarrow \text{ on applique la définition de } q \\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(X+Y, X+Y) - \phi(X,X) - \phi(Y,Y)\right), \\
&\downarrow \ \phi \text{ est bilinéaire} \\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(X,Y) + \phi(Y,X)\right).
\end{aligned}$$

On retrouve également cette relation sous le nom de **symétrisation d'une forme bilinéaire**.

5. On considère maintenant l'espace G défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \text{ tel que } a = b \text{ et } b = c \right\}.$$

On remarque que l'on peut réécrire G de la façon suivante

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \right\}.$$

(a) G est-il un sous-espace de F ? Un sous-espace de E ? Quelle est la dimension de G ?

G est bien un sous-espace de F. En effet $G \subset F$, il suffit de prendre $b = c = 0$ et $a = d$ dans la définition de l'espace F.
On voit aussi que G est non vide car il contient la matrice nulle. Enfin il est clairement stable par combinaison linéaire car la combinaison linéaire de matrices diagonales reste une matrice diagonale.

Comme G est un sous-espace de F qui est un sous-espace de E, c'est donc aussi un sous-espace de E

Enfin G est un espace généré par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est donc un sous-espace de F de dimension 1.

(b) Déterminer le sous-espace $G^\perp$ orthogonal à G dans F pour le produit scalaire ϕ'.

Pour déterminer $G^\perp$, il suffit de déterminer la forme des matrices $U \in F$ qui vérifient $\phi'(U, A) = 0$ pour tout $A \in G$.

Soit $U = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in F$ et $A = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \in G$ alors

$$\begin{aligned}
& 0 = \phi'(U, A), \\
& 0 = \frac{1}{2}\left(\phi(U,A) + \phi(A,U)\right), \\
& \quad \downarrow \text{ on peut faire abstraction du facteur } 1/2 \\
\iff & 0 = tr\left(\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right), \\
& \quad + tr\left(\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}\right), \\
\iff & 0 = tr\left(\begin{pmatrix} a+b & a & b \\ c+d & 2c & d+c \\ b & a & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}\right), \\
& \quad + tr\left(\begin{pmatrix} g & g & 0 \\ g & 0 & g \\ 0 & g & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}\right), \\
\iff & 0 = tr\left(\begin{pmatrix} g(a+b) & ga & gb \\ g(c+d) & g(2c) & g(d+c) \\ gb & ga & g(a+b) \end{pmatrix}\right), \\
& \quad + tr\left(\begin{pmatrix} g(a+c) & g(b+d) & gc \\ g(b+d) & 2gb & ga \\ gc & g(b+d) & g(c+a) \end{pmatrix}\right), \\
\iff & 0 = 4g(a+b+c).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$G^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \text{ tel que } a+b+c = 0 \right\}.$$

(c) Quelle est la dimension de $G^{\perp}$ et expliquez pourquoi.

On a $dim(G^{\perp}) = 3$. En effet, nous savons que G et $G^{\perp}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de F, or F est dimension 4 et G et de dimension 1.

Exercice 2 : Diagonalisation

Partie I : Quelques calculs de valeurs propres

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ où

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on définit également les vecteurs $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. On commence par étudier la matrice A.
   (a) Déterminer le spectre de la matrice A, *i.e.* les valeurs propres de A.

   On détermine le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_A$ associé à la matrice A

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_A(\lambda) &= det(A - \lambda I_3), \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on retranche la première ligne aux lignes deux et trois} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on développe selon la dernière colonne} \\
&= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
&= (1 - \lambda)[-\lambda(1 - \lambda) + \lambda - 1] + (1 - \lambda)(\lambda - 1), \\
&= (1 - \lambda)\underbrace{[\lambda - 1 + \lambda - 1 - \lambda + \lambda^2]}, \\
&= (1 - \lambda)\underbrace{[\lambda^2 + \lambda - 2]}, \\
&= (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2).
\end{aligned}$$

   Ainsi le spectre de A, *i.e.* l'ensemble des valeurs propres de A est $\{-2, 1, 1\}$.

   (b) Vérifier que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs propres de A.

   On va simplement vérifier que les trois vecteurs de cette famille sont des vecteurs propres de A.

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathbf{v}_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathbf{v}_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathbf{v}_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

La matrice A est diagonalisable. En effet nous venons d'exhiber une base des différents sous-espaces propres de la matrice A.

Nous aurions également pu conclure en utilisant le fait que la matrice A est symétrique réelle et qu'elle est donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

(d) Montrer qu'aucun élément de $\mathscr{F}$ n'est un vecteur propre commun aux matrices A et B.

On va refaire la même chose que ce que nous avons fait pour la matrice A.

$$B\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathbf{v}_1$ n'est pas un vecteur propre de la matrice B.

$$B\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathbf{v}_2$ n'est pas un vecteur propre de la matrice B.

$$B\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathbf{v}_3$ n'est pas un vecteur propre de la matrice B.

2. On s'intéresse maintenant à la matrice B.

(a) Déterminer le spectre de B, *i.e.* les valeurs propres de la matrice B.

On détermine le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_B$ associé à la matrice B

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_B(\lambda) &= det(B - \lambda I_3), \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}, \\
&\quad \downarrow \text{ on développe selon la deuxième ligne} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda-1 \end{vmatrix}, \\
&= (2-\lambda)\underbrace{[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]}, \\
&= (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda. + 4], \\
&= (2-\lambda)^3.
\end{aligned}$$

Ainsi le spectre de A, *i.e.* l'ensemble des valeurs propres de B est $\{2\}$.

(b) Montrer que $Im(B - 2I_3) = Vect(\mathbf{v}_4)$ et que $dim(Ker(B - 2I_3)) = 2$.

On a $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de la matrice sont proportionnelles. Ainsi la matrice étudiée est de rang 1, donc l'image de $B - 2I_3$ est engendré par un seul vecteur qu'est le vecteur $(1, 0, 1)$ donc $\mathbf{v}_4$.

L'image de $B - 2I_3$ étant de dimension 1, le théorème du rang nous permet de conclure que la dimension du noyau de $B - 2I_3$ est égale à 2.

(c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

Comme $dim(Ker(B - 2I_3)) = 2 \neq 3$, la matrice B n'est donc pas diagonalisable.

3. Etude des matrices A et B.

(a) Montrer que $Ker(A - I_3) \cap Ker(B - 2I_3) = Vect(\mathbf{v}_5)$.

Nous avons vu plus tôt que le noyau de $A - I_3$ est un sous-espace engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et que le noyau de $B - 2I_3$ est engendré par deux vecteurs que l'on peut noter $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -3)$.

$\mathbf{x}$ est un élément du noyau de l'intersection si et seulement si $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $B\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$, *i.e.* si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 0. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 & = & x_2, \\ x_3 & = & -2x_2. \end{cases},$$

i.e. si et seulement si $\mathbf{x}$ est un vecteur de la forme $\alpha(1, 1, -2) = Vect(\mathbf{v}_5)$.

(b) Montrer que $\mathbf{v}_5$ est le seul vecteur propre commun aux matrices A et B [3].

On rappelle que le sous-espace propre de la matrice A associé à la valeur propre -2 est engendré par le vecteur $\mathbf{v}_3$ qui lui même n'est pas un vecteur propre de B pour la valeur propre -2. Ainsi $Ker(A + 2I_3) \cap Ker(B - 2I_3) = \{\mathbf{0}\}$.
Or les vecteurs propres communs à A et B se trouvent soit dans (i) $Ker(A + 2I_3) \cap Ker(B - 2I_3) = \{\mathbf{0}\}$ ou dans (ii) $Ker(A - I_3) \cap Ker(B - 2I_3) = Vect(\mathbf{v}_5)$. Ce qui répond à la question.

Partie II : Un peu de théorie

Remarque : cette deuxième partie est plus abstraite et donc moins calculatoire d'un point de vue numérique. Elle nécessite de s'être bien approprié les notions vues en cours.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace

$$\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \mid \exists i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i = 0 \right\}.$$

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A. On dit que X est *sparse* si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

3. On pourra considérer le deuxième sous-espace propre de A, vérifier que $\mathbf{v}_5$ appartient à ce sous-espace dont on regardera la dimension

i) $\mathbf{x} \in \mathscr{N}$,

ii) il existe μ dans le spectre de A et $\mathbf{u} \in \mathscr{N}$ tel que $\mathbf{x} = (A - \mu I_n)\mathbf{u}$.

On notera également $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices anti-symétriques, *i.e.* l'espace des matrices qui vérifient $A^T = -A$.

Enfin, pour tout $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\phi(M) = AM + MA^T \quad \text{et} \quad \psi(M) = AMA^T.$$

1. On suppose que μ est une valeur propre de A telle que la dimension du sous-espace propre associé est supérieure ou égale à 2. Montrer que A admet un vecteur propre *sparse* associé à la valeur propre μ[4].

   Comme le sous-espace propre est dimension au moins égale à 2, il existe deux vecteurs propres de A associés μ qui ne sont pas colinéaires, notons les $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Soit au moins l'un des vecteur propre contient un 0 dans ce cas c'est terminé, soit les deux vecteurs ne contiennent aucun 0. Dans ce cas x_1 et y_1 sont non nuls et le vecteur $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \dfrac{x_1}{y_1}\mathbf{y}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ vérifiant $x'_1 = 0$.

2. On cherche maintenant étudier les applications ϕ et ψ.

   (a) Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est non trivial, *i.e.* ne contient pas que la matrice nulle.

   L'espace des matrices anti-symétriques est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2} \leq 0$ pou tout $n \geq 2$, c'est donc un espace non trivial dans le cas où $n \geq 2$.

   (b) Montrer que les colonnes d'une matrice $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des éléments de $\mathscr{N}$.

   Les éléments de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices dont les éléments diagonaux sont nécessairement nuls (en effet ils doivent vérifier $a_{ii} = -a_{ii}$ pour tout i). Chaque colonne d'une telle matrice contient donc un moins un 0 et est donc un élément de $\mathscr{N}$.

   (c) Montrer que les applications ϕ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Il s'agit de vérifier que les applications ϕ et ψ sont des applications linéaires. On pourra conclure que ce sont des endomorphismes car ϕ et ψ sont toutes deux des applications de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Considérons M et M' des éléments de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\phi(M + \alpha M') &= A(M + \alpha M') + (M + \alpha M')^T A^T, \\
&\quad \downarrow \text{ on développe et on applique une propriété de la transposée} \\
&= AM + \alpha AM' + MA^T + \alpha M' A^T, \\
&= \underbrace{AM + MA^T} + \underbrace{\alpha(AM' + M'A^T)}, \\
&= \phi(M) + \alpha\phi(M').
\end{aligned}$$

4. soit le vecteur propre vérifie la propriété, sinon utilisera le fait que la dimension du sous-espace propre est supérieure à 2 et on considérera deux vecteurs de ce sous-espace.

On fait de même pour ψ

$$\begin{aligned}
\phi(M+\alpha M') &= A(M+\alpha M')A^T, \\
&\downarrow \text{ on développe à gauche} \\
&= (AM+\alpha AM')A^T, \\
&\downarrow \text{ on développe à droite} \\
&= \underbrace{AMA^T} + \alpha\underbrace{(AM'A^T)}, \\
&= \psi(M) + \alpha\psi(M').
\end{aligned}$$

On en conclut que ϕ et ψ sont bien des endomorphismes de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que ϕ et ψ commutent.

Il nous faut montrer que pour tout $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $\phi \circ \psi(M) = \psi \circ \phi(M)$. En effet

$$\begin{aligned}
\phi \circ \psi(M) &= \phi(AMA^T), \\
&= A(AMA^T) + (AMA^T)A^T, \\
&\downarrow \text{ on arrange les termes} \\
&= A(\underbrace{AM + MA^T})A^T, \\
&\downarrow \text{ on reconnaît la définition de } \phi \\
&= \underbrace{A(\phi(M))A^T}, \\
&\downarrow \text{ on reconnaît la définition de } \psi \\
\phi \circ \psi(M) &= \psi \circ \phi(M),
\end{aligned}$$

3. On suppose maintenant que A possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2. On notera également $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ les vecteurs propres associés.

On considère enfin la matrice $B = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T$.

(a) Montrer ou justifier que la matrice B vérifie les propriétés suivantes

i. B est anti-symétriques,

Il faut vérifier que $B^T = -B$, or $B^T = \left(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T\right)^T = \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T = -B$

ii. B n'est pas la matrice nulle[5],

Supposons que B soit la matrice nulle, cela voudrait dire que :

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T = \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T.$$

Or les deux vecteurs propres sont non nulles, en particulier, il existe un indice $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{2,i}$ est différent de 0. On considère alors la colonne i de la matrice B, elle est donnée par

5. on utilisera le fait que $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils sont ne sont donc pas colinéaires.

$$x_{2,i}\mathbf{x}_1 - x_{1,i}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}_1 = \frac{x_{1,i}}{x_{2,i}}\mathbf{x}_2.$$

Cette dernière relation montre que les deux vecteurs sont colinéaires, ce qui est contradictoire avec le fait que ces deux vecteurs sont associés à des valeurs propres distinctes !

La matrice B n'est donc pas nulle.

iii. $AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B$,

Il suffit de faire le calcul

$$\begin{aligned} AB + BA^T &= A(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T) - \left(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T\right) A^T, \\ &\quad \downarrow \ \mathbf{x}_1 \text{ est un vecteur propre de A} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T - \underbrace{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T A^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T A^T}, \\ &\quad \downarrow \ \text{on utilise une propriété de la transposée} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T - \underbrace{\mathbf{x}_1\left(A\mathbf{x}_2\right)^T - \mathbf{x}_2\left(A\mathbf{x}_1\right)^T}, \\ &\quad \downarrow \ A \text{ admet } \mathbf{x}_1 \text{ et } \mathbf{x}_2 \text{ comme vecteurs propres} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T - \lambda_2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \lambda_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T, \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T), \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)B. \end{aligned}$$

iv. $ABA^T = (\lambda_1\lambda_2)B$.

A nouveau, nous allons simplement faire les calculs

$$\begin{aligned} ABA^T &= A(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T)A^T, \\ &\quad \downarrow \ \text{on développe} \\ &= A\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T A^T - A\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T A^T, \\ &\quad \downarrow \ \text{on utilise les propriétés de la transposition} \\ &= A\mathbf{x}_1\left(A\mathbf{x}_2\right)^T - A\mathbf{x}_2\left(A\mathbf{x}_1\right)^T, \\ &\quad \downarrow \ \text{on utilise le fait que } \mathbf{x}_1 \text{ et } \mathbf{x}_2 \text{ sont des vecteurs propres} \\ &= \lambda_1\lambda_2(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^T), \\ &= \lambda_1\lambda_2 B. \end{aligned}$$

(b) En déduire que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = \mathbf{0}$.

Comme précédemment, on déroule les calculs en se servant des hypothèses

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B &= AAB - (\lambda_1 + \lambda_2)AB - \lambda_1\lambda_2 B, \\ &= AAB - A(AB + BA^T) - ABA^T; \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(c) Dans cette question, suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B = \mathbf{0}$.

i. En considérant que la matrice B est formée des vecteurs colonnes $\mathbf{b}_i$, *i.e.* $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$ montrer que les $\mathbf{b}_i$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_2.

Notons que l'on peut écrire $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$, on peut alors effectuer le produit $(A - \lambda_2 I_n)B$ colonne par colonne, ce qui nous donne

$$(A-\lambda_2 I_n)B = \mathbf{0} \iff (A-\lambda_2 I_n) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff \forall i \in [\![1, n]\!] (A-\lambda_2 I_n)\mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

Cette dernière égalité se traduit par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad A\mathbf{b}_i = \lambda_2 \mathbf{b}_i.$$

ii. En utilisant les propriétés de B vues plus tôt, en déduire qu'au moins un vecteur propre de A est *sparse*.

On a vu que B était anti-symétrique (et non nulle !), cela signifie qu'au moins une colonne de B, disons $\mathbf{b}_i$ est non nulle et admet un 0 comme coordonnée. Or $\mathbf{b}_i$ est un vecteur propre de A, d'où ce qu'il fallait démontrer.

(d) Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B \neq \mathbf{0}$. En utilisant la question 3.b) et ce qui précède, montrer que A admet un vecteur *sparse*.

On peut procéder comme à la question précédente, on sait que les colonnes non nulles de la matrice $(A - \lambda_2 I_n)B$ sont des vecteurs propres non nuls de A associés à la valeur propre λ_1. On peut écrire

$$(A - \lambda_2 I_n)B = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}.$$

En outre, le vecteur $\mathbf{c}_j$, que l'on supposera non nul (il en existe au moins 1 vu que $(A - \lambda_2 I_n)B$ est non nulle) s'obtient en calculant

$$\mathbf{c}_j = (A - \lambda_2 I_n)\mathbf{b}_j.$$

Ainsi $\mathbf{c}_j$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_1 et $\mathbf{c}_j \in \mathscr{N}$ en utilisant la deuxième caractérisation vu que $\mathbf{b}_j$ est un vecteur *sparse*.

On pourrait enfin montrer qu'il existe un vecteur *sparse* lorsque la matrice A ne possède qu'une seule valeur propre λ. En revanche cela nécessite de travailler avec des matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.