Analyse I

Examen - 1ère Partie
Licence 1 Informatique (2023-2024)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h15

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de trois exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les trois exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction sera grandement prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}.$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une site géométrique de raison $\dfrac{-3}{5}$.

   On va chercher à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2}, \\ &= \frac{\dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2}{\dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} + 2}, \\ &= \frac{-3(u_n - 2)}{5(u_n + 2)}, \\ &= \frac{-3}{5} v_n. \end{aligned}$$

2. Exprimer v_n en fonction de n.
   D'après la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-3/5$ et de premier terme $v_1 = -1/3$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{-1}{3}\left(\frac{-3}{5}\right)^n.$$

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   On utilise maintenant le lien entre u_n et v_n et on cherche à exprimer u_n en fonction de u_n. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} &\iff v_n(u_n + 2) = u_n - 2, \\ &\iff u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n, \\ &\iff u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}. \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n} = \frac{2 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-3}{5}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-3}{5}\right)^n}.$$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

   Comme $-1 < \dfrac{-3}{5} < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est ici égale à 2.

Exercice 2 : Encore une suite

On considère u_0, a et b trois réels. On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a = 1$? De même lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$?

   Lorsque $a = 1$, nous avons la relation de récurrence

   $$u_{n+1} = u_n + b.$$

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b et de premier terme u_0.

   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$, nous avons la relation de récurrence

   $$u_{n+1} = au_n.$$

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme u_0.

2. Exprimer u_n dans les deux cas particuliers de la question précédente.

   Lorsque $a = 1$, nous avons

   $$u_n = u_0 + nb.$$

   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$, nous avons

   $$u_n = u_0 a^n.$$

3. Dans le cas général, calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_3.

   On va simplement appliquer la relation de récurrence. Ce qui nous donne

   $$u_1 = au_0 + b,$$
   $$u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + ab + b,$$
   $$u_3 = au_2 + b = a(a^2u_0 + ab + b) + b = a^3u_0 + a^2b + ab + b.$$

4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

   $$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}.$$

   Notons R_n la relation : "*pour tout entier naturel n :* $u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}$".

Initilisation : le relation est vraie au rang $n = 0$ et au rang $n = 1$, par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n tel que R_n soit vraie et montrons que la relation reste vraie au rang $n+1$.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= au_n + b, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise l'hypothèse de récurrence} \\
&= a\left(a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\right) + b, \\
&= a^{n+1}u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} + b, \\
&\quad \downarrow \text{ en remarquant que } b = ba^{n+1-(n+1)} \\
&= a^{n+1}u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} + ba^{n+1-(n+1)}, \\
&\quad \downarrow \text{ on factorise par } b \\
&= a^{n+1}u_0 + b\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} + a^{n+1-(n+1)}\right), \\
&\quad \downarrow \text{ on rentre cela dans la somme} \\
u_{n+1} &= a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

La relation R_n est donc vraie pour tout entier n.

5. En déduire que pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a-1}.$$

On utilise notre connaissance sur la somme des termes d'une suite géométrique pour ré-exprimer notre somme. Ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
u_n &= a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}, \\
&= a^n u_0 - ba^n + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}, \\
&= a^n(-b + u_0) + b\frac{a^{n+1} - 1}{a-1}, \\
&\quad \downarrow \text{ on réduit au même dénominateur} \\
&= \frac{(a-1)a^n(u_0 - b) + b(a^{n+1} - 1)}{a-1}, \\
&\quad \downarrow \text{ on développe et on factorise} \\
&= \frac{a^n(au_0 - ab - u_0 + b) + b(a^{n+1} - 1)}{a-1},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} & \qquad \downarrow \text{ par défintion } u_1 = au_0 + b \\ &= \frac{a^n(u_1 - u_0 - ab + ab) - b}{a-1}, \\ u_n &= \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a-1}. \end{aligned}$$

6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $0 < a < 1$.

   Comme $0 < a < 1$, on $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. On en déduit donc que

   $$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

Exercice 3 : Etude d'une fonction hyperbolique

On considère la fonction ch définie par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Dans cet exercice, on cherchera à étudier cette fonction et montrer quelques relations sur cette dernière.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction ch ainsi que l'ensemble sur lequel elle est dérivable et déterminer sa dérivée.

   La fonction ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout réel x, nous avons

   $$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x).$$

   On va repasser par la définition des fonctions ch et sh et on partira du membre de droite.

   $$\begin{aligned} \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2; \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right), \\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{2x} + 2e^{-2x}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right), \\ &= \mathrm{ch}(2x). \end{aligned}$$

3. Montrer que, pour tout réel x, nous avons les relations suivantes

   $$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)},$$

   où th désigne la fonction *tangente hyperbolique*.

   On rappelle que pour tout réel x, on a

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

La fonction est également pour tout dérivable pour tout réel x et on a

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)},$$

où la dernière égalité vient du fait que pour tout réel x, nous avons

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

4. Etudier les limites de la fonction ch en les bornes de son intervalle de définition et dresser le tableau de variation.

   Nous avons les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

   On a donc

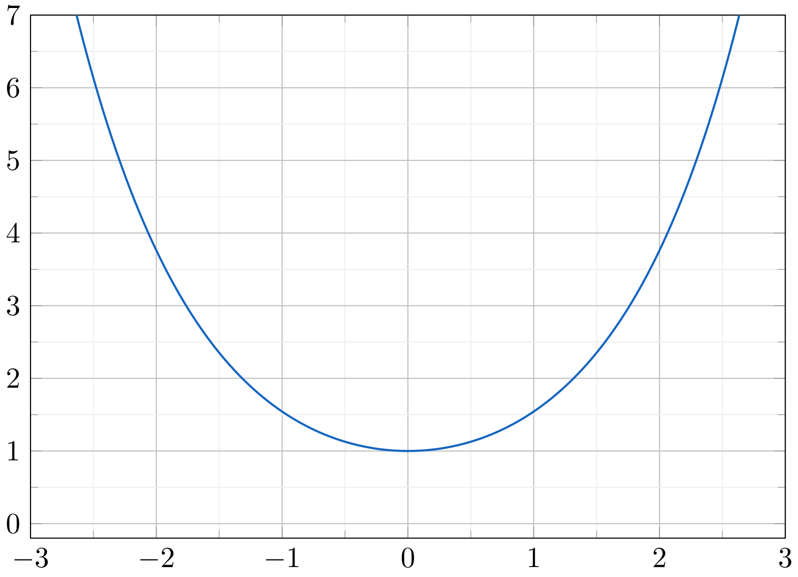
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.$$

   La dérivée de la fonction ch est la fonction sh qui est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.

   On peut ainsi dresser le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$-$	0	$+$	
th	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Représenter graphiquement cette fonction ch.



6. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $[1, +\infty[$. On notera argch la fonction réciproque.

   La fonction ch est strictement croissante sur de l'intervalle $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Ainsi, elle admet une fonction réciproque définie $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

7. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, nous avons

$$\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

   Indication : on utilisera un résultat sur la somme ch + sh *ainsi que le fait que* sh(argch(x)) *pour tout* $x \geq 1$.

   On va se contenter de suivre l'indication et on utilisera le fait que pour tout x, on a

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) = x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

   Or pour tout réel x, on a aussi $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = e^x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x)) + \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) = e^{\operatorname{argch}(x)} &\iff x + \sqrt{x^2 - 1} = e^{\operatorname{argch}(x)}, \\ &\iff \operatorname{argch}(x) = \ln(\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)). \end{aligned}$$

8. Déterminer la dérivée de la fonction argch après avoir donné l'intervalle sur lequel la fonction est dérivable.

   La fonction argch est dérivable pour tout réel $x > 1$ et la dérivée est donnée par

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$