Analyse I

Examen - 1ère Partie
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h00

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'une suite

L'objectif de cet exercice est d'étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que pour tout $n > 0$

$$(n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n = f(n), \tag{1}$$

où f est une fonction définie pour tout entier n non nul et $u_1 \in \mathbb{R}$.

Les suites considérées dans cet exercice seront toutes définies dans sur $\mathbb{N}^\star$ mais nous étudierons uniquement un exemple dans le cas où $f(n) = 2n+1$

1. On suppose, dans cette question que $u_1 = 1$.
   (a) Calculer la valeur de u_2 et u_3 en utilisant la définition de f et la relation (1).
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante dont on précisera la valeur.

2. On suppose maintenant que $u_1 > 1$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n et de u_n.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n > 1$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge. Que peut-on dire de sa limite (on ne cherchera pas à la calculer explicitement).
   (e) Montrer, par récurrence, que pour tout entier $n > 0$, nous avons
   $$0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{n^2}(u_1 - 1).$$
   (f) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

3. On suppose toujours que $u_1 > 1$ et on se propose de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'une autre façon.
   (a) On pose $v_n = n^2 u_n$. Déterminer une relation entre v_{n+1}, v_n et n.
   (b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a $v_n = n^2 - 1 + u_1$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 2 : Etude des fonctions hyperboliques

On considère la fonction th définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Dans cet exercice, on cherchera à étudier cette fonction et montrer quelques relations sur cette dernière.

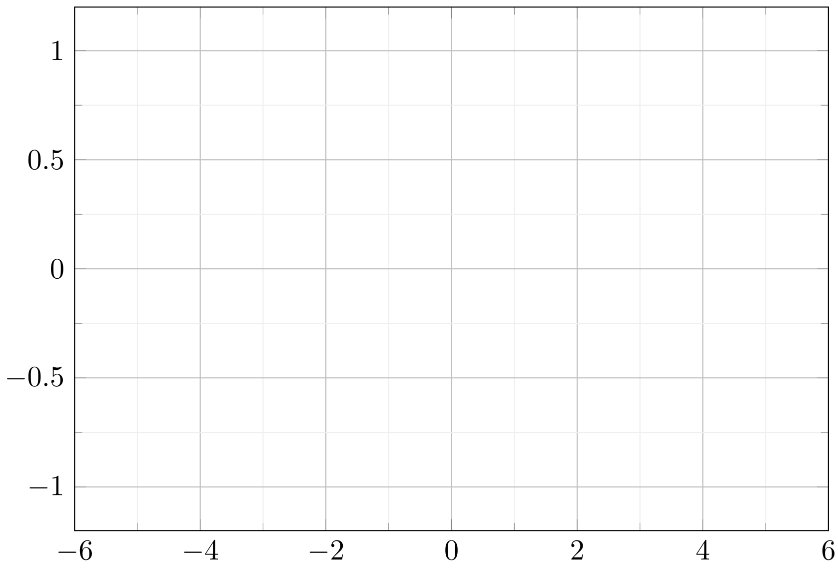
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction th ainsi que l'ensemble sur lequel elle est dérivable et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que pour tout réel x, nous avons

$$-1 \leq \mathrm{th}(x) \leq 1.$$

3. Montrer que, pour tout réel x, nous avons les relations suivantes

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

4. Etudier les limites de cette fonction en les bornes de son intervalle de définition et dresser le tableau de variation.
5. Représenter graphiquement cette fonction



6. Montrer que la fonction th est bijective. On notera argth sa fonction réciproque.
7. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, nous avons

$$\mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Indication : pour tout $x \in]-1, 1[$, on posera $x = \mathrm{th}(y)$, on cherchera alors à exprimer y en fonction x