Analyse I

Examen - 2ème partie
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 2h00

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Une étude de fonction

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{4x^2-1}$$

On se propose de mener une étude approfondie de cette fonction.

1. On commence par étudier ses variations et ses limites.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

   La fonction f est définie pour tout réel x tel que $4x^2 - 1 \neq 0$, *i.e.* pour tout réel x différent de $\pm\frac{1}{2}$.

   Ainsi l'ensemble de la définition de la fonction f est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

   (b) Etudier la fonction f et en dresser un tableau de variations complet (on pensera donc à étudier les limites).

   La fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ et, pour de tels réels x, la dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x(4x^2-1) - 8x(2x^2+1)}{(4x^2-1)^2}, \\ &= \frac{16x^3 - 4x - 16x^3 - 8x}{(4x^2-1)^2}, \\ &= -\frac{12x}{(4x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

   La dérivée de la fonction f s'annule en $x = 0$, elle est positive pour tout $x < 0$ et négative lorsque $x > 0$.

   Pour ce qui est des limites aux bornes

   - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$.
   - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$.
   - $\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = -\infty$.
   - $\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = +\infty$.

   On peut alors dresser la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
f	-0.5	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0.5

(c) A l'aide de la question précédente et en étudiant la parité de f, montrer que f ne peut ni être injective, ni surjective.

La fonction f n'est pas injective car elle est paire sur son intervalle de définition.
En outre, elle n'est pas surjective car elle n'admet aucun antécédent sur l'intervalle $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$.

(d) Donner deux ensembles A et B tels que la fonction f réalise une bijection de A dans B.

A l'aide du tableau de variation et en utilisant la parité de la fonction f, on peut affirmer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $A = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ dans l'intervalle $B =]-\infty, -1] \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

(e) Déterminer, en fonction de la valeur de y, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$.

Cette analyse se base à nouveau sur le tableau de variation de la fonction.

Lorsque $y \in]-\infty, -1] \cup \left]\frac{1}{2}\right[$, l'équation admet exactement deux solutions.
Lorsque $y = -1$, l'équation admet une seule et unique solution (qui est $x = 0$).
Enfin, l'équation n'admet pas de solutions lorsque $y \in \left]-1, \frac{1}{2}\right]$.

2. On commence par étudier quelques tangente.

On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point x_0 est donnée par :

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(a) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f au point $x = 1$.

On va simplement exploiter le relation précédente. On a $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = \frac{4}{3}$.
Ainsi, l'équation de la tangente est

$$\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}.$$

(b) En déduire l'équation de la tangente à la fonction f au point $x = -1$.

On va simplement exploiter le relation précédente. On a $f(1) = f(-1) = 1$ et $f'(1) = \frac{-4}{3}$. Ainsi, l'équation de la tangente est

$$-\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}.$$

3. On étudie enfin la convexité de la fonction f.

(a) Montrer que pour tout x appartenant à un intervalle que l'on précisera, la fonction f est deux fois dérivable et on a

$$f''(x) = \frac{12(12x^2+1)}{(4x^2-1)^3}.$$

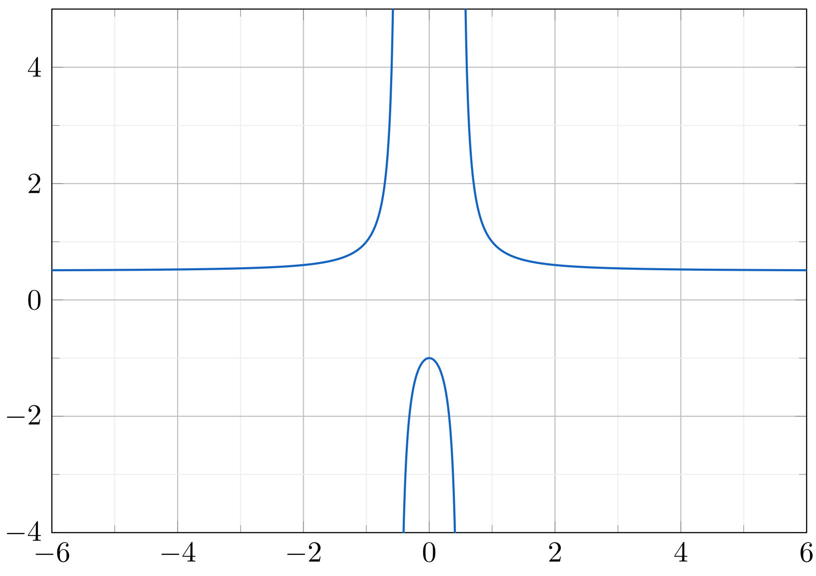
La fonction f est en fait de classe C^∞ sur son intervalle de définition. Ainsi

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-12(4x^2-1)^2 + 24x(8x)(4x^2-1)}{(4x^2-1)^4}, \\
&= \frac{-12(4x^2-1) + 192x^2}{(4x^2-1)^3}, \\
&= \frac{144x^2+12}{(4x^2-1)^3}, \\
&= \frac{12(12x^2+1)}{(4x^2-1)^3}.
\end{aligned}$$

(b) Etudier la convexité de la fonction f.

D'après l'expression obtenue précédemment, on remarque que le numérateur est toujours positif. En revanche, le dénominateur est positif pour tout réel x tels que $|x| > \frac{1}{2}$ et négatif dans le cas contraire.

Ainsi, la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et concave sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.



Exercice 2 : Une autre étude de fonction

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Donner le domaine définition de la fonction f.

   La fonction f est définie pour tout $x > 0$ tel que $\ln(x) \neq 0$, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

   (b) Montrer que a fonction f est une fonction continue en 0.

   Pour montrer que la fonction f est continue en 0, il faut ici vérifier que la limite de la fonction f est égale à $f(0)$ lorsque x vers 0.
   Or

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0.$$

   La fonction f est donc continue en 0.

   (c) Calculer f', après avoir précisé l'intervalle où elle est dérivable et dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

   La fonction f est définie sur $x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ mais elle est dérivable, a priori, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ et on a

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}.$$

   D'après cette expression, on remarque en fait que la fonction f est également dérivable en 0 car $\underset{x \to 0}{f'(x)} = 0$.

   De plus, la dérivée est positive pour tout $x \geq e$ et elle négative sur le reste de son intervalle de définition.
   On peut alors dresser le tableau de variation suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

2. On définit désormais une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.
   Pour cette question, on pensera à utiliser les résultats de la question précédente.

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par e.

La démonstration se fait par récurrence. Par hypothèse $u_0 = 3 \geq e$, ce qui permet d'initialiser notre récurrence.
Supposons maintenant que notre propriété est vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* $u_n \geq e$. Dans ce cas $u_{n+1} = f(u_n) \geq e$ car la fonction f est croissante sur $[e, +\infty[$ et $f(e) = e$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.

(b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On va étudier la différence entre deux termes consécutifs.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln(u_n)} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln(u_n))}{u_n} \leq 0,$$

car, d'après la question précédente $u_n \geq 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est égale à e. Pour cela, on notera que si l'on note l la limite de suite suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

La suite étant décroissante et minorée, elle est donc convergente. En suivant les indications, on trouve que la limite l vérifie l'équation :

$$l = \frac{l}{\ln(l)} \iff \ln(l) = 1 \iff l = e.$$

Donc la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale e, c'est un fait un point fixe de la fonction f.

(d) Montrer que pour tout x, $f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

Il s'agissait d'une question plus difficile ici, mais pour y répondre il faudra passer par l'étude de la dérivée seconde.

Cette dernière est donnée, pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$ par

$$f''(x) = \frac{1}{x\ln(x)}\left(\frac{2}{\ln(x)} - 1\right).$$

On peut alors dresser le tableau suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f'	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0.25	$\searrow$	0

L'étude du tableau de variation montre bien que pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, nous avons $f'(x) \leq 1/4$.

(e) En déduire que sur l'intervalle $[e, +\infty[$ la fonction f est 1/4-lipschitzienne.

Sur l'intervalle $[e, +\infty[$ la fonction f' est positive et atteint son maximum en $x = e^2$ et ce maximum est égal à $1/4$ d'après la question la question précédente.
On en déduit donc que la fonction f est 1/4-lipschitzienne sur cet intervalle.

(f) En déduire que pour tout n, nous avons

$$|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

Comme f est 1/4-lipschitzienne, par définition nous avons l'inégalité

$$|u_{n+1} - e| = |f(u_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|.$$

Une récurrence simple nous donnera alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

3. On pose désormais

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$$

(a) Déterminer une fonction h telle que $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ et étudier les variations de la fonction g.

On va simplement déterminer la dérivée de la fonction g pour tout les réels x pour lesquels elle est définie.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x(x\ln(x)) - (x^2 - 1)(\ln(x) + 1)}{x^2 \ln(x)^2}, \\ &\downarrow \text{ on développe} \\ &= \frac{2x^2 \ln(x) - x^2 \ln(x) + \ln(x) + 1 - x^2}{x^2 \ln(x)^2}, \end{aligned}$$

$$\downarrow \text{ on simplifie}$$

$$= \frac{x^2\ln(x) - \ln(x) + 1 - x^2}{x^2\ln(x)^2},$$

$$= \frac{(x^2+1)}{x^2\ln(x)^2}\left(\ln(x) + \frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

On a donc $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Pour étudier les variations de la fonction g, on note que le signe de la dérivée g' dépend du signe de h. On va donc étudier le signe de cette dernière.

Notons que la fonction h est définie et dérivable pour tout $x > 0$ et que

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x)^2(1-x)^2}{x(1+x^2)^2}.$$

Cette dernière est toujours positive sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction h est donc strictement croissante et $h(1) = 0$.
On en déduit le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	||	$+$	
g	||	$+\infty$ $\searrow$ 2	||	2 $\nearrow$ $+\infty$	

(b) Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 1. (On utilisera le fait que, lorsque x tend vers 1^+, $\ln(x) \sim x - 1$).

En utilisant cet équivalent, on remarque, qu'au voisinage de 1, la fonction g est équivalente à la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}.$$

Cette dernière admet pour limite 2 lorsque x tend vers 1. La fonction est donc prolongeable par continuité en $x = 1$.

(c) En déduire que g admet un minimum en $x = 1$.

Cela est une conséquence directe des deux questions précédentes.

(d) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \leq g(x)$ et que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $g(x) \leq f(x)$.

On a va étudier le signe de la différence $f - g$, ce qui nous donne :

$$f(x) - g(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x^2-1}{x\ln(x)} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

Cette dernière est donc positive pour tout $x > 1$ et est négative lorsque $x < 1$.

(e) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Un calcul direct nous montre que la dérivée est égale à $\dfrac{1}{x\ln(x)}$.

(f) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_2^e f(x) - g(x)\ dx.$$

Pour cela, on va mobiliser les résultats précédemment établis

$$\begin{aligned}
\int_2^e f(x) - g(x)\ dx &= \int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}\ dx, \\
&= [\ln(\ln(x))]_{x=2}^{x=e}, \\
&= \ln(\ln(e)) - \ln(\ln(2)), \\
&= -\ln(\ln(2)).
\end{aligned}$$