Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Fiche de TD
Licence 2 MIASHS (2021-2022)

Guillaume Metzler
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Les exercices proposés dans cette fiche constituent une bonne base d'entraînement pour mettre en application les différentes notions vues en cours. Les exercices sont essentiellement triés par thème mais il n'est pas impossible qu'il faille avoir recours à des notions vues ultérieurement afin de pouvoir le traiter.

Les exercices proposés sont également séparés en deux catégories, une partie dite "Applications" constituée des exercices simples que vous devez savoir faire dans le cadre de ce cours. D'autres exercices sont proposés dans une partie "*Pour aller plus loin*". Ces exercices là présentent des difficultés supplémentaires : parfois plus complexes en terme de calculs, plus théoriques ou nécessitent de faire des démonstrations en revenant aux définitions donnés dans le cours. Bien que je ne demande pas, dans le cadre de ce cours, à ce que vous sachiez résoudre ce type d'exercices, ils restent très formateurs.

En cas de problème dans la résolution de ces exercices, vous pouvez toujours me solliciter par mail.

Tous les exercices ne pourront pas être traités en TD, il est donc important que vous vous entraîniez chez vous pour maîtriser ces notions et que vous refassiez les exercices traités en cours.

1 Espaces vectoriels et Applications linéaires

1.1 Applications du cours

Exercice 1.1. *Soit E un ensemble, typiquement $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une loi interne, notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$ définies pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad et \quad \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2) = (0, \lambda x_2).$$

L'ensemble $(E, +, \cdot)$ a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1.2. *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré n, i.e. si P est un élément de E, alors il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$ tels que*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

L'ensemble E muni des lois internes et externes, respectivement définies, pour tout $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$P(X) + Q(X) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k \quad et \quad \lambda \cdot P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$$

a-t-il une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Sans chercher à justifier votre réponse, quelle est une base de cet espace vectoriel et quelle est sa dimension ?

Exercice 1.3. *Montrer que la famille de vecteurs $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ et $\mathbf{v}_2 = (2, 0)$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 1.4. *Montrer que la famille de vecteurs $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ et $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 2)$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 1.5. *Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une base de l'espace $\mathbb{R}^3$ où*

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 5, 2) \quad et \quad \mathbf{v}_3 = (-2, -2, 1).$$

Exercice 1.6. *On considère une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définies par*

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0), \; \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1) \quad et \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0 - 1, -2).$$

Cette famille est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Compléter cette famille en une base de l'espace $\mathbb{R}^4$.

Exercice 1.7. *Montrer que le noyau d'une application linéaire ϕ de E forme un sous-espace de E, i.e.*

$$Ker(\phi) = \{\mathbf{x} \in E : \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

muni des lois internes et externes de E (addition et multiplication) est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1.8. *On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E.*

Montrer que les ensembles P et I, munis des structures induites par celle de E sont des sous-espaces vectoriels de E. Que peut-on dire de l'intersection de ces deux sous-espaces.

Exercice 1.9. *Montrer que l'application* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\phi(x_1, x_2) = (3x_1 + 6x_2, -2x_1)$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*. Est-ce que cette application est injective ? Est-elle surjective ?*

Exercice 1.10. *On considère l'application* $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$*, i.e. une application de l'espace des polynômes dans l'espace des polynômes (de degré quelconque), définie par*

$$\phi(P(X)) = XP(X).$$

Montrer que cette application définie un endormorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{K}[X]$*.*

Exercice 1.11. *On considère l'application* $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$*, i.e. une application de l'espace des polynômes dans l'espace des polynômes (de degré quelconque), définie par*

$$\phi(P(X)) = P'(X),$$

où $P'(X)$ *désigne le polynôme dérivé. Montrer que cette application définie un endormorphisme surjectif mais non injectif de* $\mathbb{K}[X]$*.*

Exercice 1.12. *On considère l'application* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\phi(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 8x_1 + 2x_3).$$

Déterminer le noyau de l'application linéaire ϕ*. Quelle est sa dimension ?*

Exercice 1.13. *Déterminer une base du noyau de l'application linéaire* ϕ *dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.14. *Déterminer une base de l'image de l'application linéaire* ϕ *dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.15. *On considère l'application* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3).$$

Déterminer le noyau de cette application. Peut-on dire que ϕ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 1.16. *Considérons une application linéaire* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3).$$

Supposons que $\mathbb{R}^2$ *est muni de sa base canonique* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *et* $\mathbb{R}^3$ *de sa base canonique* $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$*.*

1. *Déterminer la représentation matricielle de l'application* ϕ*.*
2. *Déterminer l'image du vecteur* $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3$ *avec **et** sans l'aide de la représentation matricielle.*

1.2 Pour aller plus loin

Exercice 1.17 (Images et Noyaux)**.** *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les équivalence suivantes sont vraies*[1] *:*

1. $Ker(f^2) = Ker(f) \iff Ker(f) \cap Im(f) = \{\mathbf{0}\}$.
2. $Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f) + Im(f) = E$.

Exercice 1.18 (Images et noyaux en dimension finie)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer les équivalences suivantes*

$$Ker(f) \oplus Im(f) = E \iff Im(f^2) = Im(f) \iff Ker(f) = Ker(f^2)$$

Exercice 1.19 (Homothéties)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. On appelle homothétie, une application linéaire h_a de la forme*

$$\begin{aligned} h_a : \quad & E \to E, \\ & \mathbf{x} \mapsto a\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où a est un nombre réel.

1. *Soit f un endomorphisme de E. Supposons que, quelque soit $\mathbf{x} \in E$, il existe $a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$f(\mathbf{x}) = a_{\mathbf{x}}\mathbf{x}.$$

   (a) *Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ deux vecteurs linéairement indépendants. Montrer que $a_{\mathbf{x}} = a_{\mathbf{y}}$. On pourra chercher à calculer $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ de deux façons différentes.*

   (b) *Montrer que f est une homothétie.*

2. *On appelle centre de $\mathscr{L}(E)$ (i.e. centre de l'ensemble des endomorphismes de E) l'ensemble des éléments $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant*

$$\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f,$$

   i.e. il s'agit des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres.

   (a) *Soit $\mathbf{x} \in E$. Montrer qu'il existe un projecteur $p_{\mathbf{x}}$ de E dont l'image est égale à $Vect(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \rangle$.*

   (b) *Déterminer le centre de $\mathscr{L}(E)$.*

1. Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, il nous faut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

2 Matrices, changements de bases, et équations linéaires

2.1 Applications du cours

Exercice 2.1. *Déterminer le rang des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.2. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}$$

Calculer son déterminant et déterminer à quelle(s) condition(s) la matrice A est inversible.

Exercice 2.3. *Déterminer l'inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.4. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{pmatrix}$$

Calculer leur déterminant et déterminer à quelle(s) condition(s) les matrices A et B sont inversibles.

Exercice 2.5. *On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle inversible ? Déterminer son inverse.*
2. *Déterminer une matrice N telle que $A = (I_3 + N)$.*
3. *Calculer N^2 et N^3. Que remarquez vous ?*
4. *Exprimer A^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.*
5. *En déduire l'expression de A^p pour tout entier $p > 0$ [2].*

Exercice 2.6. *Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ et $\mathbf{e}'_3$ définis par*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

1. *Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.*

2. On utilisera le fait que les matrices I_3 et N commutent et la formule du binôme

2. *Montrer que* $\mathscr{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer la matrice de passage de* $\mathscr{B}'$ *vers la base* $\mathscr{B}$.
4. *Soit* ϕ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la représentation matricielle* A *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *est donnée par*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice de ϕ *dans la base* $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$.

Exercice 2.7. *Soit* u *un endomorphisme de* $E = \mathbb{R}^3$ *dont la matrice, relativement à la base canonique, est donnée par :*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le noyau et l'image de* u.
2. *Montrer que* $Ker(u) + Im(u) = E$.
3. *Déterminer une base* $\mathscr{B}'$ *de* $\mathbb{R}^3$ *adaptée à la somme directe* $Ker(u) + Im(u) = E$.
4. *Déterminer la matrice de l'endomorphisme de* u *relativment à la base* $\mathscr{B}'$.
5. *Quelle la nature de* u *?*

Exercice 2.8. *On se place dans l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$, *on note* $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *sa base canonique. Soit* u *un endomorphisme de* E *dont la représentation matricielle dans la base* $\mathscr{B}$, *notée* A, *est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ *et* $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ *une base de* E.
2. *Déterminer* $u(\mathbf{f}_1), u(\mathbf{f}_2)$ *et* $u(\mathbf{f}_3)$ *et en déduire une représentation matricielle de* A *dans cette nouvelle base* $\mathscr{B}'$. *Elle sera appelée* D *dans la suite.*
3. *Calculer* D^n *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. *Calculer* A^n *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^\star$ *en fonction de la matrice* A^n.

Exercice 2.9 (Projection et symétrie)**.** *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Soient les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}_1 = (1,1,2) \quad \mathbf{b}_2 = (-2,-1,3) \quad et \quad \mathbf{b}_3 = (0,-3,-1).$$

   Notons alors E *l'espace engendré par les vecteurs* $\mathbf{b}_1$ *et* $\mathbf{b}_2$ *et* F *l'espace engendré par le vecteur* $\mathbf{b}_3$.

   (a) *Montrer que la famille* $\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Que peut-on dire des espaces* E *et* F.
   (b) *Soit* p *la projection sur* E *parallèlement à* F. *Calculer la matrice* M *de* p *dans la base* $\mathscr{B}$.
   (c) *Notons* $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Calculer la matrice* N *de* p *dans la base* $\mathcal{E}$.

(d) *Calculer la matrice P de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathscr{B}$.*
Quelle relation existe-t-il entre les matrices M, N et P.

2. *Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$*

$$\mathbf{c}_1 = (1, -1, -3) \quad \mathbf{c}_2 = (1, 0, 3) \quad \textit{et} \quad \mathbf{c}_3 = (2, -1, 1).$$

Notons alors G l'espace engendré par le vecteur $\mathbf{c}_1$ et F l'espace engendré par les vecteurs $\mathbf{c}_2$ et $\mathbf{c}_3$.

(a) *Montrer que la famille $\mathscr{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
Que peut-on dire des espaces G et H.

(b) *Soit s la symétrie par rapport à G parallèlement à H. Calculer la matrice S de s dans la base $\mathscr{C}$.*

(c) *Notons $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice Q de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathscr{C}$ ainsi que son inverse.*

(d) *En utilisant la question précédente, calculer la matrice T de s dans la base $\mathcal{E}$.*

2.2 Pour aller plus loin

Exercice 2.10 (Déterminant de Vandermonde). *Soit* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On commencera par calculer ce déterminant pour $n = 2$ *et* $n = 3$ *et on procédera par récurrence.*

Exercice 2.11 (Système linéaire). *Résoudre le système* (S) *suivant en discutant selon les valeurs du réel* m

$$(S) : \begin{cases} (1-m)x + (2m+1)y + (2m+2)z & = & m \\ mx + my & = & 2m+2 \\ 2x + (m+1)y + (m-1)z & = & m^2 - 2m + 9 \end{cases},$$

Exercice 2.12 (Rang de la comatrice). *Soit* n *un entier supérieur ou égal à* 3. *Pour toute matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *on note* $Com(A)$ *la comatrice de* A, *dont les coefficients sont les cofacteurs de* A.

Déterminer le rang de $Com(A)$ *en fonction du rang de* A, *qu'on note* $rg(A)$.

Exercice 2.13 (Matrices triangulaires par blocs et inversion). *L'objectif de cet exercice est d'établir un résultat pour une matrice par blocs.*

1. *Soient* A, B, C *et* D *des matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et considérons la matrice* M *triangulaire supérieure par blocs de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $det(M) = det(A)det(D)$.
   Indication : on pourra commencer par montrer que $det(M) = det(A)det(D)$ *en considérant la décomposition suivante :*

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

2. *On suppose maintenant que les matrices* C *et* D *commutent et que* D *est inversible. Montrer que l'on a*

$$det(N) = \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = det(DA - CB).$$

   Indication : on cherchera multiplier N *par une certaine matrice de sorte à ce que le produit des deux donne la matrice* $\begin{pmatrix} A - CD^{-1}B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

3 Réduction des endomorphismes

3.1 Applications du cours

Exercice 3.1. *Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de u.*
2. *Déterminer ses valeurs propres (sachant que 2 est racine du polynôme caractéristique)*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3.2. *Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser la matrice A et déterminer la matrice de passage P permettant de passer de la matrice A à sa version diagonale. A nouveau, on remarquera que 2 est une valeur propre de la matrice A.

Exercice 3.3. *Considérons un endomorphisme u dont la représentation matricielle A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les puissances de la matrice $A - I_3$*
2. *Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_k = Ker((u - \lambda Id)^k)$.*
   (a) *Montrer que $dim(E_k) = k$. Pour cela on utilisera le fait que si f et g sont deux endormorphismes, alors $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ et on pensera au théorème du rang qui fait le lien entre le rang et la dimension du noyau. Aucun calcul n'est nécessaire.*
   (b) *En déduire une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de E_3 telle que $(\mathbf{e}_1)$ est une base de E_1 et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est une base de E_2.*
3. *En déduire l'expression de la matrice de passage P formée par les trois vecteurs précédents. Peut-on dire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale ?*
   Pour rappel, deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exercice 3.4. *Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

est elle diagonalisable ?

Exercice 3.5. *On considère la matrice A suivante*

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 2 \\ 0 & \gamma & 3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où γ est la Constante d'Euler-Mascheroni[3]*. Expliquez, sans calculs, pourquoi cette matrice n'est pas diagonalisable.*

Exercice 3.6. *On considère la matrice réelle A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle inversible ?*
2. *Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.*
3. *Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $A^n = PD^nP^{-1}$.*
4. *En déduire une expression de A^n.*

Exercice 3.7. *On considère l'endomorphisme u de rang 1 dont la représentation matricielle est donnée par*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de cette matrice est $(-\lambda)^{n-1}(tr(u) - \lambda)$.

3. C'est une constante qui apparaît naturellement lorsque l'on étudie la *Série Harmonique* et on a $\gamma \simeq 0.577$.

3.2 Pour aller plus loin

Exercice 3.8 (Matrice compagnon)**.** *Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u dont la représentation matricielle*[4] *est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Indication : on transformera la première ligne à l'aide d'une transformation de la forme $L_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda) L_i$ pour un bon choix de P_i. L'idée est de faire apparaître des 0 sur les $n-1$ premières entrées de la matrice

Exercice 3.9. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geq 1$ et soit u un endomorphisme de E qui commute avec tous les projecteurs de E.*

1. *Montrer que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u*
2. *Montrer que u est une homothétie*[5]

Exercice 3.10 (Diagonalisation par blocs)**.** *Soient A, C et D trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons la matrice M triangulaire supérieure par blocs de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que le spectre de M est l'union des spectres des matrices A et D.

Indication : on pourra commencer par montrer que $det(M) = det(A)det(D)$ en considérant la décomposition suivante :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

4. une telle matrice est appelée *matrice compagnon*
5. Une homothétie est une application linéaire u de la forme $u(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ pour un réel λ fixé pour tout vecteur $\mathbf{x}$.

4 Espaces Euclidiens et formes bilinéaires et quadratiques

4.1 Applications du cours

Exercice 4.1. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Est-ce que l'application f définie un produit scalaire ?

Exercice 4.2. *Soit A une matrice symétrique réelle de taille n, associée à un endomorphisme f, qui possède n valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, et notons $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres associés, on supposera que ces vecteurs ont une norme égale à 1.*

1. *Montrer que les sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux, i.e. montrer que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux*[6]*.*

2. *Montrer que la matrice V dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A (que vérifie*

$$V^{-1} = V^T.$$

3. *En déduire, que dans une base adaptée, la forme quadratique associée au produit scalaire défini par la matrice A peut s'écrire comme la somme de monômes au carré (i.e. sous la forme $\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2$).*

Exercice 4.3. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - 2x_2 + 5x_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - 2y_2 + 5y_3\right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 2x_3y_3.$$

Est-ce que l'application f définie un produit scalaire ?

Exercice 4.4. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 3u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 - u_2v_1 - u_1v_2 - u_3v_2 - u_2v_3.$$

1. *Montrer que f est un produit scalaire.*
2. *Soit P la matrice de passage de la base canonique $(\mathbf{e}_i)$ vers une base $(\mathbf{e}'_i)$ définie par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Déterminer la matrice du produit scalaire associée à l'application f dans la base canonique $(\mathbf{e}_i)$. On notera S cette matrice.*

   (b) *Déterminer la matrice S' de ce même produit scalaire mais dans la base $(\mathbf{e}'_i)$.*

6. On peut étendre ce résultat et montrer que, sans hypothèses sur le caractère distinct des valeurs propres, une matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont des nombres réels. Pour construire cette base orthogonale (ou orthonormale), on montrera que les espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux et au sein d'un espace propre, on peut toujours construire une base orthognale (Gram-Schmidt).

3. *On considère les vecteurs* $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ *et* $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ *dans la base* $(\mathbf{e}'_i)$*. Déterminer le produit scalaire de ces deux vecteurs et conclure.*

Exercice 4.5. *Soient* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ *et* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique et considérons l'espace vectoriel* F *engendré par les vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*.*

1. *Quelle est la dimension de* F *?*
2. *Déterminer la matrice de projection orthogonale* P *sur* F*.*
3. *Soit* $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$*.*
   (a) *Après avoir calculer les produits scalaires des vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *avec le vecteur* $\mathbf{w}$*, dire à quel espace appartient le vecteur* $\mathbf{w}$*.*
   (b) *Que peut-on dire du produit* $P\mathbf{w}$ *?*

4.2 Pour aller plus loin

Exercice 4.6 (Cauchy-Schwarz pour les formes blinéaires)**.** *Soit ϕ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel E et soit q sa forme quadratique associée.*

1. *Montrer l'identité de Cauchy*

$$q(q(\mathbf{u})\mathbf{v} - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{u}) = q(\mathbf{u})[q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u})].$$

2. *En déduire, si q est définie positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \le q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}).$$

Exercice 4.7 (Etude d'une forme quadratique)**.** *On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'application

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

en posant, pour tous $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\phi(M,N) = tr(MJN).$$

1. *Montrer que ϕ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?*
2. *Montrer que $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.*
3. *Déterminer la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathscr{B}$. La forme quadratique q est définie, pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $q(M) = \phi(M,M)$. Pour cela, on prendra $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calculera $q(M)$.*
4. *Ecrire la forme quadratique q comme une somme de carrés, i.e. on ne doit plus voir apparaître de termes rectangles.*
5. *Est-elle définie ? Positive ? Négative ?*
6. *En déduire le rang et le noyau de cette forme quadratique.*
7. *Déterminer la forme polaire associée à q.*
8. *On considère maintenant un sous-espace de E défini par*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\}.$$

Déterminer $F^\perp$ l'espace orthogonal à F.

5 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1 (Endomorphismes commutants et diagonalisation)**.** *On se donne deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (avec n entier naturel non nul) et on se propose de montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$.*

1. *Condition suffisante*
   On suppose dans cette question que $MA = BM$ pour une certaine $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle.
   (a) *Montrer, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, que $MP(A) = P(B)M$.*
   (b) *En déduire que A et B ont une valeur propre commune*[7]*.*
2. *Condition nécessaire*
   On suppose dans cette question que A et B ont une valeur propre commune λ.
   (a) *Montrer que $Sp(A^T) = Sp(A)$ (c'est-à-dire que A^T et A ont mêmes valeurs propres). Ainsi, il existe $X \in \mathbb{C}^n$ et $Y \in \mathbb{C}^n$ non nulles telles que $A^T X = \lambda X$ et $BY = \lambda Y$.*
   (b) *À l'aide de X et de Y, construire M non nulle telle que $MA = BM$.*

Exercice 5.2 (Probabilités et diagonalisation)**.** *Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.*

1. *Montrer que $\mathbb{P}[X = Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = k]$.*

   On suppose à partir de maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[Y = k] = p(1-p)^k$. Enfin, on considère la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

2. *Calculer la probabilité que A soit inversible.*
3. *En déduite la probabilité que la matrice ne soit pas inversible.*
4. *Préciser la loi de la variable aléatoire $rg(A)$ (qui donne le rang de la matrice A) ainsi que son espérance.*
5. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la matrice*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

   soit diagonalisable
6. *Déterminer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.*
   Indication : on utilisera le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = k] = pe^{-\lambda}\left(e^{\lambda(1-p)} - 1\right)$.

Exercice 5.3 (Diagonalisation ? (sans calcul de déterminant))**.** *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Déterminer la dimension du noyau de la matrice A*
2. *Quel est le déterminant de A ? Préciser le rang de la matrice A.*

7. On pourra appliquer le résultat précédent avec P égal au polynôme caractéristique de A.

3. *Déterminer les valeurs propres de la matrice A.*
   Indication : on pourra effectuer les calculs suivants

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad et \quad A\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

   La matrice A est-elle diagonalisable ?

6 Exercices pour réviser

Exercice 6.1. *On considère la famille de vecteurs* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *définie par*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également un endomorphisme $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *dont la représentation matricielle est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1.6 & 3.2 & -0.2 \\ -7 & 4.6 & -9.2 & 2.2 \\ -7 & 3.8 & -7.6 & 1.6 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que la famille de vecteurs* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *forme une famille libre de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Donner la définition de* u *pour tout vecteur* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{R}^4$.
3. *L'endomorphisme* u *est-il injectif ?*
4. *Enoncer le théorème du rang. En déduire le rang de la matrice* A.
5. *Calculer l'image des vecteurs* $\mathbf{v}_1$ *et* $\mathbf{v}_2$ *suivants par l'endomorphisme* u

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad et \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Que peut-on dire concernant ces deux vecteurs ?
6. *Déterminer le spectre de la matrice* A. *Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés ?*
7. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
8. *En déduire le polynôme caractéristique de la matrice* A.
9. *Calculer l'image du vecteur* $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *par l'application* u.
10. *Est-ce que la famille de vecteurs* $\mathscr{B}' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ *constitue une base* $\mathbb{R}^4$ *?*
11. *On note* P *la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs de* $\mathscr{B}'$. *Déterminer* P^{-1}.
12. *Expliciter la forme de la matrice* $P^{-1}AP$.

Exercice 6.2. *On dit qu'une matrice* A *réelle symétrique est positive (respectivement définie positive) lorsque pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *on a* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ *(resp. pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *on a* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$*). Les ensembles correspondants sont notés* $S^+(\mathbb{R})$ *(resp.* $S^{++}(\mathbb{R})$*).*

1. *A quelle condition une matrice diagonale est-elle positive ? (resp définie positive ?)*
2. *Montrer qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).*
3. *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *est positive (resp. définie positive) si et seulement si* $a \geq 0$ *et* $ac - b^2 \geq 0$ *(resp.* $a > 0$ *et* $ac - b^2 > 0$*).*

4. *Soit A une matrice positive. Montrer qu'il existe une unique matrice carrée B posiitve telle que $B^2 = A$.*
5. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice B positive telle que $B^2 = A$.*
6. *Soit $A \in S^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$*
7. *Soit X une matrice de donnée et on note $C = X^T X$ la matrice de variance-covariance des données. Montrer que la matrice de variance-covariance est définie positive.*

Exercice 6.3. *On considère la matrice A donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle inversible ?*
2. *Déterminer une base de l'image et du noyau.*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
4. *Déterminer une base des sous-espaces propres.*
5. *On note $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ les vecteurs propres associés aux différents sous-espaces propres. Déterminer le projeté orthogonal des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sur le vecteur $\mathbf{v}_0$.*
6. *La famille de vecteurs $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ forme-t-elle une famille orthogonale ?*
7. *A partir de la famille $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ construire une base orthogonale $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.*

Exercice 6.4. *Soit un E un espace vectoriel et soient u et v deux endomorphismes de E qui vérifient $u \circ v = v \circ u$, i.e. deux endomorphismes qui commutent.*

1. *Montrer que $Ker(u)$, après avoir rappelé sa définition, est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Montrer que les espaces $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v.*
3. *Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v.*

Exercice 6.5. *Soit f une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, i.e. une application de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 dans lui même. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose*

$$f(P) = P - (X-2)P',$$

où $P(X) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k X^k$.

1. *Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de f*
3. *Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$*
4. *Montrer que $\mathscr{B}' = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*
5. *Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.*
6. *Donner la représentation matricielle de f dans la base $\mathscr{B}'$.*

Exercice 6.6.