Analyse I

Examen - 2ème partie
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 2h00

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Une étude de fonction

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{4x^2-1}$$

On se propose de mener une étude approfondie de cette fonction.

1. On commence par étudier ses variations et ses limites.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Etudier la fonction f et en dresser un tableau de variations complet (on pensera donc à étudier les limites).
   (c) A l'aide de la question précédente et en étudiant la parité de f, montrer que f ne peut ni être injective, ni surjective.
   (d) Donner deux ensembles A et B tels que la fonction f réalise une bijection de A dans B.
   (e) Déterminer, en fonction de la valeur de y, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$.
2. On commence par étudier quelques tangente
   (a) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f au point $x = 1$.
   (b) En déduire l'équation de la tangente à la fonction f au point $x = -1$.
3. On étudie enfin la convexité de la fonction f
   (a) Montrer que pour tout x appartenant à un intervalle que l'on précisera, la fonction f est deux fois dérivable et on a

   $$f''(x) = \frac{12(12x^2+1)}{(4x^2-1)^3}.$$

   (b) Etudier la convexité de la fonction f.

Exercice 2 : Une autre étude de fonction

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Donner le domaine définition de la fonction f.

   (b) Montrer que a fonction f est une fonction continue en 0.

   (c) Calculer f', après avoir précisé l'intervalle où elle est dérivable et dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

2. On définit désormais une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.

   Pour cette question, on pensera à utiliser les résultats de la question précédente.

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par e.

   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est égale à e. Pour cela, on notera que si l'on note l la limite de suite suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

   (d) Montrer que pour tout $x,\ f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

   (e) En déduire que sur l'intervalle $[e, +\infty[$ la fonction f est 1/4-lipschitzienne.

   (f) En déduire que pour tout n, nous avons

$$|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

3. On pose désormais

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$$

   (a) Déterminer une fonction h telle que $g'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2\ln^2(x)}h(x)$ et étudier les variations de la fonction g.

   (b) Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 1. (On utilisera le fait que, lorsque x tend vers 1^+, $\ln(x) \sim x - 1$).

   (c) En déduire que g admet un minimum en $x = 1$.

   (d) Montrer que pour tout $x \in]0,1[,\ f(x) \leq g(x)$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[,\ g(x) \leq f(x)$.

   (e) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$

   (f) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_2^e f(x) - g(x)\, dx.$$