Analyse I

Examen - 2ème partie
Licence 1 Informatique (2023-2024)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 2h00

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de deux exercices qui reprennent le contenu des premières séances de cours.

Les deux exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Une première étude de fonctions

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+\ln(x)}$$

On se propose de mener une étude approfondie de cette fonction.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Déterminer la limite de la fonction f' lorsque x tend vers 0. Que peut-on alors en déduire concernant la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$?
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e, puis déterminer la position relative de la tangente T par rapport à $\mathcal{C}_f$.
6. Donner les allures de C_f et T (graphiquement).
7. Etudier la convexité de la fonction f.

Exercice 2 : Etude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution que l'on notera u_n. *Aide : On pourra déterminer la dérivée de la fonction f et évaluer la fonction f en 0.*
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \in]0,1[$.
   Aide : il faut voir dans la définition de f la somme des termes d'une suite géométrique.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa convergence.
   Aide : On utilisera la croissance de f_n.
4. Calculer la limite de cette suite. On pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.
5. En posant $v_n = u_n - \frac{1}{2}$, montrer que $\left(\frac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.

Exercice 3 : Pour finir

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Après avoir déterminé l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable, montrer que la dérivée f' peut s'écrire

$$f'(x) = \frac{1}{x^3(1+x)}\left(x - 2(1+x)\ln(1+x)\right).$$

3. Justifier que pour tout $x > 0$, la dérivée f' ne s'annule jamais.
4. On considère maintenant $-1 < x < 0$, et la fonction g définie pour tout $x \in]0,1[$ par

$$g(x) = x - 2(1+x)\ln(1+x).$$

(a) Dresser le tableau de variation de g

(b) Montrer que la fonction g s'annule au plus une fois.

5. En déduire que f admet un unique extremum local.
6. Calculer la valeur de l'intégrale de f sur le segment $[1, 2]$. (BONUS)