Algèbre Linéaire et Analyse de Données

Examen 2022 - 2023, Durée : 2h00
Licence 2 MIASHS

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

L'usage de calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.

Résumé

Les différents exercices qui composent cet examen sont indépendants. La qualité de la rédaction ainsi que les justifications apportées pour répondre aux différentes questions seront en compte de l'évaluation de la copie.

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère un endomorphisme représentée par une matrice A et une matrice P respectivement définies par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ? On notera D la matrice diagonale associée
3. Déterminer une relation entre les matrices A, D et P.
4. En déduire la valeur de A^n pour tout entier n.
5. Exprimer A^3 en fonction de A^2 et A et en déduire que la matrice A n'est pas inversible.
6. Résoudre l'équation matricielle $N^3 = D$ en admettant que les solutions sont nécessairement des matrices diagonales.

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^4$, et on considère la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) définie par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) forme une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?
3. On pose $F = Vect(u_1, u_2)$ et $G = Vect(u_3, u_4)$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, yz, t) = (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0).$$

   (a) Montrer que f est une application linéaire
   (b) Déterminer le noyau de l'application f (on donnera une base du noyau) et montrer que $Ker(f) = G$.
   (c) Déterminer l'image de l'application f et vérifier que $Im(f) = F$.
   (d) Donner la représentation matricielle de l'application f. On notera A cette matrice.
   (e) Montrer que $A^2 = 2A$.
   (f) En déduire la nature de l'application $f/2$.
   (g) A l'aide du résultat précédent, en déduire la nature de l'application $g = f - Id$.

Exercice 3

1. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer un vecteur $\mathbf{v}_3$ tel que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forme une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$,*i.e.* déterminer l'expression de $q(\mathbf{x})$ et celle de $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où ϕ désigne la forme polaire associée.

(b) Déterminer l'espace orthogonal au vecteur $\mathbf{v}_1$ dans $\mathbb{R}^3$, *i.e.* l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $\mathbf{v}_1$.

2. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$$

(a) Montrer que l'application ϕ définit un produit scalaire.

(b) Déterminer la forme quadratique associée et la matrice associée à l'application ϕ.

(c) La forme quadratique est-elle définie positive ?

Exercice 4

On considère un jeu de données dont la matrice est donnée comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -3 \\ 10 & 4 & 5 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, chaque ligne de cette matrice représente un individu et chaque colonne représente une variable (*i.e.* une information) qui permet de d'écrire les individus.

1. Quel est le nombre d'individus et de variables dans ce jeu de données ?
2. Déterminer l'individu moyen, *i.e.* le barycentre du nuage de points associé.
3. Quelles sont les étapes de préparation du jeu de données qui sont essentielles à la réalisation d'une ACP ?
4. Expliquez avec vos mots le principe de l'ACP.
5. Quelle matrice serez vous amenés à analyser si vous souhaitez étudier le nuage de points des individus ? De même si vous souhaitez analyser le nuage des variables ?