Analyse I

Correction des TD

Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler

Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France

guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Les exercices proposés dans cette fiche constituent une bonne base d'entraînement pour mettre en application les différentes notions vues en cours. Les exercices sont essentiellement triés par thème mais il n'est pas impossible qu'il faille avoir recours à des notions vues ultérieurement afin de pouvoir le traiter.

L'ordre des exercices ne présage pas de leur difficulté, ces derniers sont essentiellement rangés par thématique et la difficulté des exercices peut fortement varier. En revanche, tous les éléments nécessaires à la résolution des exercices figurent dans le cours. Il faudra simplement mener une réflexion plus ou moins profonde.

En cas de problème dans la résolution de ces exercices, vous pouvez toujours me solliciter par mail.

Tous les exercices ne pourront pas être traités en TD, il est donc important que vous vous entraîniez chez vous pour maîtriser ces notions et que vous refassiez les exercices traités en cours.

Table des matières

1 Suites de nombres réels **3**

2 Généralités sur les fonctions **30**

3 Continuité et convexité **37**

4 Dérivabilité et régularité **41**

5 Développement limité **52**

6 Primitives et Intégrales **58**

7 Etude de (suites de) fonctions **75**

1 Suites de nombres réels

Exercice 1.1 (Vérifier ses connaissances)**.**
Les questions suivantes sont des questions de cours pour vérifier vos connaissances.

1. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez ou donner un contre-exemple*
   (a) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$*, alors* $u_n \geq L$ *à partir d'un certain rang.*
   (b) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L < 0$*, alors* $u_n < 0$ *à partir d'un certain rang.*
   (c) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$ *et que* $u_n \geq 0$*, alors* $L \geq 0$*.*
   (d) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$ *et que* $u_n < 0$*, alors* $L < 0$*.*
   (e) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$ *et si* $K > L$*, alors* $u_n \leq K$ *à partir d'un certain rang.*
   (f) *Toute suite monotone est convergente.*
2. *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?*
   (a) A *: u est bornée,*
   B *: u est convergente.*
   (b) A : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$,
   B *: u diverge*
   (c) A *: u converge,*
   B *: u est stationnaire*
3. *Soient deux suites réelles* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?*
   (a) A : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$,
   B : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)$.
   (b) A : $u_n < v_n$ *à partir d'un certain rang,*
   B : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) < \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)$.
4. *On considère les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*
$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{2-n^2}{n^3}$$
   (a) *Déterminer un équivalent de ces deux suites lorsque* $n \to +\infty$*.*
   (b) *Faire de même avec les suites* $u_n v_n, \dfrac{u_n}{v_n}, u_n + v_n$ *et* $u_n - v_n$*.*

Correction

1. (a) Faux. En effet, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 et pour tout n, $u_n < 2$.
   (b) Vrai. C'est la conséquence d'un résultat vu en cours.
   (c) Vrai. C'est à nouveau la conséquence d'un résultat vu en cours.
   (d) Faux. En effet, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout n, $u_n < 0$ et la limite de cette suite est égale à 0.
   (e) Vrai. C'est à nouveau une conséquence de la définition de limite d'une suite.
   (f) Faux. Si on ne précise pas que cette suite est bornée.
2. (a) Si la suite est convergente alors elle est bornée. En revanche, la réciproque est fausse, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

(b) On a clairement A implique B, en revanche la réciproque est fausse à nouveau. On peut reprendre la même suite que précédemment.

(c) Si u est stationnaire, elle est convergente car constante au bout d'un certain rang (on passe à nouveau par la définition de limite). En revanche la réciproque est fausse, on peut prendre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

3. (a) Nous avons bien sûr B implique A en revanche la réciproque est fausse. Considérons les suites u et v définies pour tout n par

$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n - \frac{1}{n+1}.$$

La suite $u - v$ converge vers 0 en revanche, les deux suites divergent.

(b) A nouveau, nous avons B implique A. En revanche la réciproque est fausse. Considérons les suites u et v définies pour tout n par

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2}{n}.$$

On a bien $u_n < v_n$ pour tout entier n mais les deux suites admettent la même limite.

4. (a) Lorsque n tend vers $+\infty$ les deux suites sont respectivement équivalentes à $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{-1}{n}$.

(b) Etudions les trois équivalents

- **équivalent de u_nv_n :** le calcul d'équivalents est compatible avec la multiplication. On peut donc reprendre les calculs de la question précédente et on en déduit que

$$u_nv_n \sim -\frac{1}{n^2}.$$

- **équivalent de u_n+v_n :** l'équivalence n'est en revanhce pas compatible avec la somme où la différence, on va donc de voir calculer la somme avant de déterminer un équivalent. Ce qui nous donne

$$u_n + v_n = \frac{n-1}{n^2} + \frac{2-n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}(2-n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \breve{}\,\frac{1}{n^2}.$$

- **équivalent de $u_n - v_n$:** de la même façon que précédemment, nous avons

$$u_n - v_n = \frac{n-1}{n^2} + \frac{2-n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}(2n^2-n-2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Exercice 1.2 (Variations d'une suite)**.**
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles croissantes ou décroissantes ?

1. $u_n = n^2 + 5n + 4$.

2. $u_n = \dfrac{-2n+3}{n+1}$.

3. $u_n = \sqrt{2n+5}$.

4. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Correction

Pour étudier les variations d'une suite, on peut étudier le signe de la différence entre deux termes consécutifs, *i.e.* le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou encore le quotient entre deux termes consécutifs, *i.e.* la valeur du ratio $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 5(n+1) + 4 - n^2 - 5n - 4, \\ &= 2n + 6, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

La suite est donc croissante $n \in \mathbb{N}$.

2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+3}{n+2} + \frac{2n-3}{n+1}, \\ &= \frac{-2(n+1)^2 + 3(n+1) + (2n-3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}, \\ &= \frac{-2n^2 - 4n - 2 + 3n + 3 + 2n^2 + n - 6}{(n+1)(n+2)}, \\ &= \frac{-5}{(n+1)(n+2)}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante $n \in \mathbb{N}$.

3.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2n+7}}{\sqrt{2n+5}}, \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

La suite est donc croissante pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}, \\ &= \frac{2n}{n+1}, \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

La suite est donc croissante pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 1.3 (Suite arithmético-géométrique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

1. *Calculer u_1, u_2 et u_3.*
2. *On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 3$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.*
3. *Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.*
5. *Calculer $S_n = v_0 + v_1 + + \ldots + v_n$ et en déduire la valeur de la somme $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.*

Correction

On rappelle que nous avons $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

1. On applique simplement la relation de récurrence, ce qui nous donne successivement

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 10 + 1 = \frac{23}{3}.$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{23}{3} + 1 = \frac{55}{9}.$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{55}{9} + 1 = \frac{137}{27}.$$

2. On considère maintenant $v_n = u_n - 3$, les premiers termes sont alors égaux à

$$v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7 = 7\left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

$$v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{14}{3} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^1.$$

$$v_2 = u_2 - 3 = \frac{55}{9} - 3 = \frac{28}{9} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

$$v_3 = u_3 - 3 = \frac{137}{27} - 3 = \frac{56}{27} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

3. Les calculs précédents, montrent que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 7$. En effet

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3}, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise la définition par récurrence de } u_n \\
&= \frac{\frac{2}{3}u_n + 1 - 3}{u_n - 3}, \\
&= \frac{2u_n - 6}{3u_n - 9}, \\
&\quad \downarrow \text{ on factorise par 2 au numérateur et 3 au dénominateur} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

On a donc bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

4. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime comme

$$v_n = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On en déduit donc une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant le fait que $v_n = u_n - 3$

$$u_n = v_n + 3 = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

5. Il s'agit de calculer la somme des termes d'une suite géométrique. Nous avons donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 21\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Pour le calcul de S'_n, on va utiliser le lien entre v_n et u_n, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
S'_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } u_k = v_k + 3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (v_k + 3), \\
&\quad \downarrow \text{ on reconnaît la définition de } S_n \text{ en séparant la somme en deux} \\
&= S_n + \sum_{k=0}^{n} 3, \\
&= 21\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1).
\end{aligned}$$

Exercice 1.4 (Etude d'une suite)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ pour tout entier naturel n. On définit également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout entier naturel n.

1. *Calculer u_1, u_2 et u_3*
2. *Montrer que $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique et donner des précisions.*
3. *Exprimer v_n en fonction de n.*
4. *En déduire une expression de u_n.*

Correction

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égaux à

$$u_1 = \frac{2u_0+3}{u_0+4} = \frac{3}{4}.$$

$$u_2 = \frac{2u_1+3}{u_1+4} = \frac{2\frac{3}{4}+3}{\frac{3}{4}+4} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{19}{4}} = \frac{18}{19}.$$

$$u_3 = \frac{2u_2+3}{u_2+4} = \frac{2\frac{18}{19}+3}{\frac{18}{19}+4} = \frac{\frac{93}{19}}{\frac{94}{19}} = \frac{93}{94}.$$

2. On considère maintenant $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{-1}{3}$. En effet

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}, \\
&\downarrow \text{ relation de récurrence de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} + 3}, \\
&= \frac{u_n - 1}{5(u_n+3)}, \\
&\downarrow \text{ on factorise} \\
&= \frac{1}{5}\frac{u_n-1}{u_n+3}, \\
&= \frac{1}{5}v_n.
\end{aligned}$$

3. Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{-1}{3}$, alors pour tout entier n, on a

$$v_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

4. On exploite la relation entre les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} &\iff v_n(u_n+3) = u_n - 1, \\
&\iff 1 + 3v_n = u_n(1 - v_n), \\
&\iff u_n = \frac{1+3v_n}{1-v_n}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc $u_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.

Exercice 1.5 (Variation d'une suite)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

1. *Montrer que pour tout n, $u_{n+1} \geq 1$.*
2. *Montrer que pour tout entier n, on a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}.$$

3. *En déduire les variations de $(u_n)_{n\in N}$.*

Correction

Etudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.

1. On va montrer le résultat par récurrence, en utilisant le fait que $u_0 = 2$. On a donc
$$u_1 = \frac{1+3u_0}{3+u_0} = \frac{7}{5} \geq 1.$$
La relation est donc vraie pour $n = 1$. Supposons que cette dernière soit vraie pour un certain entier n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1+3u_n}{3+u_n}, \\ &\quad \downarrow \text{ en réécrivant le quotient} \\ &= \underbrace{\frac{3+u_n}{3+u_n}} + \frac{2u_n-2}{3+u_n}, \\ &\geq 1 + \frac{2u_n-2}{3+u_n}, \\ &\quad \downarrow \text{ en utilisant le fait que } u_n \geq 1 \\ &\quad \downarrow \text{ on a alors } 2u_n - 2 \geq 0 \text{ donc } \frac{2u_n-2}{3+u_n} \geq 0 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

2. On va se contenter de faire le calcul.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n, \\ &\quad \downarrow \text{ on réduit au même dénominateur et on simplifie} \\ &= \frac{1 + \cancel{3u_n} - \cancel{3u_n} - u_n^2}{3+u_n}, \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}. \end{aligned}$$

3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geq 1$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Exercice 1.6 (Une suite arithmético-géométrique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 3$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer le signe de la limite de cette suite.*
2. *Trouver un point fixe de la suite $(u_n)_{n\in N}$. On le notera s.*
3. *Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_n = u_n - s$.*
4. *En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et sa limite.*

Correction

1. On va calculer les trois premiers termes de cette suite
$$u_1 = -\frac{3}{4}u_0 + 3 = 3 + 3 = 6.$$
$$u_2 = -\frac{3}{4}u_1 + 3 = -\frac{18}{4} + 3 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$u_3 = -\frac{3}{4}u_2 + 3 = \frac{9}{8} + 3 = \frac{33}{8}.$$

Il est donc difficile de prévoir le signe de la limite de cette suite. On peut simplement noter l'alternance du signe à chaque itération.

2. Un point fixe ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\ell = -\frac{3}{4}\ell + 3$$

qui admet comme solution $\ell = \dfrac{12}{7}$ (qui sera donc un candidat à la limite de cette suite).

3. On considère $v_n = u_n - \dfrac{12}{7}$. On a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{12}{7}, \\ &\quad \downarrow \text{ on applique la définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \\ &= -\frac{3}{4}u_n + 3 - \frac{12}{7}, \\ &= -\frac{3}{4}u_n + \frac{9}{7}, \\ &\quad \downarrow \text{ on factorise par } -3/4 \\ &= -\frac{3}{4}\left(u_n - \frac{12}{7}\right), \\ &= \frac{-3}{4}v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{-3}{4}$.

4. En exploitant la relation $u_n = v_n + \dfrac{12}{7}$, nous avons

$$u_n = v_0\left(-\frac{3}{4}\right)^n + \frac{12}{7},$$

où $v_0 = -\dfrac{16}{7}$.

La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $\dfrac{12}{7}$.

Exercice 1.7 (Calculs de Racines Carrées)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On considère également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $n \geq 0$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. *Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$.*
2. *Calculer v_n en fonction de v_0 et montrer que $|v_0| < 1$. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
3. *Exprimer u_n en fonction de v_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.*
4. *Calculer les trois premiers termes de la suite, pour $u_0 = 1$ et $a = 2$.*

Correction

1. Faisons les calculs en partant de la définition de v_{n+1}

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{u_{n+1}+\sqrt{a}}, \\
&\quad \downarrow \text{ définition de } u_{n+1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)+\sqrt{a}}, \\
&= \frac{u_n^2+a-2\sqrt{a}u_n}{u_n^2+a+2\sqrt{a}u_n}, \\
&\quad \downarrow \text{ on reconnaît une identité remarquable} \\
&= \frac{(u_n-\sqrt{a})^2}{(u_n+\sqrt{a})^2}, \\
&= v_n^2.
\end{aligned}
$$

2. D'après la question précédente, on peut montrer par une récurrence simple que l'on a $v_n = (v_0)^{2^n}$. De plus nous avons

$$|v_0| = \left|\frac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}}\right| \leq \left|\frac{u_0}{u_0+\sqrt{a}}\right| < 1.$$

La dernière inégalité est vraie car $a > 0$. Comme pour tout n, nous avons $v_n = (v_0)^{2^n}$ et que $|v_0| < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0/$

3. On repart de la définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-\sqrt{a}}{u_n+\sqrt{a}} &\iff v_n(u_n+\sqrt{a}) = u_n-\sqrt{a}, \\
&\iff u_n(1-v_n) = \sqrt{a}(1+v_n), \\
&\iff u_n = \sqrt{a}\frac{1+v_n}{1-v_n}, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise l'expression de } v_n \text{ en fonction de } n \\
&\iff u_n = \sqrt{a}\frac{1+\left(v_0^2\right)^n}{1-\left(v_0^2\right)^n}.
\end{aligned}
$$

Or $|v_0| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

4. On considère $u_0 = 1$ et $a = 2$, les trois premiers termes sont donc égaux à

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0+\frac{a}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}.$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1+\frac{a}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}.$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2+\frac{a}{u_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{537}{408}.$$

Exercice 1.8 (Etude de la convergence d'une suite).
Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}.$$

1. (a) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.*
   (b) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. Peut)on préciser sa limite sans calcul supplémentaire.*
2. (a) *A l'aide du théorème des acroissements finis, encadrer $\ln(n+1)-\ln(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*
   (b) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et préciser sa limite.*

Correction

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{p(n+1)} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}\right),\\
&= \frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + \cdots + \frac{1}{p(n+1)} - \frac{1}{n},\\
&\leq \frac{p}{pn+1} - \frac{1}{n},\\
&= -\frac{1}{n(pn+1)}.
\end{aligned}$$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante d'après la question précédente. Par définition cette suite est positive, *i.e.* $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ étant décroissante et minorée, elle est donc convergente. En revanche, sans plus d'informations, nous ne pouvons pas dire qu'elle est la limite de cette suite.

2. (a) Il faut trouver un moyen de faire apparaître ce terme $\ln(n+1) - \ln(n)$ en utilisant un terme proche de la suite u_n qui, elle, fait apparaître des termes en $\frac{1}{x}$.
   Notons que pour tout $x \in [n, n+1]$, la fonction ln est dérivable sur $[n, n+1]$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

   L'inégalité des accroissement finis assure nous donne alors (ce que l'on peut aussi faire en intégrant entre n et $n+1$ dans l'inégalité précédente et en utilisant la croissance de l'intégrale) :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

   (b) On va maintenant utiliser l'inégalité précédente pour encadrer chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. On peut borner ces termes inférieurement comme suit

$$\begin{aligned}
u_n &\geq (\ln(n+1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) + \cdots + (\ln(pn+1) - \ln(pn)),\\
&\geq \ln(pn+1) - \ln(n),\\
&= \ln\left(p + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

   On fait la même chose pour borner la suite supérieurement cette fois-ci. Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
u_n &\leq \frac{1}{n} + (\ln(n+1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) + \cdots + (\ln(pn) - \ln(pn-1)) \, , \\
&\geq \frac{1}{n} + \ln(pn) - \ln(n), \\
&= \frac{1}{n} \ln(p) \, .
\end{aligned}
$$

Pour tout $n > 0$, nous avons donc

$$\ln\left(p + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \frac{1}{n} + \ln(p).$$

En prenant la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente et en appliquant le théorème des gendarmes, on trouve alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(p).$$

Exercice 1.9 (Suite de Fibonacci)**.**
L'histoire des Mathématiques est parfois surprenante, et décidément toujours inattendue. Le vieux nombre d'or (qui sera l'objet de cet exercice), à l'origine géométrique, s'apparenta des siècles plus tard avec des fractions issues d'une suite purement arithmétique. L'artisan de cette union fut le plus remarquable mathématicien du Moyen Âge, Leonardo Pisano, plus connu sur le nom de Fibonacci[1]*. Le plus célèbre de tout les problèmes qui fait apparaître ce nombre d'or se trouve certainement dans le* ***Livre de l'abaque****. Il s'agit du fameux problème des lapins, dont la solution est la suite aujourd'hui connue sous le nom de Fibonacci.*

Le problème est posé de la façon suivante : combien de couples de lapins aurons-nous à la fin de l'année si nous commençons avec un couple qui engendre chaque mois un autre couple qui procrée à son tour au bout de deux mois de vie ?

L'objectif de cet exercice est alors d'étudier les solutions de ce problème et plus largement la suite de Fibonacci $(F_n)_{\in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. *On s'intéresse à l'équation $x^2 = x + 1$.*
   (a) *Montrer que cette équation possède une solution positive que l'on notera φ. Ce nombre est appelé nombre d'or. L'autre solution, négative, sera notée ϕ*
   (b) *Montrer les égalités*
   $$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 1}.$$
   (c) *Montrer que l'on a $\varphi = \dfrac{-1}{\phi}$.*

1. **Leonardo Pisano, Fibonacci (1170 - 1250)**. Il naquit à Pise en 1170. Son surnom renseigne sur son origine familiale : Fibonacci signifie tout simplement «fils de Bonacci» (figlio di Bonacci). Cependant, ce nom est d'origine moderne ; on ne dispose d'aucne preuve permettant d'affirmer qu'il était connu sous le patronyme de Fibonacci. Il s'initia aux Mathématiques à partir de la comptabilité, car son père était un marchand italien qui avait des activités commerciales internationales. Rapidement, Leonardo montra un vif intérêt pour les mathématiques qui allait bien au-delà de leurs applications mercantiles. Ses voyages marchands en Afrique du Nord lui offrirent l'opportunité de s'initier aux mathématiques arabes aux côtés de maîtres musulmans. Il connut ainsi le système de numérotation arabo-hindou et en comprit immédiatement les énormes avantages. En Europe, il en devint le défenseur le plus zélé et tenta de le vulgariser. C'est à lui que nous devons apparition dans notre culture.

2. *On considère à présent les termes de la suite de Fibonacci.*
   (a) *Calculer les valeurs de F_n pour $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.*
   (b) *En utilisant le fait que $F_{n+2} \geq 2F_n$, donner une borne inférieure sur F_n pour entier naturel n.*
3. *Soient deux réels α et β. On considère, pour tout entier n, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$f_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   (a) *Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation de récurrence*

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

   (b) *Déterminer les valeurs de α et β telles que $f_0 = f_1 = 1$.*
   (c) *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un entier naturel.*
   (d) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f_{n+1}}{f_n}\right) = \varphi$. On pourra résoudre cette question de deux façons différentes.*

Correction

1. On s'intéresse à l'équation à $x^2 = x + 1$ dont on va étudier les solutions.
   (a) Il s'agit d'une simple équation du second degré dont le discriminant est égal à 5. Elle admet donc deux solutions qui sont

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ et } \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

   (b) On va d'abord calculer $1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\varphi} &= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \\
&\downarrow \text{ réduire au même dénominateur} \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}+2\right), \\
&\downarrow \text{ on multiplie par le conjugué} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\left(3+\sqrt{5}\right), \\
&= \frac{-3-5-2\sqrt{5}}{-4}, \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\
&= \varphi.
\end{aligned}$$

   On va se concentrer sur la deuxième égalité maintenant.

$$\frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1} = \frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+1}{\sqrt{5}},$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{10+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}, \\
&\quad \downarrow \text{ en multipliant numérateur et dénominateur par } \sqrt{5} \\
&= \frac{10\sqrt{5}+10}{20}, \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\
&= \varphi.
\end{aligned}
$$

(c) On va maintenant montrer le lien entre ϕ et φ.

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{\phi} &= -\frac{2}{1-\sqrt{5}}, \\
&= -\frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}, \\
&= -\frac{2+2\sqrt{5}}{-4}, \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\
&= \varphi.
\end{aligned}
$$

2. On s'intéresse maintenant à la suite de Fibonacci
   (a) Les premiers termes sont

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5$$

$$F_5 = 8,\ F_6 = 13,\ F_7 = 21 \text{ et } F_8 = 34.$$

   (b) On va utiliser le fait que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour donner une borne inférieure de F_n.

$$
\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \\
&\quad \downarrow (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\geq 2F_{n-2} \\
&= 2(F_{n-3} + F_{n-4}), \\
&\quad \downarrow (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\geq 4A_{n-4}, \\
&= 4(F_{n-5} + F_{n-6}), \\
&\quad \downarrow (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\geq 8F_{n-6}, \\
&\geq \dots, \\
&\geq 2^k F_{n-2k}. \geq \qquad \dots, \\
&\geq 2^{n/2}
\end{aligned}
$$

Notons que le cas traité ci-dessous correspond au cas où n est pair. Si n est impair, on devra alors s'arrêter à F_1 au lieu de F_0.

3. On s'intéresse maintenant à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) On va montrer qu'elle vérifie la même relation de récurrence que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que l'on peut réécrire cette suite comme

$$f_n = \alpha\phi^n + \beta\varphi^n.$$

On va ensuite exploiter les relations que l'on connaît sur φ afin de démontrer l'égalité. Pour cela on va d'abord noter que l'on a

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \iff \varphi^2 = 1 + \varphi.$$

De la même façon

$$\phi = -\frac{1}{\varphi},\ \text{donc}\ -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi \iff \phi - \phi^2 = -1 \iff \phi^2 = 1 + \phi.$$

$$\begin{aligned}
f_{n+2} &= \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}, \\
&\quad \downarrow \text{ en exploitant les premières questions} \\
&= \alpha\phi^{n+2} + \beta\varphi^{n+2}, \\
&= \alpha\,\underbrace{\phi^2}\,\phi^n + \beta\,\underbrace{\varphi^2}\,\varphi^n, \\
&\quad \downarrow \text{ on exploite nos relations ci-dessus} \\
&= \alpha(1+\phi)\phi^n + \beta(1+\varphi)\varphi^n, \\
&= \alpha\phi^n + \beta\varphi^n + \alpha\phi^{n+1} + \beta\varphi^{n+1}, \\
&\quad \downarrow \text{ définition de } f_n \\
&= f_n + f_{n+1}.
\end{aligned}$$

(b) Il suffit de résoudre un petit système dans ce cas là.

$$\begin{cases} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= 1, \\ \alpha\phi + \beta\varphi &= 1, \end{cases}$$

De la première équation, nous avons $\alpha = 1 - \beta$. En injectant dans la deuxième équation, on trouve alors $\phi(1-\beta) + \varphi\beta = 1$ soit

$$\beta = \frac{1-\phi}{\varphi - \phi} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

On en déduit que $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$.

(c) Le résultat est immédiat en utilisant la relation de récurrence démontrée à la question (a).

(d) Deux possibilités pour déterminer la limite

- **en exploitant la définition de f_n :** on peut tout d'abord noter que $|\phi| = \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta\varphi^{n+1}}{\beta\varphi^n} = \varphi.$$

- **en utilisant la relation de récurrence :**
remarquons que tout les termes de la suite $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$ sont positifs et supposons que la suite converge[2] et notons L sa limite.
En remarquant que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette expression. On trouve que la limite L vérifie l'équation $L^2 = L+1$, qui est notre équation du second degré étudié au tout début et dont la racine positive est φ.

on peut tout d'abord noter que $|\phi| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \phi^n = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f}{} = 0$$

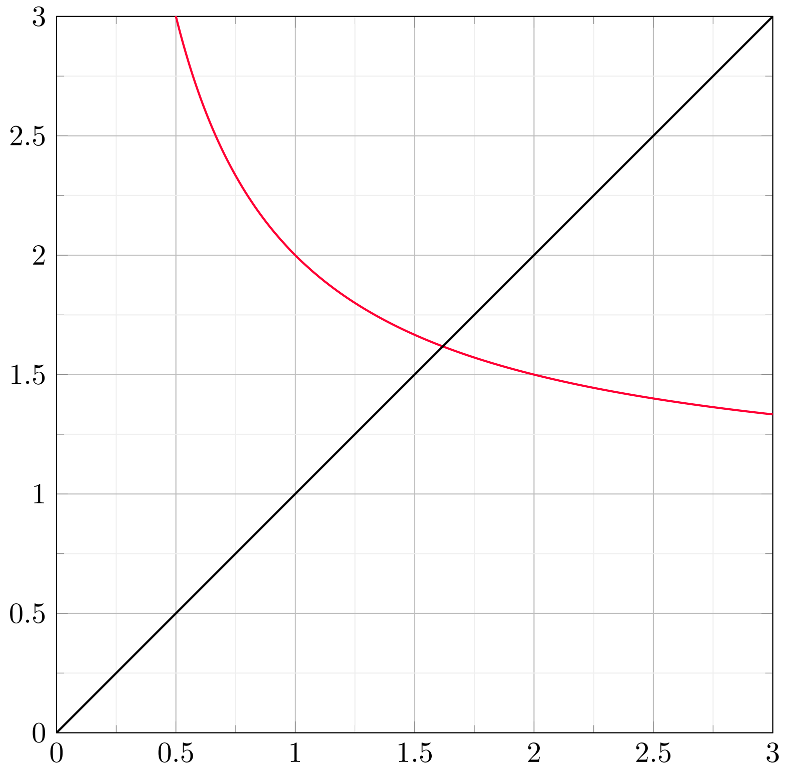
Exercice 1.10 (Approximations du nombre d'or)**.**
On rappelle que l'on a posé $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $a_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* n *par* $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.
   (a) *Pour tout entier* $n \geq 0$*, montrer que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et que l'on a*

   $$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2.$$

   (b) *Etudier la fonction* $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$*, notamment ses variations et déterminer un point fixe de la fonnction* f*.*
   (c) *A l'aide de l'étude précédente, déterminer graphiquement les premières valeurs de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en vous aidant du graphique ci-dessous.*

2. On ne cherchera pas à le montrer explicitement car les variations de cette suite dépendent de la parité de l'indice n. Mais la première possibilité nous a permis de montrer que cette suite converge.



(d) *Pour tout entier naturel* $n \geq 0$, *montrer l'inégalité* $|a_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \varphi|$.

(e) *En dédure que pour tout entier naturel* $n \geq 0$,

$$|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(f) *Que dire du comportement de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$?

2. *Soit* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $c_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* n, $c_{n+1} = \frac{c_n^2+1}{2c_n - 1}$. *On note* f *la fonction définie pour tout* $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ *par*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

(a) *Etudier les variations de* f *sur son intervalle de définition. En particulier, calculer* $f(\varphi)$ *et montrer que, pour tout nombre réel* $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > \frac{1}{2}$.

(b) *En déduire que pour tout entier naturel* n, c_n *existe et* $c_n > \frac{1}{2}$, *c'est-à-dire que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*

(c) *En déduire que pour tout entier naturel* n, $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

(d) *Montrer que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

(e) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $c_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2$.

(f) *En déduire, pour tout entier naturel* $n \geq 0$, *l'inégalité*

$$c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

(g) *En déduire la limite de la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. (a) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout entier n, $a_n > 0$ ce que l'on peut montrer par une récurrence simple sur a_n en remarquant que $a_0 > 0$ et que $a_{n+1} > 1$ par définition.

   On souhaite maintenant voir si cette suite est bornée, on va à nouveau le montrer par récurrence sur n. On a bien sûr

$$\frac{3}{2} \leq a_0 \leq 2.$$

   Supposons maintenant que la relation est vraie pour un entier n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. En utilisant la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2 &\iff \frac{2}{3} \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2}, \\
&\quad \downarrow \text{ on ajoute } 1 \\
&\iff \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{a_n} \leq \frac{5}{3} \leq 2, \\
&\iff \frac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq 2.
\end{aligned}$$

   La relation reste vraie au rang $n+1$ et est donc vraie pour tout entier n.

   (b) La fonction f est définie et dérivable pour tout réel x non nul. Sa dérivée est $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ qui est une fonction négative pour tout x non nul et la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^\star$, donc en particulier sur $\mathbb{R}_+^\star$. Son tableau de variation est le suivant :

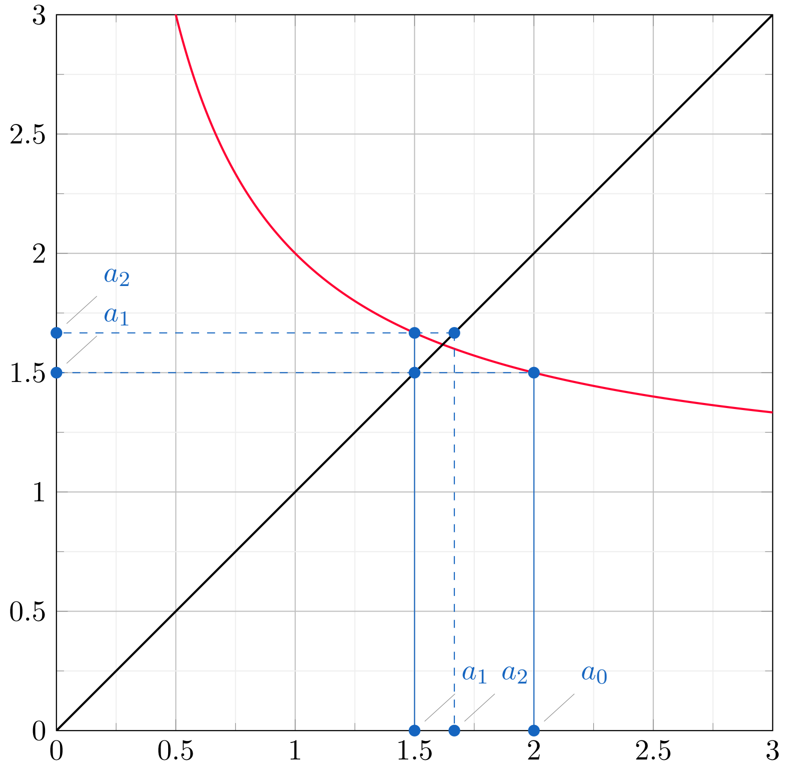
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$
f	$1 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow -1$

   Un point fixe de la fonction f est donnée en résolvant l'équation

$$f(x) = x \iff x = 1 + \frac{1}{x}, \iff x^2 = x + 1.$$

   Nous avons déjà vu que les racines de cette équation sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Mais on s'intéresse uniquement à la racine positive ici.

   (c) On se contente de représenter les premières termes de la suite, de façon graphique



(d) Pour cette question, on utilisera le fait que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - \varphi| &= \left| 1 + \frac{1}{a_n} - \varphi \right|, \\
&\quad \downarrow \text{ en utilisant le fait que } \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= \left| 1 + \frac{1}{a_n} - 1 - \frac{1}{\varphi} \right|, \\
&= \left| \frac{\varphi - a_n}{a_n \varphi} \right|, \\
&\quad \downarrow \text{ pour tout } n,\ a_n \geq \frac{3}{2} \text{ et } \varphi \geq \frac{3}{2} \\
&= \frac{4}{9} \left| a_n - \varphi \right|.
\end{aligned}
$$

(e) On va montrer la relation par récurrence.

- au rang $n = 0$, nous avons $|a_0 - \varphi| = \left| 2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \dfrac{1}{2}|3 - \sqrt{5}| \leq \dfrac{3}{4} \leq 1$ car $\dfrac{3}{2} \leq \sqrt{5} \leq 3$.
- soit $n \geq 0$ pour lequel la relation est vérifiée. Montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. C'est plutôt immédiat.

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - \varphi| &\leq \frac{4}{9} |a_n - \varphi|, \\
&\quad \downarrow \text{ hypothèse de récurrence} \\
&\leq \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n, \\
&\leq \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

La relation reste donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, nous avons

$$|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(f) D'après la question précédente, vu $\frac{4}{9} \leq 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} | a_n - \varphi| = 0$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ.

2. On considère $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \dfrac{c_n^2+1}{2c_n-1}$.

   On note f la fonction définie pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

(a) La fonction f est définie et dérivable pour tout $x > \frac{1}{2}$ et sa dérivée est égale à

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2}, \\ &\downarrow \text{ on va simplifier l'expression} \\ &= \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}, \\ &= 2\frac{x^2-x-1}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur dont les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La dérivée est donc positive à l'extérieur de l'intervalle des racines et négative dans l'intervalle défini par les racines.

Remarquons également que $f(\varphi) = \varphi$ On dresse le tableau de variation suivant

x	$\frac{1}{2}$		φ		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	φ	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum est atteint en $x = \varphi$ pour lequel la fonction f est égale à $\varphi > \frac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente, nous avons montré que pour tout $x > \frac{1}{2}$, nous avons $f(x) > \frac{1}{2}$. Or $c_{n+1} = f(c_n)$ et $c_0 = 2\frac{1}{2}$. Une récurrence simple montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout entier n, $c_n > \frac{1}{2}$.

(c) On va à nouveau monter ce résultat par récurrence sur n.

- au rang $n = 0$, nous avons $c_0 = 2,\ c_1 = \frac{5}{3}$, donc

$$\varphi \leq c_1 \leq c_0 \leq 2.$$

- soit n un entier naturel pour lequel la relation est vraie. Montrons que cela reste vrai au rang $n+1$.
  Au rang n, nous avons

$$\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2.$$

  En utilisant la croissance de f sur $]\varphi, +\infty[$ nous avons

$$f(\varphi) \leq f(c_{n+1}) \leq f(c_n) \leq f(2) \iff \varphi \leq c_{n+2} \leq c_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2.$$

  La propriété reste donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

(d) D'après la question précédente, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

(e) On va utiliser la définition de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
c_{n+1} - \varphi &= \frac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1} - \varphi, \\
&= \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + 1 + \varphi}{2c_n - 1}, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } \varphi^2 = 1 + \varphi \\
&= \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi^2}{2c_n - 1}, \\
&\quad \downarrow \text{ on reconnaît une identité remarquable} \\
&= \frac{(c_n - \varphi^2)^2}{2c_n - 1}, \\
&\quad \downarrow\ \varphi \leq c_n \text{ donc } 2c_n - 1 \geq 2 \text{, on peut minorer le dénominateur par 2} \\
&\leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi^2)^2.
\end{aligned}$$

(f) Le plus simple reste de montrer ce résultat par récurrence sur n.

- pour $n = 0$, nous avons bien $c_0 - \varphi = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{1}{2}$.
- soit n un entier naturel pour lequel la relation est vraie et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. On repart directement de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
c_{n+1} - \varphi &\leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2, \\
&\quad \downarrow \text{ hypothèse de récurrence} \\
&\leq 2^{-1}2^{-2\sum_{k=0}^{n} 2^k}, \\
&\leq 2^{-1}2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}}, \\
&\quad \downarrow \text{ on change les indices de la somme, en posant } k' = k+1 \\
&\leq 2^{-1}2^{-\sum_{k'=1}^{n+1} 2^{k'}}, \\
&\leq 2^{-1-\sum_{k'=1}^{n+1} 2^{k'}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\downarrow \text{ on utilise le fait que } 1 = 2^0\\ &\leq 2^{-\sum_{k'=0}^{n+1} 2^{k'}}.\end{aligned}$$

La propriété reste vraie au rang $n+1$.

On en déduit donc que pour tout entier $n \geq 0$, $c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}$.

(g) D'après la question précédente, pour tout entier n, nous avons

$$0 \leq c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

Or $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k} = 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n - \varphi = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} c_n = \varphi.$$

Exercice 1.11 (Autour de la suite de Fibonacci)**.**
On considère, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On note à nouveau φ, le nombre d'or, i.e. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|\varphi - u_n| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.*
2. *Montrer, pour tous les entiers pour lesquels cela a un sens, que $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$.*
3. *En déduire que tous les termes impairs de la suite de Fibonacci sont des nombres entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés de nombres entiers.*
4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*
$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$
5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ [3]. Quelle est la nature de cette suite ?*
6. *En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons*
$$\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Correction

On considère à nouveau notre suite de Fibonacci et on continue l'étude des propriétés de cette suite à travers une suite auxiliaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Cette identité est connue sous le nom de *Identité de Cassini*. Elle est étend d'ailleurs cette relation à tous les entiers relatifs n.

1. On va montrer le résultat par récurrence, en utilisant uniquement la définition de la suite de Fibonacci.

   - **Au rang n =1** : on a bien évidemment
   $$|u_1 - \varphi| = |1 - \varphi| = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi F_1}.$$
   - **Récurrence :** supposons que la relation soit vraie au rang $n \geq 1$, et montrons qu'elle reste valable au rang $n+1$, on alors
   $$|u_{n+1} - \varphi| = \left|\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \varphi\right| = \frac{1}{F_{n+1}} |F_{n+2} - \varphi F_{n+1}| = \frac{1}{F_{n+1}} |(1-\varphi)F_{n+1} + F_n|.$$
   Or $1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi}$. Donc la dernière égalité est égale à
   $$\left|-\frac{F_{n+1}}{\varphi F_{n+1}} + \frac{F_n}{F_{n+1}}\right| = \left|-\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{u_n}\right| = \frac{|u_n - \varphi|}{\varphi u_n}.$$
   Or, nous avons $|u_n - \varphi| = \frac{1}{\varphi^n F_n}$.
   D'où
   $$u_{n+1} - \varphi| = \frac{\frac{1}{\varphi^n}}{\varphi \frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{1}{\varphi^{n+1} F_{n+1}}.$$

   La relation est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$
2. Le résultat se montre en effectuant une double récurrence, *i.e.* en effectuant une première récurrence sur p en **fixant** n, puis en faisant une récurrence sur n en **fixant** p.

3. De ce résultat, on peut montrer, en prenant $n = p+1$ que l'on a
   $$F_{2p+1} = F_p^2 + F_{p+1}^2.$$
   Donc que les termes impairs de la suite de Fibonacci peuvent s'écrire comme une somme de deux carrés.
4. A nouveau, on ne l'écrira pas ici, mais il s'agit de montrer le résultat par récurrence (pour se simplifier la vie).
5. On se le donne en mille ! Encore une récurrence à faire !
   Sinon, on remarque tout de suite que la suite est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme 1.
6. On arrive sur la question la plus compliquée mais ce n'est pas non plus infaisable. Il suffit de se souvenir de la façon dont est définie la tangente d'une somme de deux nombres a et b
   $$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$
   Il ne reste plus qu'à appliquer cette propriété et faire le calcul en se *souvenant* que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
   D'où

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right) = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right)},$$

$$
\begin{aligned}
&\downarrow \text{ pour tout } x,\ \tan(\arctan(x)) = x\\
&= \frac{\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \dfrac{F_n}{F_{n+3}}}{1 + \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \times \dfrac{F_n}{F_{n+3}}},\\
&\downarrow \text{ on réduit au même dénominateur}\\
&= \frac{F_{n+2}F_{n+3} - F_{n+1}F_n}{F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+2}F_n},\\
&\downarrow \text{ définition de la suite de Fibonacci}\\
&= \frac{F_{n+2}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1})}{F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}F_n},\\
&\downarrow \text{ on exploite la question 5.}\\
&= \frac{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2}{F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2} + F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}},\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Les deux nombres ont donc la même tangente, ils sont donc égaux à π près. Or $\dfrac{F_n}{F_{n+3}}$ est compris dans l'intervalle $[0, 1]$, alors son arctangente est comprise dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. De la même façon, on a $\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} > 1$, donc son arctangente sera comprise entre $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, donc la différence sera strictement comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ et donc bien égale à $\dfrac{\pi}{4}$.
Qui aurait pu penser qu'en étudiant un simple modèle de reproduction des lapins, on pourrait arriver à une telle propriété !

Exercice 1.12 (Exotisme de Fibonacci)**.**
La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

possède de nombreuses propriétés. La première propriété est de pouvoir construire un triplet Pythagoricien. Rappelez-vous, un triplet (a, b, c) d'entiers est appelé triplet pythagoricien s'il vérifie la relation

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Cela est par exemple le cas du triplet $(3, 4, 5)$ pour lequel nous avons

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

1. *Pour tout entier naturel n, nous définissons*

$$a = F_nF_{n+3}, \quad b = 2F_{n+2}F_{n+1} \quad \text{et} \quad c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2.$$

Montrer que le triplet (a, b, c) forme un triplet Pythagoricien.

D'autres propriétés intéressantes portent sur la somme des termes de la suite de Fibonacci. Par exemple, il est facile d'exprimer la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite de Fibonacci à partir d'un seul de ses termes.

2. *Montrer que pour tout entier n, nous avons*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

3. A l'aide de la relation précédente, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{k'} F_{n+k} = F_{n+k'+2} - F_{n-1}.$$

Enfin, une dernière propriété remarquable est le fait que la somme de dix termes consécutifs de la suite est un multiple de 11. On peut même être plus précis, en disant que cette somme est égale à 11 fois le septième terme de la somme.

3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{9} F_{n+k} = 11F_{n+6}.$$

Exercice 1.13 (Limite d'une suite)**.**
Pour tout entier $n \geq 1$, considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+\ln(1)} + \frac{1}{n+\ln(2)} + \ldots + \frac{1}{n+\ln(n)}.$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite.

Correction

La méthode classique, consiste à montrer que la suite est monotone puis bornée afin de pouvoir montrer sa convergence. Malheureusement, dans le cas présent, on pourra remarque que cette suite ne l'est pas (on peut calculer les premiers termes à l'aide d'un ordinateur.

On va donc plutôt chercher à encadrer les valeurs de cette suite par deux autres suites qui auront la même limite et conclure par Théorème des Gendarmes.

Remarquons que pour tout entier n, nous avons

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Notre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc majorée par 1. Il nous reste à montrer qu'elle est minorée par une suite qui converge vers 1 pour montrer sa convergence et en déduire sa limite. Ce que l'on montre facilement, comme suit :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(n)} = \frac{n}{n+\ln(n)} = \frac{1}{1+\dfrac{\ln(n)}{n}}.$$

Or la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1 car $\underset{n\to+\infty}{\dfrac{\ln(n)}{n}} = 0.$

On en déduit donc, par Théorème des Gendarmes, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et converge vers 1.

Exercice 1.14 (Lemme de Cesàro).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réeelle convergente vers un réel L. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie pour tout n non nul par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers L [4].

Correction

On va traiter le cas $L = 0$ puis L quelconque comme suggéré par l'énoncé et se servir de la définition de la convergence d'une suite.

- **Cas où $L = 0$:** on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, $|u_n - L| \leq \varepsilon$.

  On applique cette définition à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ comme suit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N-1} \frac{u_k}{n} + \sum_{k=N}^{n} \frac{u_k}{n}\right|, \\
&\quad \downarrow \text{ inégalité triangulaire} \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{N-1} \frac{u_k}{n}\right| + \left|\sum_{k=N}^{n} \frac{u_k}{n}\right|, \\
&\quad \downarrow \text{ inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |u_k|, \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{n-N+1}{n}, \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \varepsilon
\end{aligned}$$

  Or la suite $\sum_{k=1}^{N-1} |u_k|$ est indépendant de n, il existe donc une constante N' telle que pour tout $n > N'$ on ait

$$\sum_{k=1}^{N-1} |u_k| \leq \varepsilon.$$

  En prenant $M = \max(N, N')$, on a alors, pour tout $n > M$, $|v_n| \leq 2\varepsilon$. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- **Cas où L est quelconque :** ce cas se traite de façon analogue en considérant la suite auxiliaire $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u'_n = u_n - L$. Le résultat précédente s'applique donc à la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u'_k}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k - L}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{L}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n} - L,$$

4. On pourra d'abord commencer par traiter le cas $L = 0$

dont la limite est bien nulle. On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = L$.

Exercice 1.15 (Calculs d'équivalents)**.**
Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\underset{n\to\infty}{u_n} = 0$. Justifier les équivalences suivantes

1. $\sin(u_n) \sim u_n$.
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
3. $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$.
4. $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \frac{u_n^2}{2}$.
5. $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
6. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
7. *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Correction

L'exercice nous propose de démontrer les équivalents des fonctions au voisinage de 0 en se basant sur diverses définitions.
On rappelle que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On aura notamment besoin de la définition de la dérivée de f en x suivante

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

1. On employer la définition du nombre dérivée pour faire apparaître la définition d'équivalence rappelée précédemment

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)-\sin(0)}{u_n - 0} = \sin'(0) = 1.$$

Donc $\sin(u_n) \sim u_n$ lors que u_n tend vers 0.

2. On pourrait être tenté de faire la même chose ici mais ... cela ne fonctionnera pas et nous n'obtiendrions qu'un équivalent à 0 ... ce qui est plus que douteux.
On va plutôt employer les relations entre les fonctions circulaires. Plus précisément, pour tout réel a

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \iff \cos(2a) - 1 = -2\sin^2(a).$$

En posant $a = \frac{u_n}{2}$, on a donc $\cos(u_n) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right)$.
D'après la question précédente, lorsque u_n tend vers 0, $\sin(u_n) \sim u_n$. On a donc directement

$$\cos(u_n) - 1 \sim -2\frac{u_n^2}{4} = -\frac{u_n^2}{2}.$$

3. On emploie, à nouveau, la définition du nombre dérivée pour faire apparaître la définition de quantités équivalentes.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(u_n)-\mathrm{sh}(0)}{u_n - 0} = \mathrm{sh}'(0) = 1.$$

Donc $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$ lors que u_n tend vers 0.

4. A nouveau une méthode analogue à celle employée avec la fonction cos. On va employer des relations liants les fonctions circulaires sh et ch. Pour tout réel a :

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(a) \iff \operatorname{ch}(2a) - 1 = 2\operatorname{sh}^2(a).$$

En posant $a = \frac{u_n}{2}$, on a donc $\operatorname{ch}(u_n) - 1 = 2\operatorname{sh}^2\left(\frac{u_n}{2}\right)$.
D'après la question précédente, lorsque u_n tend vers 0, $\operatorname{sh}(u_n) \sim u_n$. On a donc directement

$$\operatorname{ch}(u_n) - 1 \sim 2\frac{u_n^2}{4} = \frac{u_n^2}{2}.$$

5. C'est à nouveau une simple application du nombre dérivée. Ici la dérivée du logarithme en 1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(1)}{u_n} = \ln'(1) = 1.$$

6. C'est à nouveau une simple application du nombre dérivée. Ici la dérivée de l'exponentielle en 0.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n} - e^0}{u_n} = e^0 = 1.$$

7. A nouveau pareil, mais cette fois-ci appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ dont la dérivée est $\alpha x^{\alpha-1}$. Plus précisément, on calculera sa dérivée en 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(1+u_n)}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(1+u_n) - f(1)}{u_n} = f'(1) = \alpha.$$

On a donc $\frac{f(1+u_n) - f(1)}{u_n} \underset{u_n \sim 0}{\sim} \alpha$ donc $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

2 Généralités sur les fonctions

Exercice 2.1 (Etude des fonctions circulaires)**.**
Cet exercice se propose de vous faire travailler autour des fonctions circulaires.

1. *Pour tout réel x, déterminer la valeur de* $\cos(x)^2 + \sin(x)^2$.
2. *Pour tout $x \in [-1, 1]$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\sin(\arcsin(x))$.
   (b) $\cos(\arccos(x))$.
   (c) $\sin(\arccos(x))$.
   (d) $\cos(\arcsin(x))$.
3. *Pour quelles valeurs du réel x a-t-on les égalités suivantes ?*
   (a) $\arcsin(\sin(x)) = x$.
   (b) $\arccos(\cos(x)) = x$.

Correction

On rappelle les définitions des fonctions cos et sin pour tout réel x, *i.e.* les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

1. On va se contenter de faire le calcul

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 + \sin(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2,\\ &\quad \downarrow \text{ on développe}\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right),\\ &\quad \downarrow \text{ on simplifie}\\ &= 1.\end{aligned}$$

2. On étudie les liens entre les fonctions circulaires et circulaires réciproques.
   (a) La fonction arcsin est définie de $[-1, 1]$ dans $\left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$. On a donc bien $\sin(\arcsin(x)) = x$.
   (b) La fonction arccos est définie de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$. On a donc bien $\cos(\arccos(x)) = x$.
   (c) Ici on, va utiliser le fait que $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$. Ce qui permet d'écrire $\sin(t)^2 = 1 - \cos(t)^2$. En particulier lorsque $t = \arccos(x)$, nous avons

$$\sin(\arccos(x))^2 = 1 - \cos(\arccos(x))^2 = 1 - x^2 \implies \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

   (d) Comme précédemment, on peut écrire $\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2$. En particulier lorsque $t = \arcsin(x)$, nous avons

$$\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - \sin(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2 \implies \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

3. On étudie les liens entre les fonctions circulaires et circulaires réciproques.
   (a) La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. Donc la relation est vraie pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. Donc la relation est vraie pour tout $x \in [0, \pi]$.

Exercice 2.2 (Etude des fonctions hyperboliques)**.**
Cet exercice se propose de vous faire travailler autour des fonctions hyperboliques.

1. *Pour tout réel x, déterminer la valeur de* $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2$.
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$
   (b) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$
   (b) $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))$
4. *Pour tout $x \in [1, +\infty]$, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$
   (b) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$

Correction

L'exercice est analogue au précédent, on va donc être amené à employer les mêmes techniques.

1. On va se contenter de faire le calcul

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2,\\ &\downarrow \text{ on développe}\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right),\\ &\downarrow \text{ on simplifie}\\ &= 1.\end{aligned}$$

2. On regarde le lien entre une fonction hyperbolique et sa réciproque.
   (a) La fonction sh étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il en va de même de sa fonction réciproque argsh. Donc pour tout réel x, $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$.
   (b) Ici, il est important de se rappeler que la fonction argch est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel x, $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x)) = |x|$.
3. On regarde maintenant des propriétés de la fonction réciproque argsh avec les autres fonctions hyperboliques.
   (a) Comme précédemment, pour tout réel x, $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x$.
   (b) Ici, la relation n'est vraiment pas évidente, sauf si l'on parvient à faire apparaître la fonction sh pour espérer une simplification. Pour cela on va utiliser la question 1.

   D'après cette question, on a, pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t)^2 = 1 + \mathrm{sh}(t)^2$. En particulier pour $t = \mathrm{argsh}(x)$, nous avons

$$\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))^2 = 1 + \mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))^2 = 1 + x^2 \implies \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

4. On regarde maintenant des propriétés de la fonction réciproque argch avec les autres fonctions hyperboliques.
   (a) Comme précédemment, pour tout réel x, $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x)) = x$.

(b) Ici, la relation n'est vraiment pas évidente, sauf si l'on parvient à faire apparaître la fonction ch pour espérer une simplification. Pour cela on va utiliser la question 1.

D'après cette question, on a, pour tout réel t, $\mathrm{sh}(t)^2 = \mathrm{ch}(t)^2 - 1$. En particulier pour $t = \mathrm{argch}(x)$, nous avons

$$\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))^2 = 1\,\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))^2 - 1 = x^2 \implies \mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Exercice 2.3 (Etude des fonctions hyperboliques)**.**
Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier la définition de la dérivée et des limites vues en cours

1. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.
2. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.
3. $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

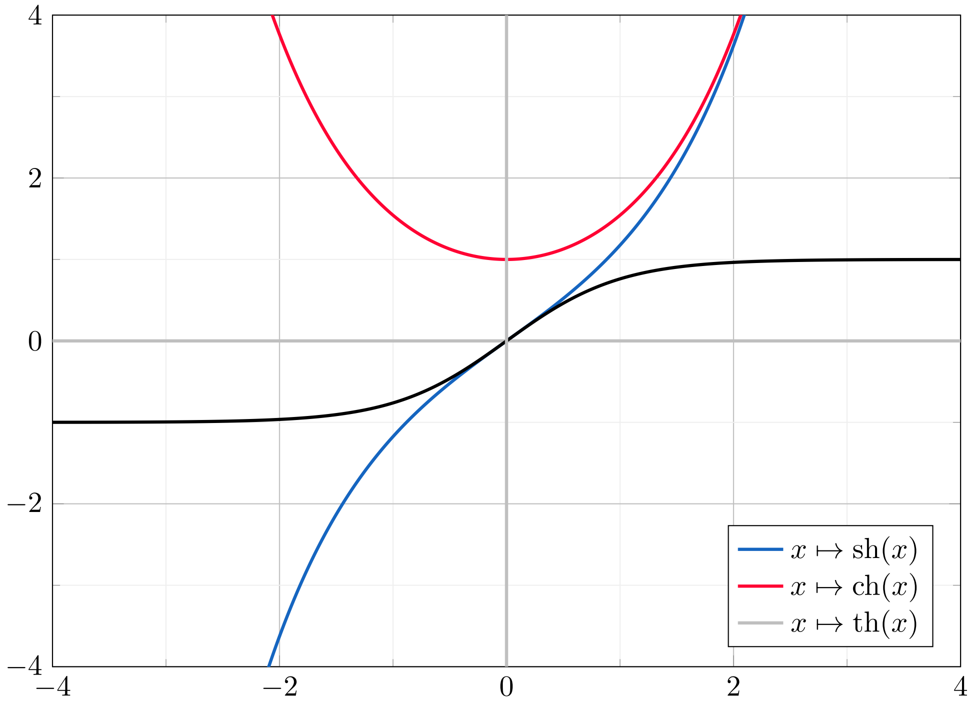
Correction

1. On rappelle que la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est définie pour tout réel x par
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$
Cette fonction est donc définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, +\infty[$. Elle est également de classe C^∞ comme somme de fonctions de classe C^∞.
Ainsi, pour tout réel x, la dérivée est donnée par
$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \mathrm{sh}(x).$$
La fonction ch est ainsi décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Enfin, la fonction admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On rappelle que la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est définie pour tout réel x par
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$
Cette fonction est donc définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$. Elle est également de classe C^∞ comme somme de fonctions de classe C^∞.
Ainsi, pour tout réel x, la dérivée est donnée par
$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \mathrm{ch}(x).$$
La fonction sh est ainsi croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty.$$
3. La fonction th est le rapport entre la fonction ch et sh, *i.e.*
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
Or $\mathrm{ch}(x) \neq 0$ pour tout x, donc la fonction th est définie pour tout réel x à valeurs dans $]-1, 1[$, elle est également dérivable sur ce même ensemble. Pour tout réel x , nous avons
$$th'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}.$$

La fonction th est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin

$$\lim_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1.$$

On rappelle les représentations graphiques de ces trois fonctions



Exercice 2.4 (Etude de la cotangente)**.**
On considère la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Cette fonction est la fonction inverse de la fonction tan *et s'appelle la cotangente, notée* cotan. *A ne pas confondre avec la réciproque de la fonction* tan *qui est l'arctangente, notée* arctan.

1. *Donner le domaine de définition de cette fonction u*
2. *Exprimer la dérivée de cette fonction.*
3. *Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son intervalle de définition.*

Correction

On se propose d'étudier l'inverse de la fonction tan dans le cadre de cet exercice.

1. La fonction cotan est définie pour tout réel x tel que $\sin(x) \neq 0$, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{pi\mathbb{Z}\}$.
2. La fonction u est également dérivable pour tout réel x qui n'est pas un multiple de π. Nous avons

$$u'(x) = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -1 - u(x)^2 = \frac{-1}{\cos(x)^2}.$$

3. On va étudier les limites de cette fonction en 0 et en π, pour en déduire les limites à chaque bornes.

- **Limite en 0 :** lorsque x tend vers 0, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ tend vers 1 et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ tend vers 0. Ainsi
$$\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty.$$
- **Limite en π :**
lorsque x tend vers π, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ tend vers -1 et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ tend vers 0. Ainsi
$$\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty.$$

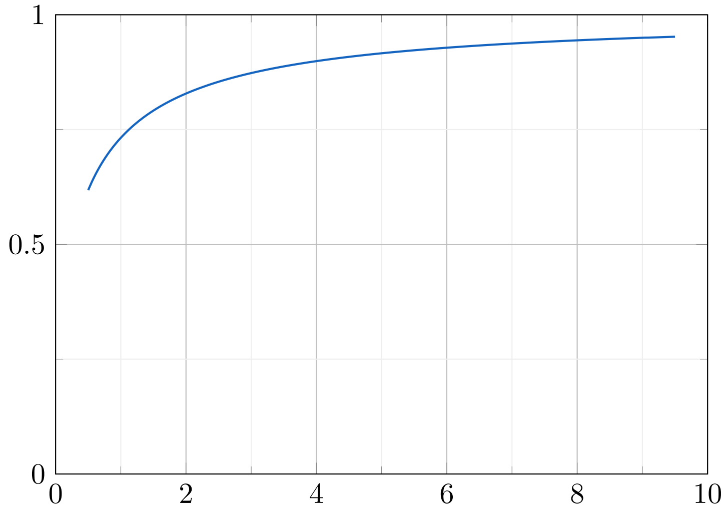
Exercice 2.5. *Déterminer les limites des fonctions suivantes*

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3+x-3}{2x^2-3x^3}$ *en* $+\infty$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x} - x$ *en* $+\infty$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ *en* $+\infty$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\tan(3x)}$ *en* 0.
5. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x\ln(x))}{x}$ *en* 0.
6. $f : x \mapsto \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$ *en* $+\infty$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^x-x-\cos(x)}{x^2}$ *en* 0.
8. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2+x-2}$ *en* 1.
9. $f : x \mapsto \left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ *en* $+\infty$.
10. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+2} - x$ *en* $+\infty$.

Correction

Toutes les limites suivantes sont des formes indéterminées, il va donc falloir raisonner sur le comportement asymptotique des différents termes pour lever cette indétermination.

1. Au voisinage de $+\infty$ le numérateur de la fonction f est équivalent à x^3 et son dénominateur est équivalent à $-3x^3$. Ainsi, la fonction f est équivalente à $\dfrac{x^3}{-3x^3} = \dfrac{-1}{3}$ au voisinage de $+\infty$ qui est aussi sa limite.
2. L'erreur à éviter est de dire que $\sqrt{x^2+2x}$ est équivalent à x lorsque x tend vers $+\infty$, cela signifierai que la fonction f tend vers 0, ce qui n'est pas le cas comme le montre graphique ci-dessous



Pour cela remarquons que $x^2+2x=(x+1)^2-1$, donc $\sqrt{x^2+2x} \underset{+\infty}{\sim} x+1$, donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x+1-x \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

3. Le terme prépondérant au numérateur est e^{3x} est le terme prépondérant au dénominateur est e^x lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^x} = \lim_{+\infty} e^{2x} = +\infty.$$

4. On rappelle que lorsque x tend vers 0, $\sin(x) \underset{x\sim 0}{\sim} x$ et que $\tan(3x) \underset{x\sim 0}{\sim} 3x$. On en déduit que la limite de la fonction f en 0 est égale à $1/3$.

5. Ici, on commence à composer plusieurs fonctions ensembles ce qui peut complexifier la tâche. Il faut bien avoir à l'esprit le comportement des différentes composantes pour déterminer la limite.

   Pour cela on se rappelle que lorsque x tend vers 0, $x\ln(x)$ tend vers 0. Or $\sin(x) \underset{x\sim 0}{\sim} x$. Ainsi $\sin(x\ln(x)) \underset{x\sim 0}{\sim} x\ln(x)$ donc $f(x) \underset{x\sim 0}{\sim} \ln(x)$ dont la limite est égale à $-\infty$ lorsque x tend vers 0.

6. La difficulté ici réside dans la présence de l'exposant x dans l'expression de la fonction f. Il faut donc écrire cette fonction f avec des fonctions plus connues dont on connaît des équivalents.

$$f(x) = \left(1-\frac{3}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}.$$

   Rappelons l'équivalent suivant de la fonction ln

$$\ln(1-x) \underset{x\sim 0}{\sim} -x.$$

   Ainsi $\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right) \underset{x\sim+\infty}{\sim} -\dfrac{3}{x}$. Donc $x\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right) \underset{x\sim+\infty}{\sim} -x\dfrac{3}{x} = -3$. Finalement, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction f est équivalente à e^{-3} qui est donc sa limite.

7. On commence par rappeler les équivalents en 0 qui seront utiles pour résoudre cette question

$$\cos(x) \underset{x\sim 0}{\sim} 1+\frac{x^2}{2},\ e^x \underset{x\sim 0}{\sim} 1+x+\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi la fonction f, au voisinage de 0 est équivalente à, en utilisant un développement limite à l'ordre 2[5],

$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} \underset{x \sim 0}{\sim} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = 1.$$

Ainsi la limite de f en 0 est égale à 1.

8. Ici, il faut penser à faire un petit changement de variable afin de se ramener à des développements limités que l'on connaît. On va donc effectuer le changement de variable $x = 1 + y$ et cela reviendra donc à déterminer la limite de f lorsque y tend vers 0. On a

$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y^2 + 3y}.$$

Or, lorsque y tend vers 0, $\ln(1+y)$ est équivalent à y. Ainsi après simplification du quotient, on trouve que f est équivalente à $1/3$ lorsque y tend vers 0, *i.e.* sa limite est égale à $1/3$ lorsque x tend vers 1.

9. Il faut ici utiliser la même astuce que précédemment et composer les équivalents par la suite.

$$f(x) = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}.$$

Or, lorsque $x \to +\infty$, $\mathrm{ch}(1/x) \sim 1 + \dfrac{1}{2x^2}$. Donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x^2}\right)) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$. En continuant notre composition de fonction, nous avons

$$x^2 \ln\left(1 + \right)) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \implies f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{e}.$$

10. Pour cette dernière fonction, il faudra à nouveau factoriser l'expression sous le radical. On a $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = \sqrt{\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{8}}$. Ainsi, cette fonction est équivalente à $x + \dfrac{3}{2}$ lorsque x tends vers $+\infty$ et la fonction f admet donc pour limite $\dfrac{3}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

5. Un développement limite à l'ordre 1 aurait conduit à un équivalent, au numérateur, égal 0, ce qui n'a bien évidemment pas de sens !

3 Continuité et convexité

Exercice 3.1 (Vérifier ses connaissances).

1. *Soit une fonction réelle f sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'un implique l'autre ?*
   A : la restriction de f à $[0,1]$ est continue,
   B : f est continue en tout point de $[0,1]$
2. *L'image d'un intervalle ouvert par une fonction réelle continue est-elle nécessairement un intervalle ouvert ?*
3. (a) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.*
   (b) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0,1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.*
   (c) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0,1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.*
   (d) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.*
4. *Soit une fonction réelle f définie sur $[a,b]$ et croissante, alors $f([a,b])$ est :*
   (a) $[f(a),f(b)]$.
   (b) $[f(b),f(a)]$.
   (c) *On ne peut pas savoir*
5. *Soit une fonction réelle f définie, continue sur $[a,b]$ et décroissante, alors $f([a,b])$ est :*
   (a) $[f(a),f(b)]$.
   (b) $[f(b),f(a)]$.
   (c) *On ne peut pas savoir*
6. (a) *Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   A : $f > 0$,
   B : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq \alpha$.
   (b) *Même question lorsque I est un segment $[a,b]$.*
7. (a) *Soit f une fonction réelle définie sur $[0,2]$. On sait que les restrictions de f à $[0,1]$ et à $[1,2]$ sont continues. Peut-on affirmer que f est continue ?*
   (b) *Même question si les restrictions de f à $[0,1]$ et $]1,2]$ sont supposées continues.*
8. *Une application contractante est-elle nécessairement continue ?*

Correction

1. La proposition B implique la proposition A par définition. En revanche, la réciproque est fausse. En effet, si on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   La restriction de f à $[0,1]$ est continue, mais elle n'est pas continue en tout point de $[0,1]$ car elle n'est pas en continue en 0. La limite à gauche à gauche de 0 n'est pas la même que la limite à droite de 0.

2. L'image d'un intervalle ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert. En effet, la fonction f définie sur $]0, 2\pi[$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est continue sur un ouvert mais $f\left(]0, 2\pi[\right) = [-1, 1]$ qui est un intervalle fermé.
3. (a) De telles fonctions n'existent pas. En effet, le théorème de Weierstrass assure que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.
   (b) Oui de telles fonctions existent. On peut considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est continue sur $]0, 1]$ et non bornée car la limite en 0 vaut $+\infty$.
   (c) Oui de telles fonctions existent. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(x) = \frac{1}{x+1},$$
   qui est continue sur $]0, 1]$. Elle est bornée par 1 mais la valeur 1 n'est jamais atteinte.
   (d) De telles fonctions n'existent pas. En effet, le théorème de Weierstrass assure que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.
4. Si f est une fonction croissante sur un intervalle, on ne peut rien dire que l'image de $[a, b]$ par f car on ne sait pas si f est continue ou non.
5. Cette fois-ci, f est continue et décroissante, on a donc
   $$f\left([a, b]\right) = \left[f(b), f(a)\right].$$
6. (a) La proposition B implique la proposition A, car s'il existe $\alpha > 0$ telle que $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in I$, a fortiori on a $f(x) > 0$. En revanche, la réciproque est fausse car la fonction $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur cet intervalle, est bien strictement positive pour tout x mais sa limite en $+\infty$ vaut 0 et cette valeur n'est jamais atteinte.
   (b) Les deux propositions sont équivalentes. En effet, la réciproque est assurée par le théorème de Weierstrass. f est strictement positive et continue sur un fermé borné, elle est atteint donc sa borne inférieure d'où l'existence de la constante $\alpha > 0$.
7. (a) Oui la fonction f est continue dans ce cas. En effet, il suffit de voir que, dans ce cas les limites de la fonction f en 1_+ et en 1_- sont égales, ce qui assure que la fonction est bien continue en 1.
   (b) Cette fois-ci, la réponse est non car la fonction f peut ne pas être continue en 1 à droite. En effet, si on considère la fonction f définie sur $[0, 2]$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in]1, 2]. \end{cases}$$
8. Oui, une application contractante est par définition lipschitzienne, elle est donc uniformément continue et donc continue.

Exercice 3.2 (Convexité)**.**
Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Monter que si g est convexe et que f est convexe et croissante, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Correction

Cet exercice consiste simplement à appliquer la définition de convexité deux fois et à utiliser l'hypothèse f est croissante. La fonction g étant convexe, pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } f \text{ est une fonction croissante}\\
&f \circ g(tx + (1-t)y) \leq f\left(tg(x) + (1-t)g(y)\right),\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } f \text{ est une fonction convexe}\\
&f \circ g(tx + (1-t)y) \leq tf \circ g(x) + (1-t)f \circ g(y).
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité montre bien que la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 3.3 (Une utilisation de la convexité)**.**
Soit f une application deux fois dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f''(x) = -x|f(x)|$$

et

$$f(0) = 1 \textit{ et } f'(0) = 0.$$

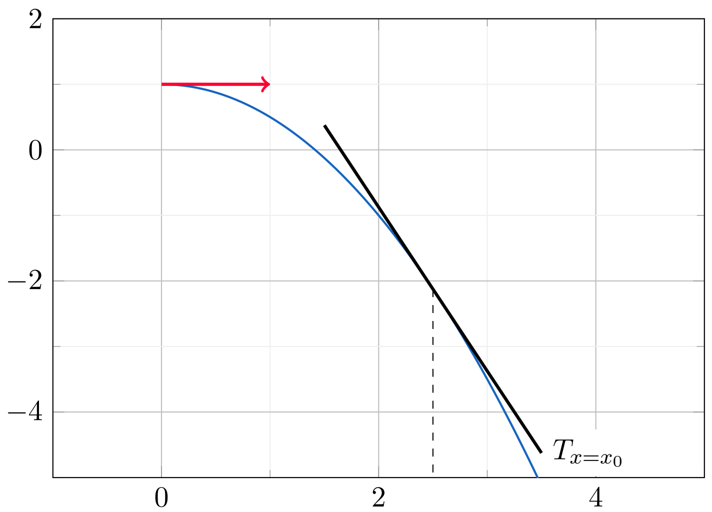
Montrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$

Correction

Il s'agit ici d'étudier la limite d'une fonction en utilisant des informations sur sa dérivée.

Etant donnée que f est deux fois dérivables et que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f''(x) = -x|f(x)| \leq 0$, on en déduit que f est une fonction concave.

On rappelle qu'une fonction est concave si et seulement si la courbe se trouve en dessous de ces tangentes. Ainsi, comme le montre le graphique ci-dessous, il nous suffit de montrer de qu'au moins une des tangentes de la courbe a une pente négative pour conclure sur la limite de f en $+\infty$.



La concavité de f assure que la fonction f' est décroissante et comme $f'(0) = 0$, on peut affirmer que $f' \leq 0$. Il nous reste à montrer que f' n'est pas toujours égale à 0.

Pour cela, remarquons que si f' était nulle, alors la fonction f serait constante et comme $f(0) = 1$, nous aurions $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Or $|f(x)| = -\dfrac{f''(x)}{x} = 0$ car f est constante. Mais cela contredit l'hypothèse selon laquelle $f(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$.

On peut donc en conclure qu'il existe un x_0 pour lequel $f'(x_0) < 0$ et la tangente en ce point a pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Or la tangente se trouve au dessus de la courbe de la fonction f. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Or $f'(x_0) < 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -\infty$ et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

4 Dérivabilité et régularité

Exercice 4.1 (Vérifier ses connaissances)**.**

1. *Monter, à l'aide de la définition du nombre dérivé, que la fonction* $f : x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que :* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$.
2. *Soit* f *une fonction réelle définie sur un intervalle* I*, et soit* a *un point intérieur de* I *(donc différent des bornes de* I*). Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   A : f *est dérivable en* a*,*
   B : f *est dérivable à droite et à gauche en* a
3. *Soit* f *une fonction réelle définie sur un segment* $[a, b]$*. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.*
   (a) *Si* f *est dérivable sur* $[a, b]$ *et si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f'(c) = 0$.
   (b) *Si* f *est dérivable sur* $]a, b[$ *et si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.
   (c) *Si* f *est de classe* C^1 *sur* $[a, b]$ *alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
   (d) *Si* f *admet un extremum en* $c \in [a, b]$ *et si* f *est dérivable en* c *alors* $f'(c) = 0$.
   (e) *Si* f *admet un extremum en* $c \in]a, b[$ *et si* f *est dérivable en* c *alors* $f'(c) = 0$.
4. *Soit* f *une fonction réelle, définie et dérivable sur un intervalle* I*, et soit* a *un point intérieur à* I*. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   (a) *A :* f *est strictement croissante sur* I*,*
   B : $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$.
   (b) *A :* f *admet un extremum local en* a*,*
   B : $f'(a) = 0$.
5. *Soit* f *une fonction réelle définie sur intervalle* I*. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
   (a) *Si* f *est dérivable sur* I*, alors elle est continue sur* I*.*
   (b) *Si* f *est deux fois dérivable sur* I *alors elle est de classe* C^2
   (c) *Si* f *est deux fois dérivable sur* I*, alors est elle de classe* C^1 *sur* I*.*
   (d) *Si* f *est convexe sur* I *alors elle est dérivable sur* I *et sa dérivée est croissante.*
   (e) *Si, pour* $n \in \mathbb{N}$*,* f *est* n *fois dérivable sur* I *et si* f *s'annule* $n + 1$ *fois alors* $f^{(n)}$ *s'annule au moins une fois sur* I*.*
   (f) *Si* f *est de classe* C^2 *sur* I *et si* $f'' \geq 0$ *alors* f *est convexe sur* I*.*
6. *Soit* f *une fonction réelle continue sur* $[0, 1]$ *et de classe* C^1 *sur* $[0, 1[$ *telle que la fonction* f' *admette une limite finie en* 1*. Peut-on affirmer que* f *est de classe* C^1 *sur* $[0, 1]$ *?*

Correction

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h, \\ &= 2x.\end{aligned}$$

2. On a A implique B car si la fonction $h \mapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite en 0, elle admet une limite à gauche et à droite de 0. En revanche, la réciproque est fausse car les limites de cette même fonction peuvent être différentes. On peut prendre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$.
3. (a) Vrai. C'est une conséquence du théorème de Rolle au cas où la fonction est dérivable sur le segment fermé $[a, b]$.
   (b) Faux. Car la fonction n'est pas nécessairement continue en a ou en b. Prenons par exemple la fonction $f : [0, 1]\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0, 1], \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Alors la fonction f est dérivable sur $]0, 1[$, on a bien $f(1) = f(0)$ mais pour tout $x \in]0, 1[,\ f'(x) = 1 \neq 0$.
   (c) Vrai. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis. Comme f est de classe C^1 sur $[a, b]$, elle est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$ et satisfait donc les hypothèses du théorème des accroissments finis. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ on a donc bien $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

   (d) Faux. Considérons la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definie par $f(x) = x$. Cette fonction admet un maximum égal à 1 en $x = 1$, mais pour autant la dérivée de la fonction f en 1 est égale à $1 \neq 0$.
   (e) Vrai. C'est la conséquence d'une proposition vue en cours.
4. On bien évidemment B implique A, c'est une caractérisation de la croissante stricte d'une fonction f. En revanche la réciproque est fausse. En effet, la fonction $x \mapsto x^3$ est bien strictement croissante, mais sa dérivée est nulle en 0.
5. (a) Vrai. Conséquence d'une proposition vue en cours.
   (b) Faux. On peut uniquement affirmer qu'elle est de classe C^1. La dérivée seconde de f n'est pas forcément continue.
   (c) Vrai. Puisque f' est dérivable, elle est donc continue.
   (d) Faux. Il suffit de prendre la fonction $x \mapsto |x|$, qui est bien convexe avec une dérivée croissante, mais qui n'est pas dérivable en 0.
   (e) Vrai. Il suffit d'appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle et le résultat se démontre alors par récurrence sur n.
   (f) Vrai. C'est une conséquence de la caractérisation des fonctions convexes.
6. Oui.

Exercice 4.2 (Calculs de dérivées)**.**
Dans cet exercice, on cherche à calculer les dérivées de fonctions composées.

1. *Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto e^{(u(x))}$.*
2. *Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^\star$. Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto \ln(u(x))$.*
3. *Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto e^{(1+u(x)^2)}$.*
4. *Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^\star$. Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{u(x)^2}}$.*
5. *Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto e^{\left(-\dfrac{1}{1-u(x)^2}\right)}$.*

Correction

1. Pour tout réel x, la dérivée de la fonction φ, notée φ' est définie par
$$\varphi'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$
2. Pour tout réel x, la dérivée de la fonction φ, notée φ' est définie par
$$\varphi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$
3. Pour tout réel x, la dérivée de la fonction φ, notée φ' est définie par
$$\varphi'(x) = 2u'(x)u(x)e^{(1+u(x)^2)}.$$
4. Pour tout réel x, la dérivée de la fonction φ, notée φ' est définie par
$$\varphi'(x) = \frac{-u'(x)}{u(x)^3\sqrt{1+\frac{1}{u(x)^2}}}.$$
5. Pour tout réel x, la dérivée de la fonction φ, notée φ' est définie par
$$\varphi'(x) = -\frac{2u'(x)u(x)}{(1-u(x)^2)^2}e^{\left(-\frac{1}{1-u(x)^2}\right)}.$$

Exercice 4.3 (Etude de la régularité d'une fonction).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

1. *La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*
2. *La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*
3. *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*

Correction

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$. De plus, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$. Il nous reste donc à résoudre le problème en 0 pour les différents points.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, nous avons $|f(x)| = x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$.
Or $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. De la même façon, nous avons $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, il faut vérifier la dérivabilité en 0. Or $\forall x \in \mathbb{R}^\star$ on a :
$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$
Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

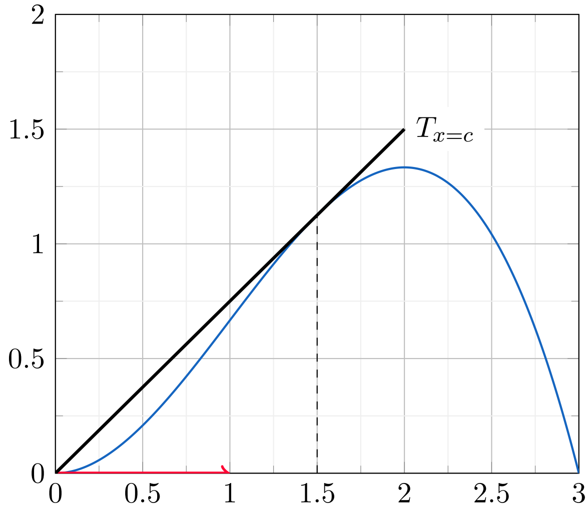
3. Il reste à étudier la continuité de la dérivée en 0. Pour cela calculons la dérivée de la fonction f. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ nous avons

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas définie. La fonction f' n'a donc pas de limite en 0 et n'est ainsi pas continue en 0. Par conséquent, f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4 (Usage du théorème de Rolle)**.**
Soit a un réel strictement positif, et soit f une fonction définie et dérivable de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$. On note Γ_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère centrée en l'origine O, de coordonnées $(0, 0)$. On suppose de plus de que $f(0) = f(a) = 0$ et que $f'(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un point M de Γ_f, distinct de O, tel que la tangente à Γ_f en M passe par le point O. On pourra considérer la fonction φ définie sur $]0, a]$ dans $\mathbb{R}$ par la $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.



2. Appliquer le résultat précédent à la fonction $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$.

Correction

1. On va suivre l'indication et étudiée la fonction φ à laquelle nous devrons certainement appliquer la théorème de Rolle.

   Pour cela, notons que la fonction φ n'est rien d'autre que le coefficient directeur liant l'origine du repère au point de coordonnées $(x, f(x))$, *i.e.*

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

   Comme f est dérivable sur $[0, a]$, la fonction φ l'est sur l'intervalle $]0, a]$. De plus, comme

$$\lim_{n\to 0} \varphi(x) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0.$$

   La fonction φ peut donc être prolongé par continuité en 0. De plus, $\varphi(a) = \dfrac{f(a)}{a} = 0$.
   La fonction φ est donc continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$ telle que $\varphi(0) = \varphi(a)$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle et dire qu'il existe $c \in]0, a[$ telle que $\varphi'(c) = 0$.

Or $\varphi'(c) = \dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2}$, mais comme $\varphi'(c) = 0$, on a donc $cf'(c) - f(c) = 0$, cest-à-dire $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Soit M le point de Γ_f d'abscisse c. M est distinct du point O et la tangente à Γ_f en M a pour coefficient directeur $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$, cette tangente est ainsi confondue avec la droite d'équation et passe donc par le point O.

2. Il suffit simplement d'appliquer ce qui précède au cas particulier où $f : [0,3]\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$.

   On a alors $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x} = x - \dfrac{x^2}{3}$. Cette fonction est continue et dérivable sur $[0,3]$ et on a $\varphi(0) = \varphi(3) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in [0,3]$ telle que $\varphi'(c) = 0$. Un tel c est obtenu en résolvant l'équation

$$\varphi'(c) = 0 \iff cf'(c) - f(c) = 0 \iff 1 - \frac{2}{3}c = 0 \iff c = \frac{3}{2}.$$

   Dans ce cas, la tangente recherchée a pour équation $y = f'(c)x = \dfrac{3x}{4}$.

Exercice 4.5 (Calculs de dérivées)**.**
Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'intervalle de définition, de dérivabilité ainsi que l'expression de la dérivée.

1. *la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. *la fonction* $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. *la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{1-\cos(x)}$.
4. *la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
5. *la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)}$.
6. *la fonction* $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
7. *la fonction* $f : x \mapsto e^{\sqrt{1-x^2}}$.

Correction

On va ici effectuer de simples calculs de dérivées en appliquant les formules usuelles.

1. La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[-1,+\infty[$. En revanche, elle est dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

   On rappelle que dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $x :\mapsto x^\alpha$ est $\alpha x^{\alpha-1}$.
   De plus nous avons à faire à une fonction composée $f = \sqrt{u}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) = x+1$ D'où

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

2. La fonction f est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

   On se rappelle que la dérivée de la fonction cos est la fonction $-\sin$ et que la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $-\dfrac{1}{x^2}$. On rappelle également que la dérivée de $f = u \circ v$ est $f' = v' \times u' \circ v$. Dans ce cas, on applique cette relation avec $v(x) = 1/x$ et $u(x) = \cos(x)$. D'où

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Comme $cos(x) \leq 1$ pour tout réel x la fonction f est bien définie et continue pour tout réel x. En revanche, elle n'est dérivable que pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 1$, soit $x \neq 2\mathbb{Z}\pi$, *i.e.* lorsque x n'est pas un multiple de 2π.

   On va directement calculer la dérivée avec ce qui précède comme explications

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2\sqrt{1-\cos(x)}}.$$

4. On ici à calculer la dérivée d'une fonction de la forme $\dfrac{1}{u}$ dont la dérivée est $-\dfrac{u'}{u^2}$. Ce qui nous donne

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

5. Ici la fonction f est bien définie et dérivable pour tout réel x, car pour tout $x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 > 1 > 0$.

   Pour le calcul de la dérivée, même chose que précédemment

$$f'(x) = \frac{-\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}.$$

6. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Ainsi la fonction f est définie et dérivable, pour tout x tel que $\dfrac{1}{1-x} > 0$, soit $x < 1$.

   On se rappelle que la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Ce qui nous donne, en considérant $u(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}.$$

7. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $1 - x^2 > 0$ soit $x \in [-1, 1]$. En revanche, la fonction est dérivable uniquement sur l'intervalle $]-1, 1[$.

   La fonction exponentielle admet comme dérivée elle même. Plus généralement la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$. Ainsi, en considérant $u(x) = \sqrt{1-x^2}$, nous avons,

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 4.6 (Etude de la dérivabilité).
Soit f la fonction réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} & si\ x \geq 1, \\ \dfrac{x^2-1}{x-3} & si\ x < 1. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Correction

La fonction f est continue en 1. En effet $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \dfrac{x^2-1}{x-3} = 0$.

La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ car la la dérivée f' n'est pas continue en 1. En effet, pour étudier la dérivabilité, on commence par voir que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, la dérivée est définie par

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq 1, \\ \dfrac{x^2-6x+1}{(x-3)^3} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Exercice 4.7 (Etude de la régularité d'une fonction).
Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & si\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ f(2x-1) & si\ \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. *La fonction g est-elle continue sur $[0,1]$?*
2. *La fonction g est-elle dérivable sur $[0,1]$? Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit dérivable sur $[0,1]$.*

Correction

On peut déjà noter que la fonction g est bien définie et il nous faut maintenant regarder si elle est de classe $C^1([0,1])$.

1. La fonction g est continue sur $[0,1]$. En effet, pour tout $x \in [0,1/2]$ la fonction g est continue car f est continue. Même chose pour tout $x \in]1/2,1[$. De plus $g(1/2) = f(1)$ et $\lim\limits_{x \to 1/2_+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1/2_+} f(2x-1) = f(0)$ car la fonction f est continue en 0.
   Or $f(0) = f(1)$ donc la fonction g est aussi continue en $x = 1/2$, elle est donc continue sur $[0,1]$.
2. Tout d'abord, notons que pour tout $x \neq 1/2$, la fonction g est dérivable et sa dérivée est continue comme composée de fonctions dérivables et continue sur cet intervalle.
   La question se pose donc uniquement au point $x = 1/2$. On va donc regarder ce qu'il se passe à droite et à gauche de ce point.

   - **A gauche de $x = 1/2$:** la fonction g est dérivable et on $g'(1/2) = 2f'(1)$.

- **A droite de** $x = 1/2$ **:** la fonction g est aussi dérivable et on a aussi $g'(x) = 2f'(2x-1)$. De plus $\lim\limits_{x \to 1/2_+} g'(x) = \lim\limits_{x \to 1/2_+} 2f'(2x-1) = 2f'(0)$.

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction g soit dérivable est $f'(0) = f'(1)$.

Exercice 4.8 (Dérivations)**.**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales). On essaiera également, lorsque cela est possible, d'étudier les variations de la fonction.

1. $f : x \mapsto e^{x + \frac{1}{x}}$.
2. $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$.
4. $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$. *On ne cherchera pas à établir les variations de cette fonction.*

Correction

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. Ainsi, pour tout x non nul, la dérivée f' est donnée par
$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right))e^{x + \frac{1}{x}}.$$
La dérivée s'annule en $x = 1$, elle positive si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et négative si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.
On peut maintenant regarder les limites de la fonction. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 0$. De la même façon pour les valeurs positives, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$.

Ce qui permet de tracer le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

On pourra aussi remarquer que l'on a une tangente horizontale à gauche de 0.

2. La fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ car la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x^2}$. La dérivée, pour tout x non nul, est donnée par
$$f'(x) = 2x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - x^2\frac{\frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Par croissante comparée, remarquons que la dérivée tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Etant donnée que la fonction f est paire, il nous suffit de regarder ce qui se passe pour $x > 0$ et on en déduira les variations pour $x < 0$ par symétrie.

Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 2x\left(\ln\left(1+x^2\right) - 2\ln(x) - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

Remarquons aussi, par croissante comparée, que les limites à gauche et à droite de 0 de la fonction f sont égales à 0. Ainsi la fonction f peut être prolongée par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

Enfin, on se souvient que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Par un raisonnement similaire, on trouve que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

3. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ uniquement. De plus pour tout réel $x > 0$ nous avons

$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = e^{-x}\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right).$$

Nous avons $f'(x) \geq 0 \iff e^{-x}\left(\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right) \geq 0 \iff 1-2x \geq 0$ et donc si seulement si $x \leq \dfrac{1}{2}$.

Par croissance comparée, notons également que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0. On peut alors tracer le tableau de variation suivant

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

On a aussi une tangente verticale en 0.

4. La fonction f est définie sur $[-1,1]$ mais elle est dérivable sur $]-1,1[$ uniquement à cause de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Sur ce même ensemble, la dérivée est donnée par

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x(1-x)-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le signe de f' dépend du signe de son numérateur que l'on peut réécrire $(x-1)(2x+1)$. On a donc

$$f'(x) = 0 \iff \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 1.$$

En effet, pour $x = \dfrac{1}{2}$ le résultat est évident. Remarquons aussi que la dérivée peut se s'écrire :

$$f'(x) = -\frac{(1-x)(2x+1)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{-(2x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)}}.$$

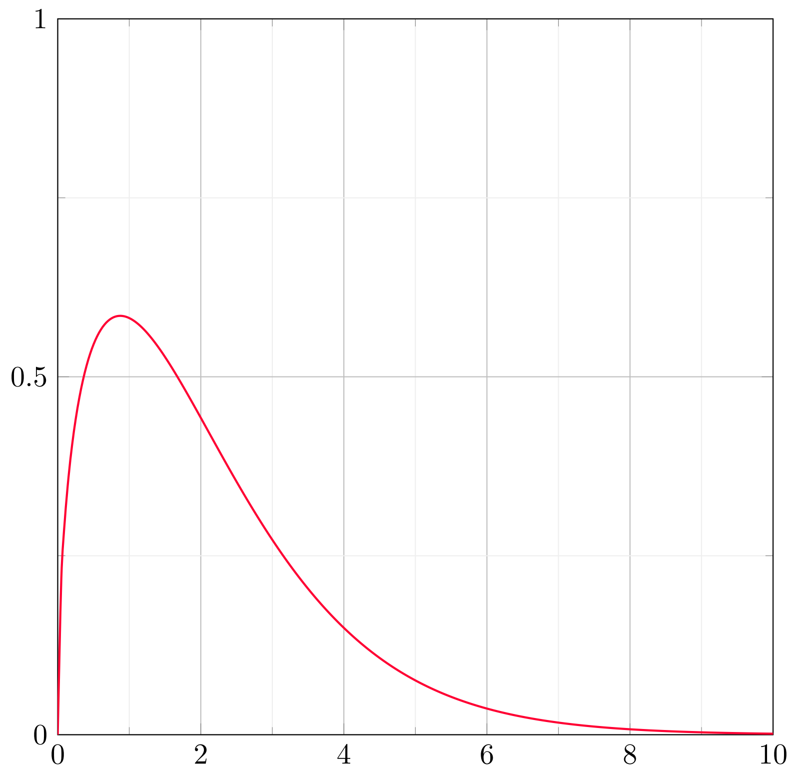
Ainsi la fonction f est dérivable en 1 mais pas en -1. On a donc le tableau de variation suivant

x	-1		-1/2		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$f(-0.5)$	↘	0

5. Cette fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et dérivable pour tout $x > 0$.
   Ainsi, pour tout x
   $$f'(x) = \frac{1}{(e^x - 1)^2}\left((e^x - 1)\frac{3}{2}\sqrt{x} + x\sqrt{x}e^x\right)$$
   On ne cherche pas à étudier les variations de la fonction. On va simplement étudier ses limites en 0 et en $+\infty$.

   - **Limite en $+\infty$:** on utilise le fait que l'exponentielle est prépondérante devant la fonction x^α pour tout $\alpha > 1$. On a donc
     $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$
   - **Limite en 0 :** le problème vient du fait que le dénominateur tend vers 0 lorsque x tend vers 0. En revanche, on sait que $e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$, donc $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ et donc la fonction f est équivalente à $\sqrt{x}$ au voisinage de 0. On a donc
     $$\lim_{x \to 0_+} f(x) = 0.$$

     On en donne une représentation graphique à défauts.



Exercice 4.9 (Une application du théorème de Rolle)**.**
Soient f et g deux fonctions dérivables d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g(a) \neq g(b)$ et que g', la dérivée de la fonction g, ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

On pensera à utiliser le théorème de Rolle et on considérera la fonction $\varphi : [a, b]\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Correction

Comme f et g sont dérivables sur $[a, b]$, la fonction φ l'est également. L'énoncé suggère d'utiliser le théorème de Rolle, il nous faut donc montrer que la fonction φ prend la même valeurs en deux points différents. Ici seuls les valeurs a et b sont intéressantes et on va donc évaluer φ en ces deux points. Ce qui nous donne, en $x = a$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a),\\ &= f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)},\\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a).\end{aligned}$$

De même en $x = b$:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b),\\ &= \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b),\\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $\varphi(a) = \varphi(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) &= 0,\\ (f(b) - f(a))g'(c) &= (g(b) - g(a))f'(c),\\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)}.\end{aligned}$$

5 Développement limité

Exercice 5.1 (Un développement limité de la fonction tangente).
qui L'objectif de cet exercice est de retrouver le développement limité à l'ordre 8 *de la fonction* $x \mapsto \tan(x)$*, au voisinage de* 0*, en se servant uniquement du fait que* $\tan(x) = x + o(x^2)$

1. *Que peut-on dire de la parité de la fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *?*
2. *Déterminer un développement limité de* $1 + \tan^2$*.*
3. *Rappeler l'expression de la dérivée de* $x \mapsto \tan(x)$ *et en déduire un développement limité à l'ordre* 4 *de cette même fonction.*
4. *Répéter les deux questions précédente jusqu'à l'obtention du résultat souhaité.*

Correction

On va essayer de déterminer le développement limité d'une fonction à un ordre supérieur en utilisant uniquement la connaissance de son développement limité à l'ordre 1.

1. On rappelle que la fonction tan est une fonction impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, nous avons
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$
Or la fonction sin est impaire et la fonction cos est paire, donc tan est impaire.
2. Comme nous avons $\tan(x) = x + o(x^2)$, alors un développement limité de $1 + \tan^2(x)$ est donné par $1 + x^2 + o(x^3)$.
3. On rappelle que la fonction tan est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ et elle est donnée par
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$
Dans la question précédente, nous avons déterminé un développement limité de $1 + \tan^2$ qui est un développement limité de la dérivée de la fonction tan. D'où
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$
4. On répète maintenant le même processus qu'à la question précédente. Cette fois-ci
$$\tan^2(x) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5).$$
D'où
$$1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5).$$
Or cette fonction n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction tan, nous avons alors
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$
Et on recommence une dernière fois pour enfin obtenir le développement limité à l'ordre 8 de la fonction :
$$1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^7).$$

On calcule une dernière fois la primitive de cette fonction, ce qui nous donne le résultat attendu :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Exercice 5.2 (Développement limité)**.**
On considère la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}.$$

1. *Donner l'ensemble de définition de la fonction u.*
2. *Rappeler le développement limité de la fonction $x \mapsto e^x$ en 0, à l'ordre 3.*
3. *Déterminer un développement limité du dénominateur à l'ordre 3 en 0.*
4. *En déduire un développement limité en 0 de la fonction u à l'ordre 3.*

Correction

1. La fonction u est définie pour tout réel x tel que $1 + x > 0$, *i.e.* pour tout $x > -1$.
2. Le développement limité de la fonction $x \mapsto e^x$ à l'ordre 3 est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

3. Il suffit de se rappeler du développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Or

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + o(x^3).$$

En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3).$$

4. En multipliant les deux deux développements limités, on obtient celui de la fonction u. Plus précisément

$$\begin{aligned} u(x) &= \underbrace{e^x} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}, \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)\right), \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3). \end{aligned}$$

Exercice 5.3 (Etude d'une fonction avec radicale)**.**
On considère la fonction u définie par

$$u(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

1. *Donner l'ensemble de définition de la fonction u.*
2. *Déterminer l'expression de sa dérivée et préciser l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable.*
3. *Déterminer un développement limité de u, en 0, à l'ordre 5.*

Correction

1. La fonction u est définie pour tout réel x tel que $1 - x^2 \geq 0$, *i.e.* pour tout réel $x \in [-1, 1]$. Elle est également continue sur cet intervalle.
2. La fonction u est cependant dérivable sur l'intervalle $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$ nous avons

$$u'(x) = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Il suffit de se rappeler du développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Or

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-4)x^4}{4!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha-5)x^5}{5!} + o(x^5).$$

Dans notre cas, cela nous donne, si on ne conserve que les termes d'ordre 5 ou moins :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).$$

Ainsi, le développement limité de la fonction u nous est donné par

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).$$

Exercice 5.4 (Etude d'une fonction rationnelle)**.**
On considère la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}.$$

1. *Donner l'ensemble de définition de la fonction u.*
2. *Quelle est la limite de la fonction u en -1 ? en $+\infty$?*
3. *Déterminer un développement limité du numérateur à l'ordre 4 en 0.*
4. *Déterminer un développement limité du dénominateur à l'ordre 3 en 0.*
5. *En déduire un développement limité, en 0, de la fonction u.*
6. *En déduire la valeur de la fonction u en 0.*

Correction

1. La fonction u est définie pour tout réel x tel que $x - \ln(x+1) \neq 0$ **et** $x + 1 > 0$. Ainsi, la fonction f est définie pour tout $x > -1$ et $x \neq 0$.
2. Etudions les limites en 1 et en $+\infty$.

   - **Limite en -1 :** il nous suffit de regarder la limite au dénominateur, nous avons

$$\lim_{x \xrightarrow{+} \infty} x - \ln(x+1) = +\infty \implies \lim_{x \xrightarrow{+} \infty} u(x) = 0.$$

- **Limite en $+\infty$:** on va ici utiliser un théorème des croissances comparées pour les fonctions qui entrent en jeu.

  Au dénominateur, la fonction $x \mapsto x$ est prépondérante. Le dénominateur tend vers $+\infty$. Pour le numérateur, il aura le même comportement que la fonction $x \mapsto e^x$ qui tend vers $+\infty$ également.
  Or la fonction exponentielle est prépondérante devant la fonction linéaire, donc

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty.$$

3. On va écrire un développement limité de chacun des termes qui définissent le numérateur. On a
   - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$,
   - $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

   Ainsi, un développement limité à l'ordre 4 du numérateur est donné par

$$x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

4. On procède de la même façon au dénominateur en s'arrêtant à l'ordre 2 cette fois-ci, en utilisant le fait que $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
   Ainsi, un développement limité à l'ordre 3 du numérateur est donné par

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

5. On doit commencer par écrire un développement limité de $\dfrac{1}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}$.

   Or

$$\frac{1}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}} = \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x}.$$

   Ce qui nous donne le développement limité suivant

$$\frac{1}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}} = \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x} = \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{2}{3}x\right) + o(x^{-1}).$$

   Des deux questions précédentes, on en déduit qu'au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre 1 de la fonction u est donné par

$$u(x) = \frac{2}{x^2}(\left(1 + \frac{2}{3}x\right)\left(2 + \frac{x}{3}\right) = 2 + \frac{5x}{3} + o(x).$$

6. On en déduit que la fonction u admet une limite finie en 0 qui est égale à 2. La fonction u est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $u(0) = 2$.

Exercice 5.5 (Développements limités)**.**
Déterminer les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes

1. $u : x \mapsto e^x - \mathrm{ch}(x)$.
2. $u : x \mapsto \sin(3x)$.
3. $u : x \mapsto (1 + 3x^2)^4$.
4. $u : x \mapsto \cos(x) - 1 - x^2/2$.

Correction

Vous avez plusieurs possibilités pour résoudre cet exercice. Vous pouvez déterminer les développement limités des différents fonctions à l'aide de la formule de Taylor ou les employer directement si vous vous en souvenez.

1. On rappelle les deux développement limités à l'ordre de 4 des deux fonctions qui entrent en jeu. Pour la fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Pour la fonction ch :

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

On peut alors combiner ces deux développements limités pour obtenir celui de la fonction u :

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

2. On rappelle le développement limité de la fonction sin :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Ainsi, la développement limité en 0 de la fonction u est donné par

$$u(x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^4) = 3x - \frac{9x^3}{4} + o(x^4).$$

3. On rappelle le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$$

Ici, nous aurions pu nous arrêter un peu plus tôt dans le développement limité car nous devons remplacer x par $3x^2$ dans la relation et ne conserver que les termes d'ordres inférieurs à 4.

$$u(x) = 1 + 12x + 12\frac{(3x)^2}{2!} + o(x^4) = 1 + 12x + 54x^4 + o(x^4).$$

4. Le développement limité à l'ordre 4 de la fonction cos en 0 est donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Ainsi, le développement limité de la fonction u est donné par

$$u(x) = x^2 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Exercice 5.6 (Développements limités)**.**
Déterminer les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes

1. $u : x \mapsto \sin(3x) + e^{-x}$.
2. $u : x \mapsto \cos(2x) - \ln(1+x)$.
3. $u : x \mapsto \dfrac{1}{1+2x^2}$.
4. $u : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$.
5. $u : x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

Correction

Pour les différentes questions, on donnera le développement limité des différentes fonctions et on effectuera les calculs.

1.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \underbrace{\sin(3x)} - \underbrace{e^x}, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise les DL usuels} \\
&= 3x - \frac{(3x)^3}{3!} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + o(x^4), \\
&\quad \downarrow \text{ On réduit} \\
&= -1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{14x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4).
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \underbrace{\cos(2x)} - \underbrace{\ln(1+x)}, \\
&= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4), \\
&= 1 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{1+2x^2}, \\
&= 1 - (2x^2) + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4), \\
&= 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \ln(\text{ch}(x)), \\
&= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + o(x^4), \\
&\quad \downarrow \text{ réécriture} \\
&= \ln\left(1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right) + o(x^4)\right) + o(x^4), \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^4), \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{-x^4}{8} + o(x^4).
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
u(x) &= (\ln(1+x))^2, \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)^2, \\
&= x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^4}{3} - x^3 + o(x^4), \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).
\end{aligned}
$$

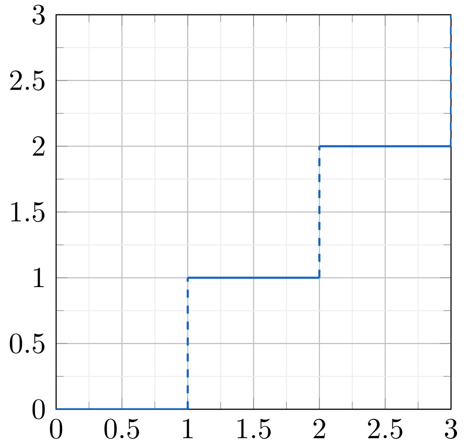
6 Primitives et Intégrales

Exercice 6.1 (Contrôle des connaissances)**.**

1. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
   (a) *Toute fonction réelle continue est continue par morceaux.*
   (b) *La fonction f définie par :*
   $$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \tan(x)$$
   est continue par morceaux sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) *La fonction partie entière est continue par morceaux.*
   (d) *Si une fonction réelle f est continue par morceaux et positive sur $[a, b]$ alors* $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
   (e) *Si une fonction réelle f est continue par morceaux, positive et non nulle sur $[a, b]$ alors* $\int_a^b f(t)dt > 0$.
   (f) *Si une fonction réelle f est continue, positive et non nulle sur $[a, b]$ alors* $\int_a^b f(t)dt > 0$.
   (g) *Toute fonction réelle continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.*
2. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Justifier qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ soit égal à la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.*
3. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   (a) A : $f = 0$,
   B : $\int_a^b f(t)dt = 0$.
   (b) A : $f \geq 0$,
   B : $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
   (c) A : $f = 0$,
   B : $f \geq 0$ *et* $\int_a^b f(t)dt = 0$.
4. *A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

Correction

1. (a) VRAI. Si une fonction est continue sur un segment $[a, b]$, elle est alors continue sur toute subdivision de ce segment.
   (b) FAUX. En effet la fonction tan n'a pas de limite finie à droite de $\frac{-\pi}{2}$ ni à gauche de $\frac{\pi}{2}$.
   (c) VRAI. Il s'agit d'une fonction en escalier.



(d) VRAI. La fonction est positive donc son intégrale aussi.

(e) FAUX. Car la fonction peut être nulle presque partout, sauf sur un ensemble fini de points mais dans ce cas l'intégrale reste nulle.

(f) VRAI. C'est la conséquence d'un résultat vu en cours

(g) VRAI. C'est la conséquence d'un autre résultat vu en cours.

2. La valeur moyenne de f sur le segment $[a, b]$ est égale à

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

f est continue sur un segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes. On note

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

On a donc

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Donc la valeur moyenne de f est comprise entre m et M et $f([a, b]) = [m, M]$, il existe donc $c \in [a, b]$ telle que $f(c)$ soit égale à la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ car f est continue.

3. (a) La proposition A implique la proposition B. En revanche la réciproque est fausse. Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto \sin(x)$ définie pour tout $x \in [-a, a]$, $a > 0$. Alors

$$\int_{-a}^{a} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_{t=-a}^{t=a} = 0.$$

(b) Si f est positive, son intégrale est bien évidemment positive. Donc A implique B. La réciproque reste fausse. En effet, considérons la fonction f définie de $[-1, 2]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$, alors

$$\int_{-1}^{2} tdt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{t=-1}^{t=2} = \frac{3}{2}.$$

(c) Cette fois-ci les deux propositions sont bien équivalentes. C'est la conséquence d'un résultat vu en cours.

4. On nous demande de déterminer une primitive de la fonction ln à l'aide d'une intégration parties. On va donc considérer $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto \ln(x)$.

$$\int \ln(t)dt = \int 1 \times \ln(t)dt = t\ln(t) - \int (t \times \frac{1}{t})dt = t\ln(t) - t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6.2 (Changement de variable)**.**
A l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$*, déterminer la valeur de l'intégrale suivante*

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{3+\sin^2(t)} dt.$$

Correction

On va suivre l'indication et effectuer le changement de variable suggéré. Notons que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est bien bijective sur $[0, \pi/2]$ et que l'on $du = \cos(t)dt$ et que lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \pi/2]$, u varie de 0 à 1. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{3+\sin^2(t)} dt &= \int_0^1 \frac{1}{3+u^2} du, \\
&\downarrow \text{ on identifie approximativement la dérivée de arctan} \\
&\downarrow \text{ que l'on va essayer de faire apparaître.} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} du, \\
&\downarrow \text{ On pose } s = \frac{u}{\sqrt{3}} \text{ donc } ds = du/\sqrt{3} \\
&= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2} ds, \\
&\downarrow \text{ on reconnaît la dérivée de arctan.} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(s)\right]_{s=0}^{s=1/\sqrt{3}}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 6.3 (Changement de variable)**.**
A l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$*, déterminer la valeur de l'intégrale suivante*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)} dt.$$

Correction

On va suivre l'indication et effectuer le changement de variable suggéré. Notons que la fonction $t \mapsto \cos(t)$ est bien bijective sur $[0, \pi/4]$ et que l'on $du = -\sin(t)dt$ et que lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \pi/4]$, u varie de 0 à $\sqrt{2}/2$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)} dt &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt, \\
&\downarrow \text{ on va faire apparaître la fonction cos via } \cos^2(t)+\sin^2(t)=1 \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{(1-\cos^2(t))\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt, \\
&\downarrow \text{ on applique le changement de variable}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-(1-u^2)}{1+u^2} du,\\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{(1-u^2)}{1+u^2} du,\\
&\quad \downarrow \text{ en utilisant le fait que } 1-u^2 = 2-(1+u^2).\\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2-(1+u^2)}{1+u^2} du,\\
&\quad \downarrow \text{ on sépare les deux termes de la différence}\\
&= \underbrace{-\int_{\sqrt{2}/2}^1 1du}_{} + \underbrace{\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{1+u^2} du}_{},\\
&\quad \downarrow \text{ on reconnaît la dérivée de arctan}\\
&= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + [2\arctan(u)]_{u=\sqrt{2}/2}^{u=1},\\
&= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 6.4 (Intégrale de Wallis)**.**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$ *et* $K_n = (n+1)I_nI_{n+1}$.

1. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = I_n$.
2. (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   (b) *En déduire des expressions de* I_{2p} *et* I_{2p+1}*, pour tout* $p \in \mathbb{N}$*, à l'aide de factorielles.*
3. (a) *Montrer que* $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.
   (b) *Montrer que la suite* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*
   (c) *En déduire que* $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Correction

1. Il s'agit essentiellement de voir comment passer de la fonction cos à la fonction sin. Pour cela on se rappelle que pour tout réel x

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Il restera alors à effectuer un petit changement de variable. On peut donc réécrire I_n

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx,\\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx,\\
&\quad \downarrow \text{ on pose le changement de variable affine (donc } C^1\text{), } t = \frac{\pi}{2} - x.\\
&= \int_{\pi/2}^0 \sin^n(t)\,(-dt),\\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt,\\
&= J_n.
\end{aligned}
$$

2. (a) On va à nouveau utiliser des propriétés des fonctions trigonométriques pour établir cette égalité.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)dx, \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{n}(x)\cos^2(x)dx, \\
&\downarrow \text{ on utilise le fait que } \cos^2(x) = 1-\sin^2(x) \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{n}(x)(1-\sin^2(x))dx, \\
&= I_n - \int_0^{\pi/2} \cos^{n}(x)\sin^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant travailler sur cette deuxième intégrale en gardant à l'esprit que l'on cherche à faire apparaître I_n. Faisons une première intégration par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto \sin(x)\cos^n(x)$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= I_n - \int_0^{\pi/2} \cos^{n}(x)\sin^2(x)dx, \\
&\downarrow \text{ intégration par parties} \\
&= I_n - \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x)\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n+1}\cos^{n+2}(x)dx, \\
&= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc $I_{n+2}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) = I_n$, soit $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

(b) La relation précédente nous permet de lier les termes de I_n de deux en deux. Pour avoir une idée des valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} on va donc avoir besoin des valeurs de I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1$$

Ainsi

- **pour les valeurs paires de n :**

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times(2p-5)\times\cdots\times 1}{2p\times(2p-2)\times(2p-4)\times\cdots\times 2} I_0, \\
&= \frac{2p\times(2p-1)\times(2p-2)\times(2p-3)\times\cdots\times 2\times 1}{(2p\times 2(p-1)\times 2(p-2)\times\cdots\times 2\times 1)^2} I_0, \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0.
\end{aligned}$$

- **pour les valeurs impaires de n :**

$$\begin{aligned}
I_{2p+1} &= \frac{(2p)\times(2p-2)\times(2p-4)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1} I_0, \\
&= \frac{(2p\times 2(p-1)\times 2(p-2)\times\cdots\times 2\times 1)^2}{(2p+1)\times(2p)\times(2p-1)\times(2p-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1} I_0, \\
&= \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} I_0.
\end{aligned}$$

3. (a) Pour montrer ce premier résultat, on va exploiter le lien entre I_{n+2} et I_n et en utilisant le fait que $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.

Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, nous avons $0 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $\cos^{n+2}(x) \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$. Par croissante de l'intégrale, on a donc $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ et comme $I_n > 0$, on peut donc écrire

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_n}{I_n} = 1.$$

Or $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, ce qui, en réinjectant dans l'inégalité précédente, nous donne

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_n}{I_n} = 1.$$

Le théorème des gendarmes nous donne $I_{n+1} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$, donc $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.

(b) Pour montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on va montrer que $K_{n+1} = K_n$.

$$K_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = \cancel{(n+2)} I_{n+1} \frac{n+1}{\cancel{n+2}} I_n = (n+1)I_n I_{n+1} = K_n.$$

(c) Nous avons précédemment montré que $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$, on en déduit donc que $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)I_n^2$.
Or la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc, pour tout n, nous avons $K_n = I_0 I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi

$$I_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Par continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on a alors $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 6.5 (Primitives et Intégrales)**.**

1. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.*
   (a) $f : x \mapsto 5x^3 - 3x^2 + 5$.
   (b) $f : x \mapsto 2\cos(x) - 3\sin(x)$.
   (c) $f : x \mapsto -3e^x + x^2 - 3$.
   (d) $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3x}}$.
   (e) $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 6x^3 - 5x}{x^4}$.
2. *Calculer les intégrales suivantes*
   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$.
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$.
   (c) $\displaystyle\int_e^{e^{e^2}} \frac{1}{t\ln(t^2)} dt$.
   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} dt$.
   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt$. *On utilisera le fait que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$

Correction

Dans cet exercice, nous noterons F la primitive de la fonction f.

1. (a) Il s'agit ici de se rappeler que la primitive de $x \mapsto x^n$ est $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$. Ainsi une primitive de la fonction f est

$$F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 5x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Là on se souvient des primitives des fonctions circulaires. Par exemple, la primitive de $x \mapsto \sin(x)$ est $-\cos(x)$ et la primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est $\sin(x)$. Ainsi une primitive de la fonction f est

$$F(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(c) La fonction exponentielle admet elle même comme primitive. Ainsi une primitive de la fonction f est

$$F(x) = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 3x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(d) Il s'agit ici de trouver la primitive d'un monôme. Ainsi une primitive de la fonction f est

$$F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3x} + C = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{3}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(e) On va commencer par réécrire la fonction f comme une somme de monômes. Ce qui nous donne

$$f(x) = 3x^{-2} - 6x^{-1} - 5x^{-3}.$$

Ainsi la primitive de la fonction f est

$$F(x) = -\frac{3}{x} - 6\ln(x) + \frac{5}{2}x^{-2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. (a) On ne commence pas avec la forme la plus simple à reconnaître mais allons-y. On a un produit entre deux fonctions, en y regardant de plus plus on identifie un produit de la forme

$$u'(t)u(t)^{1/2},\ \text{où } u(t) = \ln(t).$$

Une primitive est alors donnée par $\dfrac{2}{3}u(x)^{3/2}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t}dt &= \frac{1}{t}(\ln(t))^{\frac{1}{2}}dt, \\
&\quad \downarrow \text{ on utilise l'indication ci-dessous} \\
&= \left[\frac{2}{3}\ln(t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=1}^{t=2}, \\
&= \frac{2}{3}\ln(2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

(b) Là on reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ dont une primitive est $\ln(u(t))$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}dt,\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_{t=0}^{t=1},\\ &= \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

(c) Cela se complique mais rien d'insurmontable pour le moment, il s'agit à nouveau de reconnaître une expression de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ dont une primitive est $\ln(u(t))$.

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t^2)}dt &= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t^2)}dt,\\ &= \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{\frac{2}{t}}{\ln(t^2)}dt,\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(\ln(t^2))\right]_{t=e}^{t=e^2},\\ &= \frac{1}{2}(\ln(4)-\ln(2)),\\ &= \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

(d) Ici, il s'agit simplement de reconnaître la dérivée d'une fonction.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-t^2/2}dt &= \int_0^{+\infty} -te^{-t^2/2}dt,\\ &= \left[-e^{-t^2/2}\right]_{t=0}^{t\to+\infty},\\ &= 1.\end{aligned}$$

(e) Pour ce dernier calcul, nous devrons procéder à une intégration par parties en dérivant la partie "polynomiale" et en intégrant l'exponentielle.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2/2}dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\times(-t)e^{-t^2/2}dt,\\ &= \left[te^{-t^2}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 1\times e^{-t^2/2}dt,\\ &= \sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

Exercice 6.6 (Primitives et Intégrales)**.**

1. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.*

   (a) $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$.

   (b) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x^2-1)^2}$, *on commencera par montrer que pour tout* $x \neq \{-1,1\}$, *on a :*

$$f(x) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^2}$$

(c) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

(d) $f : x \mapsto (x^2+2)e^{4x}$

2. *Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé.*

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln(t))^3}$ *; en posant* $x = \ln(t)$.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\arccos(t)}dt$ *; en posant* $x = \arccos(t)$.

Correction

1. On commence par simplement déterminer les primitives des fonctions

(a) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Ses primitives sont données par

$$\int (x-1)\sqrt{x}dx = \int x^{3/2} - x^{1/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Pour vérifier l'égalité entre les deux fonctions, on va se contenter de réduire l'expression au même dénominateur. On laisse le soin au lecteur d'effectuer les calculs.

Cependant notons que cette fonction est bien définie et continue sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^2}dx,\\ &= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x^2+2x+5 \neq 0$. Or ce trinôme a un discriminant négatif, il est donc toujours positif (*i.e.* du signe du coefficient devant le monôme de degré 2). La fonction f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On va essayer de reconnaître une expression de la forme u'/u.

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x}{x^2+2x+5}dx,\\ &= \int \frac{1}{2}\frac{2x+2-2}{x^2+2x+5}dx,\\ &= \int \underbrace{\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5}}_{} - \frac{1}{x^2+2x+5}dx,\\ &\quad \downarrow \text{ on se concentre sur le premier terme}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \underbrace{\frac{1}{x^2+2x+5}}_{}dx,\\ &\quad \downarrow \text{ on va faire apparaître une forme canonique de notre expression restante}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx,\\ &\quad \downarrow \text{ on divise par 4 au numérateur et au dénominateur}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{4}\right)^2+1}dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\downarrow \text{ on pose } u=(x+1)/2 \text{ donc } dx=2du\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du,\\
&\downarrow \text{ on reconnait ici la dérivée de l'arctan}\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(d) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On va commencer par séparer notre somme en deux pour le calcul de la primitive.

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int (x^2+2)e^{4x}dx,\\
&= \int x^2e^{4x}dx + \underbrace{\int 2e^{4x}dx}_{},\\
&\downarrow \text{ on se focalise sur le deuxième terme dans la somme}\\
&= \underbrace{\int x^2e^{4x}dx}_{} + \frac{1}{2}e^{4x},\\
&\downarrow \text{ on fait ensuite une IPP sur le premier terme}\\
.&= \int \frac{x^2}{4}4e^{4x}dx + \frac{1}{2}e^{4x},\\
&= \frac{x^2}{4}e^{4x} - \int \frac{x}{2}e^{4x}dx + \frac{1}{2}e^{4x},\\
&\downarrow \text{ on refait une IPP sur le terme restant}\\
&= \frac{x^2}{4}e^{4x} - \frac{x}{8}e^{4x} + \int \frac{1}{8}e^{4x}dx + \frac{1}{2}e^{4x},\\
&= \frac{x^2}{4}e^{4x} - \frac{x}{8}e^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + \frac{1}{2}e^{4x} + C,\ C\in\mathbb{R},\\
&\downarrow \text{ on simplifie}\\
&= \frac{e^{4x}}{32}\left(8x^2-4x+17\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. On souhaite maintenant calculer les intégrales à l'aide des changements de variables fournis.

(a) La fonction a intégrer est bien définie et continue sur $[1,e]$. Le changement de variable indiqué est bien bijectif sur ce même ensemble dans $[0,1]$ et on a

$$x=\ln(t) \implies t=e^x \text{ et } dt=e^xdx.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln(t))^3} &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(1+x)^3}dx,\\
&\downarrow \text{ on reconnaît une dérivée classique}\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]_{x=0}^{x=1},\\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Le problème est à nouveau bien définie de même que le changement de variable qui est bien bijectif de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. De plus

$$x = \arccos(t) \implies t = \cos(x) \text{ et } -\sin(x)dx = dt.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} e^{\arccos(t)}dt, \\
&= \int_{0}^{\pi} \sin(x)e^{x}dx, \\
&\quad \downarrow \text{ on effectue une intégration par parties} \\
&= [\sin(x)e^{x}]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} e^{x}\cos(x)dx, \\
&\quad \downarrow \text{ encore une intégration par parties} \\
&= [\cos(x)e^{x}]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} e^{x}\sin(x)dx, \\
I &= e^{\pi} + 1 - I.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $I = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Exercice 6.7 (Calculs de Primitives)**.**
Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.

1. $f : x \mapsto \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^8+1}$.
3. $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2+4} - \dfrac{6x}{x^2+4}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x^2}$.

Correction

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{\star}$. Pour déterminer ses primitives, on va se contenter de développer l'expression.
$$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x^{3/2}\right)dx = 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$
2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car $x^8+1>0$ pour tout x. On va ensuite procéder à un changement de variable pour déterminer une primitive de cette fonction.
On va poser le changement de variable $u = x^4$, ce qui nous donne $du = 4x^3\,dx$. Ainsi
$$\int \frac{x^3}{x^8+1}dx \underset{u=x^4}{=} \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4}\arctan(u) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$
Ainsi les primitives sont données par $F : x \mapsto \dfrac{1}{4}\arctan\left(1+x^4\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$.
3. Cette fonction est définie et continue pour tout $x \neq 0$. L'intégration se fera aisément terme à terme. Il faut reconnaître la dérivée de l'arctan au troisième terme de la somme et une expression de la forme u'/u pour le quatrième terme de cette même somme.
Ainsi, pour tout $x \neq 0$

$$\int x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+4} - \frac{6x}{x^2+4}dx,$$

$$\downarrow \text{ on sépare les différents termes}$$

$$= \int xdx + 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx - 3\int \frac{2x}{x^2+4}dx,$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln(|x|) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 3\ln(x^2+4) + C, C \in \mathbb{R}.$$

4. Pour la dernière fonction, cela est un peu moins évident, mais le plus naturel dans ce cas est de procéder à une intégration par parties.
   On va chercher à dériver la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ et intégrer la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.
   Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\int f(x)dx = \frac{\arctan(x)}{x^2}dx,$$

$$\downarrow \text{ intégration par parties}$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan(x) + \int \frac{dx}{x(x^2+1)},$$

$$\downarrow \text{ on ajoute } 0 = x^2 - x^2 \text{ au numérateur}$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan(x) + \int \frac{1 + x^2 - x^2}{x(x^2+1)}dx,$$

$$\downarrow \text{ on sépare}$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan(x) + \int \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2},$$

$$\downarrow \text{ on reconnaît une expression de la forme } u'/u$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan(x) + \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6.8 (Intégrations par parties)**.**
Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.

1. $f : x \mapsto x\sin(2x)$.
2. $f : x \mapsto x^2\ln(x)$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin^2(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}$.

Correction

Le nom de l'exercice suggère d'effectuer des intégrations par parties pour trouver les différentes primitives, alors faisons ainsi !

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Ici on va poser $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(2x)$.

$$\int x\sin(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(x) + \int \frac{\cos(x)}{2}dx = -\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{\sin(x)}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour tout $x > 0$, nous poserons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$.

$$\int x^2\ln(x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(|x|) - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln(|x|) - \frac{x^3}{9} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Commençons par noter que la fonction est définie et continue sur les intervalles de la forme $\left]\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+2)\pi}{2}\right[$.
Pour trouver une primitive de cette fonction, on devra se montrer un brin astucieux et utiliser le fait que pour tout x nous avons
$$cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$
Cela va nous permettre de reconnaître une expression de la forme
$$\frac{u'v - v'u}{v^2},$$
où les fonctions u et v seront respectivement les fonctions sin et cos. Ce qui nous donne
$$\begin{aligned}
\int \frac{1x}{\sin^2(x)}dx &= \int \frac{x(\cos^2(x) + \sin^2(x))}{\sin^2(x)}dx, \\
&\downarrow \text{ pour reconnaître une dérivée de u/v} \\
&= \int \frac{-x(-\cos^2(x) - \sin^2(x))}{\sin^2(x)}dx, \\
&\downarrow \text{ on fait une intégration par parties} \\
&= \left[-x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right] + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx, \\
&= -x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \ln(\sin(x))
\end{aligned}$$

4. La fonction est définie pour tout x non nul et aussi pour $x > -\frac{1}{2}$. On va ensuite poser $u(x) = \ln(1+2x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, on a alors
$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}dx, \\
&\downarrow \text{ intégration par parties} \\
&= -\frac{\ln(1+2x)}{2x} + \int \frac{1}{2x} \times \frac{2}{2x+1}dx, \\
&\downarrow \text{ on réécrit notre produit comme une somme} \\
&= -\frac{\ln(1+2x)}{2x} + 2\int \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+1}\right)dx, \\
&= -\frac{\ln(1+2x)}{2x} + \ln(|x|) - \ln(1+2x) + C,\ C \in \mathbb{R}, \\
&\downarrow \text{ on factorise} \\
&= \ln(|x|) - \ln(1+2x)\frac{1+2x}{2x} + C,\ C \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

Exercice 6.9 (Changement de variables).
Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx$, *en posant* $x = 1/t$.

2. $\int \frac{1}{e^x+1}dx$, *en posant* $x = -\ln(t)$.

3. $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7 dx$, *en posant* $t = 5x^2 - 3$.
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$, *en posant* $t = \sqrt{x+1}$.

Correction

On va se contenter de suivre les changements de variables indiqués pour déterminer les primitives. On ne se préoccupe pas de la validité des changements effectués dans cet exercice.

1. En posant $x = 1/t$ soit $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t-2}-2}} \frac{-dt}{t^2}, \\
&\downarrow \text{ on simplifie} \\
&= \int \frac{-1}{t} \frac{t}{\sqrt{1-2t^2}} dt, \\
&= \int \frac{-dt}{\sqrt{1-2t^2}}, \\
&\downarrow \text{ en posant } u = \sqrt{2}t, \text{ donc } dt = du/\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}, \\
&= \frac{\arcsin\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc les primitives sont données par $\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)}{\sqrt{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}$

2. En posant $x = -ln(t)$, nous avons $dx = -dt/t$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x+1} dx &= \int \frac{-1}{(t+1)} dt, \\
&\downarrow \text{ on réécrit notre produit comme une somme} \\
&= \int = \qquad \ln(t+1) + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc les primitives sont données par $\ln(1+e^x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

3. En posant $t = 5x^2 - 3$, nous avons $dt = 10x\ dx$. Ainsi après avoir appliqué le changement de variable, il vient

$$\begin{aligned}
\int x(5x^2-3)^7 dx &= \frac{1}{10} \int 10x(5x^2-3)^7 dx, \\
&= \frac{1}{10} t^7 dt, \\
&= \frac{t^8}{80} + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi les primitives sont les fonctions qui à x associent $\dfrac{1}{80}\left(5x^2-3\right)$.

4. En posant $t = \sqrt{x+1}$, nous avons aussi $x = t^2 - 1$, donc $dx = 2t\ dt$. En remplacant dans notre intégrale, cela nous donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} &= \int \frac{2t}{t(t^2-1)}dt,\\
&\quad \downarrow \text{ on simplifie}\\
&= -2\int \frac{dt}{1-t^2},\\
&= -2\operatorname{argth}(t) + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi les primitives admettent pour expression $-2\operatorname{argth}\left(\sqrt{1+x}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.10 (Suite définie par une intégrale)**.**

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{1/x}dx$.

1. *Calculer I_2*
2. (a) *Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

   (b) *En déduire la valeur de I_3.*
3. (a) *Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ nous avons*

$$0 \leq \frac{1}{x^n}e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}.$$

   (b) *En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 2}$.*

Correction

1.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{1/x}dx,\\
&\quad \downarrow \text{ au signe près, on reconnaît la dérivée de la fonction } x \mapsto e^{1/x}\\
&= \left[-e^{1/x}\right]_{x=1}^{x=2},\\
&= e^{-}\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

2. (a) On va chercher à exprimer I_{n+1} en fonction de I_n

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}e^{1/x}dx,\\
&\quad \downarrow \text{ on exploite la question précédente}\\
&= \int_1^2 \frac{-1}{x^{n-1}}\left(\frac{-1}{x^2}e^{1/x}\right)dx,\\
&\quad \downarrow \text{ en intégrant par parties : } u'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{1/x} \text{ et } v(x) = \frac{-1}{x^{n-1}}\\
&= \left[\frac{-e^{1/x}}{x^{n-1}}\right]_{x=1}^{x=2} - (n-1)\underbrace{\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^{n-1}}},\\
&= e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n){\color{red}I_n}
\end{aligned}$$

(b) Daprès la question précédente, on a directement

$$I_3 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - I_2 = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

3. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}e^{1/x}$ est positive pour tout $x \in [1,2]$. De même remarquons que pour tout $x \in [1,2]$ nous avons $\frac{1}{x} \leq 1$ donc $e^{1/x} \leq e$. Ce qui nous montre que pour tout $x \in [1,2]$ nous avons $\frac{1}{x^n}e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}$. Ainsi, pour tout $x \in [1,2]$ nous avons :

$$0 \leq \frac{1}{x^n}e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}.$$

(b) On obtient aisément un encadrement de I_n en repartant de l'inégalité précédemment démontré. En intégrant les différent membres de l'inégalité, on obtient

$$0 \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{1/x}dx = I_n \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n}dx.$$

I_n est donc bornée inférieurement par 0. Il nous reste à étudier le membre de droite que l'on se propose de calculer.

$$\int_1^2 \frac{e}{x^n}dx = \left[\frac{-1}{n-1}\frac{e}{x^{n-1}}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{e}{n-1} - \frac{e}{(n-1)2^{n-1}}.$$

Or $\underset{n\to+\infty}{\frac{e}{n-1}} = \underset{n\to+\infty}{\frac{e}{2^{n-1}(n-1)}} = 0$

Donc, en utilisant le théorème de gendarmes (ou d'encadrement), on en déduit que la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 0.

Exercice 6.11 (Suite définie par une intégrale)**.**

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_0 = \int_1^e xdx$ et pour tout $n \geq 1$ par $I_n = \int_1^e x\ln(x)^n dx$.

1. *Calculer I_0.*
2. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.*
3. *En déduire I_1.*
4. *Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
5. *Montrer que pour tout entier n, nous avons*

$$I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

Pour cela, on commencera par étudier la fonction $x \mapsto \ln(x) - \frac{x}{e}$ sur l'intervalle $[1,e]$.

6. *En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.*

Correction

1. Le calcul de I_0 est très simple s'agissant d'une fonction linéaire, on a immédiatement $I_0 = \frac{1}{2}(e^2-1)$
2. Suivons l'énoncé et faisons une intégration par parties en considérant $u(x) = \ln(x)^n$ et $v'(x) = x$. Nous avons alors

$$I_n = \int_1^e x\ln(x)^n dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)^n\right]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{nx}{2}\ln(x)^{n-1}dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{nx}{2}\ln(x)^{n-1}dx.$$

Or cette dernière intégrale n'est rien d'autre que $\frac{n}{2}I_{n-1}$. Nous avons donc

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1} \iff 2I_n + nI_{n-1} = e^2.$$

3. D'après la relation précédente, nous avons $I_1 = \frac{1}{2}(e^2 - I_0) = \frac{e^2+1}{4}$.
4. On doit montrer que la suite est $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour cela on va utiliser sa définition ainsi que le fait que $\ln(x)^{n+1} = \ln(x)^n\ln(x)$ pour faire apparaître I_{n+1} en fonction de I_n.

$$I_{n+1} = \int_1^e x\ln(x)^{n+1}dx = \int_1^e x\ln(x)^n\ln(x)dx.$$

   Or pour tout $x \in [1, e]$, nous avons $\ln(x) \leq 1$. Donc $I_{n+1} \leq \int_1^e x\ln(x)^n dx = I_n$.

   Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. L'objectif est d'obtenir une majoration de I_n. Le terme $\frac{1}{n+2}$ suggère l'apparition d'une primitive de x^{n+1} que nous allons chercher à faire apparaître.

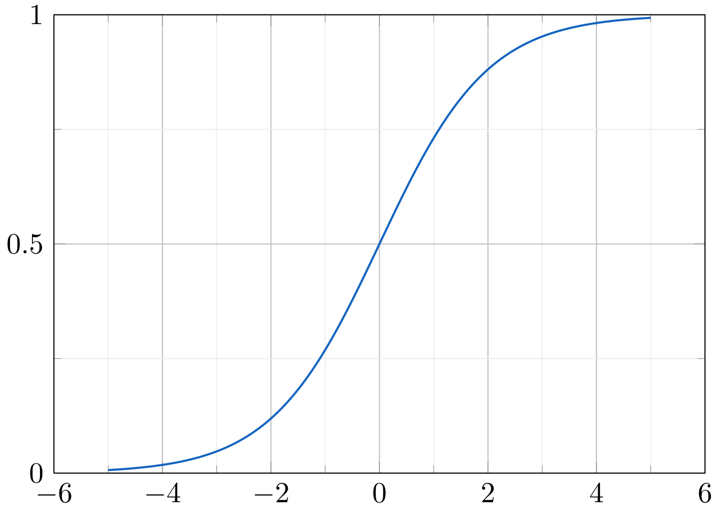
   Pour cela étudions la fonction f comme indiqué. Remarquons que sa dérivée est égale à $\frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, donc la dérivée est positive sur $[1, e]$. La fonction f est donc croissante. De plus $f(e) = 0$, la fonction f est donc négative.
   Ainsi, pour tout $x \in [1, e]$ nous avons $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$. D'où

$$I_n = \int_1^e x\ln(x)^n dx \leq \int_1^e x\left(\frac{x}{e}\right)^n dx = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^n dx = \frac{1}{(n+2)e^n}(e^{n+2} - 1) \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

6. La question précédente permet immédiatement de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car décroissante et minorée. De plus, sa borne supérieure tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

7 Etude de (suites de) fonctions

Exercice 7.1 (Etude de la fonction logistique)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ *dont la représentation graphique est donnée ci-dessous*



Cette fonction est appelée fonction logistique[6] *ou encore sigmoïde*

1. *Etudier les variations de cette fonction.*
2. *Etudier sa convexité.*
3. *Montrer qu'au voisinage de* 0*, nous avons* $f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + o(x^2)$.

Correction

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette fonction logistique.

1. La fonction f est définie et dérivable pour tout réel x, car pour tout réel x, $1 + e^{-x} > 0$. La dérivée de cette fonction est donnée par

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Remarquons que la dérivée peut aussi s'écrire plus *simplement* à l'aide de la fonction f elle même. En effet

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{1+e^{-x}} \underbrace{\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}_{=1-\frac{1}{1+e^{-x}}} = f(x)(1-f(x)).$$

Or pour tout réel x, $f(x) \in]0,1[$ donc la dérivée f' est aussi positive. Ce qui veut donc dire que f est croissante. De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. Nous avons montré que la fonction f était dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)(1-f(x))$. Ainsi, comme f est dérivable, f' est donc également dérivable. On peut même montrer que cette fonction f est de classe $C^{+\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *i.e.* elle est infiniement dérivable.

6. Elle intervient naturellement dans des problèmes de régression généralisée et plus particulièrement en apprentissage automatique lorsque l'on cherche à déterminer la probabilité d'appartenance d'un individu à un groupe en fonction de ces caractéristiques. Ces notions, plus complexes, seront abordées en troisième année de Licence sur le plan statistique avant d'avoir une vision plus *Machine Learning* du problème

En particulier, sa dérivée seconde est égale, pour tout réel, à

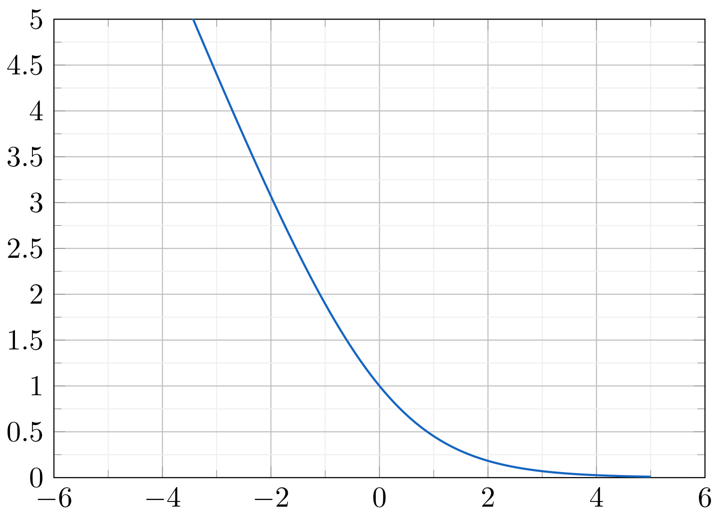
$$\begin{aligned} f''(x) = f'(x)(1-f(x)) - f'(x)f(x) = f(x)(1-f(x))^2 - f(x)^2(1-f(x)) \\ = f(x)(1-f(x))[1-f(x)-f(x)] = f(x)(1-f(x))(1-2f(x)). \end{aligned}$$

La fonction f est donc convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ et concave sinon. Or $f''(x) \geq 0 \iff 1-2f(x) \geq 0 \iff x \leq 0$. Donc f est convexe pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ et concave pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

3. On doit déterminer un équivalent de la fonction f au voisinage de 0. On rappelle qu'au voisinage de 0, $e^{-x} \sim 1-x$, donc

$$f(x) \sim \frac{1}{1+1-x} \sim \frac{1}{2-x} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \sim \frac{1}{2}(1+\frac{x}{2}) \sim \frac{1}{2}+\frac{x}{4}.$$

Exercice 7.2 (Etude de la loss logistique)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1+e^{-x}\right)$ *dont la représentation graphique est donnée ci-dessous*



Cette fonction est appelée fonction de perte logistique

1. *Etudier les variations de cette fonction.*
2. *Déterminer un équivalent de cette fonction en* $-\infty$.
3. *Déterminer un équivalent de cette fonction au voisinage de* 0.

Correction

Il s'agit d'une fonction que vous serez amenés à utiliser lorsque, plus tard, vous vous lancerez dans le *Machine Learning.*

1. Graphiquement, on observe que cette fonction est strictement décroissante. En effet, notons que la fonction f est définie et dérivable pour tout réel x et que sa dérivée f' est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

La dérivée de la fonction f est strictement négative pour tout réel x et la fonction f est donc décroissante.

On peut également étudier les limites aux bornes de cette fonction et les résultats sur les limites de composées de fonctions. Ce qui nous donne :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2. On cherche à déterminer un équivalent de la fonction lorsque x tend vers $-\infty$. Pour cela, on remarque que ce qui est dans le logarithme tend vers $+\infty$ également. Mais on peut être plus précis :

$$1 + e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{-x}.$$

En composant avec la fonction ln, on a alors

$$\ln\left(1+e^{-x}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} \ln\left(e^{-x}\right) = -x \implies f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{-x}{\ln(2)}.$$

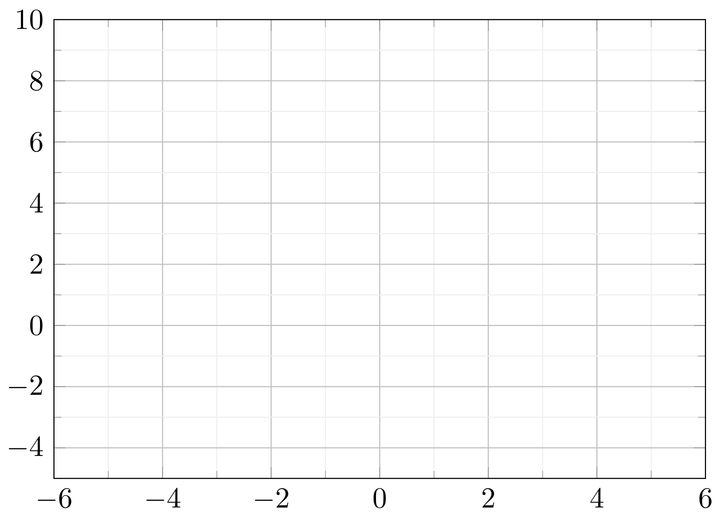
3. Pour cette dernière question, on utilisera le fait que lorsque x est proche de 0, e^{-x} est équivalent à $1-x$. De plus, pour des valeurs de x au voisinage de 0, nous avons

$$\ln(2-x) = \ln(2) + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) \sim \ln(2) - \frac{x}{2} \implies f(x) \sim 1 - \frac{x}{2\ln(2)}.$$

Exercice 7.3 (Une étude de fonctions)**.**

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)} + x$. Le but de cet exercice est d'étudier cette fonction.

1. *Donner l'ensemble de définition de cette fonction*
2. *On se place sur l'intervalle $]-1,+\infty[$*
   (a) *Etudier la convexité de la fonction f*
   (b) *En déduire que f' ne s'annule qu'une seule fois.*
   (c) *Etudier les limites de f en -1^+ et en $+\infty$ et en déduire les variations de f.*
   (d) *Déterminer l'asymptote oblique à f en $+\infty$.*
3. *On se place maintenant sur l'intervalle $]-\infty,-1[$.*
   (a) *Evaluer la dérivée de la fonction f en -2.*
   (b) *Etudier la convexité de la fonction f.*
   (c) *Etudier les limites de f en -1^- et en $-\infty$*
   (d) *En déduire les variations de f*
   (e) *Déterminer l'asymptote oblique à f en $-\infty$.*
4. *Tracer l'allure de cette fonction sur le graphe ci-dessous à l'aide des éléments précédents*



Correction

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $1+x \neq 0$, *i.e.* pour tout réel $x \neq -1$. On se propose maintenant d'étudier la fonction sur chacun de ces intervalles.
2. On se place sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.
   (a) Notons que la fonction f est dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions dérivables. Ainsi, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, nous avons

   $$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} e^{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)} + 1.$$

   A nouveau cette fonction f' est dérivable pour tout réel $x \neq 1$, et sa dérivée (que l'on calcule comme la dérivée d'un produit) est égale à

   $$f''(x) = -\left(\frac{-2}{(1+x)^3} e^{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)} - \frac{1}{(1+x)^4} e^{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)}\right) = e^{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)} \left(\frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4}\right).$$

   Ainsi, pour tout $x > -1$, la dérivée seconde est bien positive, la fonction f est donc convexe, on peut même dire qu'elle est strictement convexe.

   (b) La question précédente, nous permet d'affirmer que f' est strictment croissante. De plus, en en utilisant un théorème de comparaison de croissance des fonctions), on montre que

   $$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1.$$

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel $c > -1$ tel que $f'(c) = 0$. On peut être un peu plus fin, en observant que $f'(0) = 1 - e^2 < 0$ et que $f'(2) = 1 - \dfrac{e^{4/3}}{9} > 1 - \dfrac{e^2}{9} > 0$. On peut donc dire que $c \in]0,2[$.

   (c) Etudions maintenant les limites aux bornes de la fonction f directement.

   - **Limite en -1^+ :** on note que lorsque x tend vers -1^+, la fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{1+x}$ tend vers $+\infty$. Le terme linéaire de la fonction ne change pas cette limite car l'exponentielle est prépondérante devant les termes linéaires. Donc

   $$\lim_{x \overset{-}{\to} 1^+} f(x) = +\infty.$$

   - **Limite en $+\infty$:** on note que lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{1+x}$ tend vers e. Le terme linéaire quant à lui tend vers $+\infty$. Ainsi

   $$\lim_{x \overset{+}{\to} \infty} f(x) = +\infty.$$

   On peut alors dresser le tableau des variations suivant

x	-1		c		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	$f(c)$	↗ $+\infty$	

On en déduit que, sur cet intervalle, la fonction f admet un minimum atteint en c et égal à $f(c)$.

(d) L'asymptote oblique dont il est fait mention fait référence à une fonction équivalente à f en $+\infty$, *i.e.* au comportement de f pour les très grandes valeurs de x.

L'étude des limites a montré que f croit linéairement pour de grandes valeurs de x. Pour déterminer une asymptote oblique de f, on va chercher une droite affine g telle que $f(x) - g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

En écrivant $f(x) = e \times e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)} + x$ et notant que lorsque x tend vers l'infini, son comportement est semblable à $e + x$, on a trouvé notre fonction g.

3. On se place maintenant sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.

(a) L'expression de la dérivée reste inchangée pour tout $x < -1$ et l'évaluation de la dérivée en -2 nous donne

$$f'(-2) = 1 - \frac{1}{(1-2)^2} e^{1+\frac{1}{1-2}} = 0.$$

(b) On se sert à nouveau de l'expression de f'' précédemment calculée

$$f''(x) = e^{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)} \left(\frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4} \right).$$

On va étudier le signe de $\frac{2}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^4}$ soit le signe de $2(1+x)+1$ pour en déduire la convexité de f.
La fonction f est donc convexe si et seulement si

$$f''(x) \geq 0 \iff 2(1+x)+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{2}.$$

La fonction f est donc convexe sur $[-3/2, -1[$ et concave sur $]-\infty, -3/2]$.

(c) Pour des raisons analogues à la question précédente, on a

$$\lim_{x \xrightarrow{-} \infty} f(x) = -\infty.$$

En revanche, la limite en -1^- est finie ! En effet, le terme dans l'exponentielle va tendre vers $-\infty$ donc l'exponentielle va tendre vers 0, il ne reste que la limite de x en -1 à prendre en compte, et elle est égale à -1. Donc

$$\lim_{x \xrightarrow{-} 1^-} f(x) = -1.$$

(d) Pour déterminer les variations de f, il reste à voir si notre dérivée ne s'annule pas plusieurs fois, en réutilisant la convexité de f.

- **Sur l'intervalle** $]-\infty, -3/2]$ **:** la fonction f est strictement concave, donc f' est strictement décroissante. Or

$$\lim_{x \xrightarrow{-} \infty} f'(x) = 1 \text{ et } f'(-3/2) = 1 - \frac{4}{e} < 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' s'annule donc en unique point que nous avons précédemment déterminé ($x = -2$).

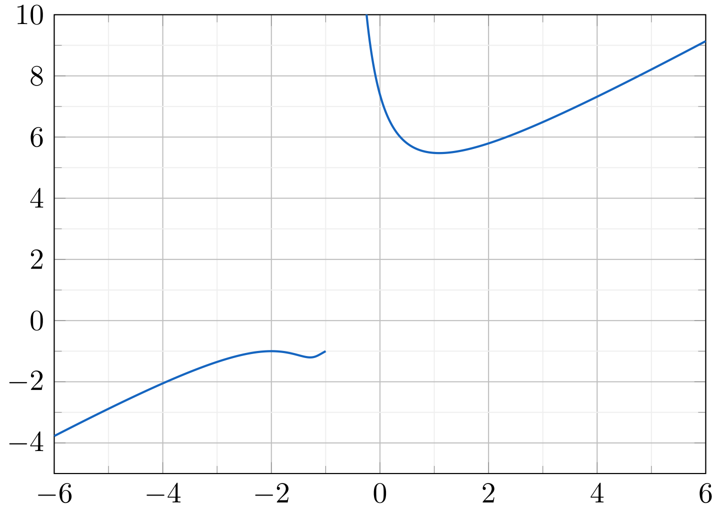
- **Sur l'intervalle** $]-3/2,-1[$ **:** la fonction f est strictement convexe, donc f' est strictement croissante. Or
$$\lim_{x \overset{-}{\longrightarrow} 1^-} f'(x) = 1 \text{ et } f'(-3/2) = 1 - \frac{4}{e} < 0.$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' s'annule donc en unique point c'.

On peut alors dresser le tableau des variations suivant sur cet intervalle

x	$-\infty$		-2		c'		-1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	-1 ‖

(e) Le procédé est identique à la question précédente et l'asymptote oblique a exactement la même équation.

4. On obtient la représentation graphique ci-dessous :



Exercice 7.4 (Etude de fonctions)**.**
Etudier chacune des fonctions suivantes : domaine de définition et de dérivabilité, variations et signe de la fonction, ainsi que les éventuelles asymptotes (horizontales, verticales ou obliques)

1. $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$.
2. $f : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ *pour tout* $x \in]-1,1[$ *et qui vaut* 0 *partout ailleurs.*
3. $f : x \mapsto e^{-3x} - 2x + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

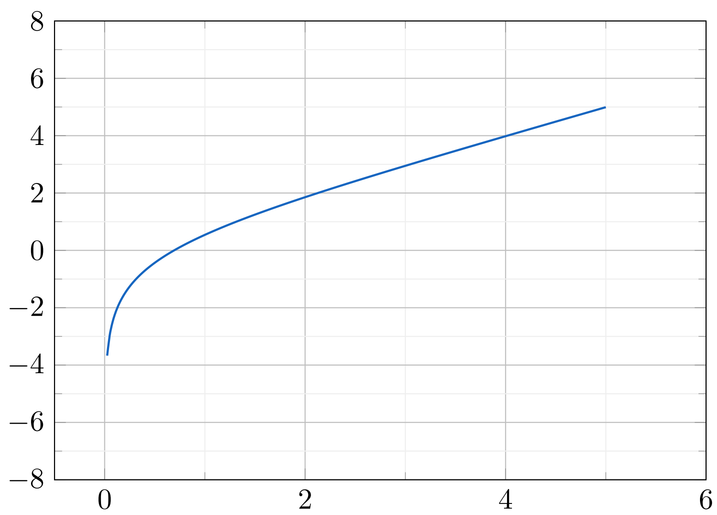
Correction

L'exercice nous propose d'étudier les différentes fonctions en détails. Nous donnerons, à la fin, une représentation graphique de ces dernières afin de vérifier que notre étude est correcte.

1. La fonction f est définie pour tout x tel que $e^x - 1$ soit strictement positif, *i.e.* pour tout réel $x > 0$. Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et on
$$f'(x) = \frac{e^x}{x}.$$
La dérivée est strictement positive pour tout $x > 0$, donc la fonction la fonction f est strictement croissante. De plus, nous avons les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty, \ \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Ainsi, la fonction f admet une asymptote verticale en 0, aucune asymptote horizontale.

Enfin, remarquons que lorsque x est suffisamment grand, nous avons $f(x) \sim \ln(e^x) = x$. En effet,
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \frac{\ln(e^x(1 - e^{-x}))}{x} = 1 + \frac{ln(1 - e^{-x}}{x}.$$
Or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - e^{-x}}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Enfin la représentation graphique de la fonction f est donnée par



2. La fonction f est définie et continue pour tout réel x différent de -1 et de 1. La fonction f étant nulle en dehors de l'intervalle $]-1,1[$, on va, par la suite, restreindre notre étude à cet intervalle.

Prolongement par continuité : notons que $\displaystyle\lim_{x\to -1} 1 - x^2 = \lim_{x\to 1} 1 - x^2 = 0$, donc
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$
La fonction f est donc prolongeable par continuité en -1 et 1 en posant $f(1) = f(-1) = 0$.

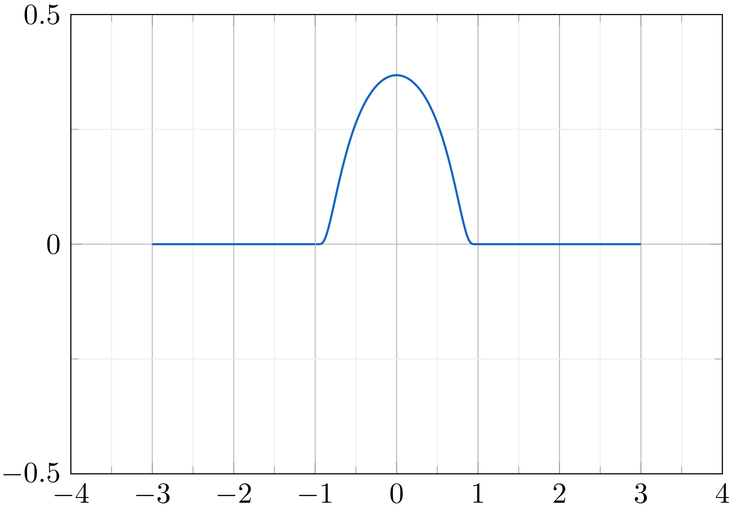
Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et sur cet intervalle, nous avons
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} f(x).$$
Pour tout $x \in]-1,0]$ la dérivée est positive, donc la fonction f est croissante. A l'inverse, pour tout $x \in [0,1[$, la dérivée f' est négative donc la fonction f est croissante. De plus $f'(0) = 0$. f admet donc une tangente horizontale en 0.

Prolongement par continuité de la dérivée : comme précédemment

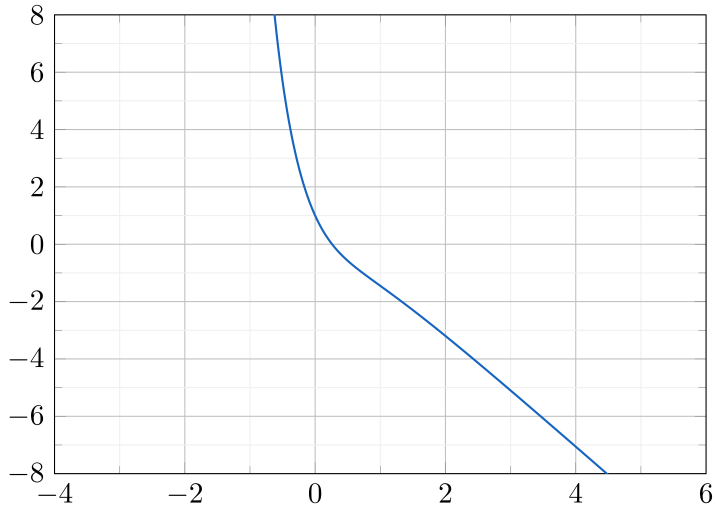
$$\lim_{x \to -1} f'(x) = \lim_{x \to 1} f'(x) = 0.$$

Car la fonction f est prépondérante sur la fraction rationnelle. On en déduit que la fonction f' est prolongeable par continuité en 1 et -1 en posant $f'(-1) = f'(1) = 0$[7].

Enfin la représentation graphique de la fonction f est donnée par



3. Procédons de façon analogue pour la dernière fonction
   Enfin la représentation graphique de la fonction f est donnée par



Exercice 7.5 (Suite de fonction)**.**

1. *Montrer que l'équation* $\cos(x) = x$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}$
2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = cos(u_n)$*. Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*

Correction

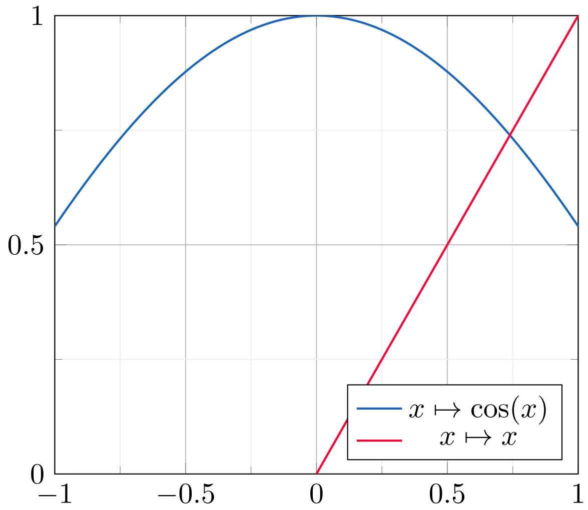
1. La question suggère de déterminer ce que l'on appelle un *point fixe* de la fonction cos. pour cela commençons par remarquer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ prend ses valeurs dans

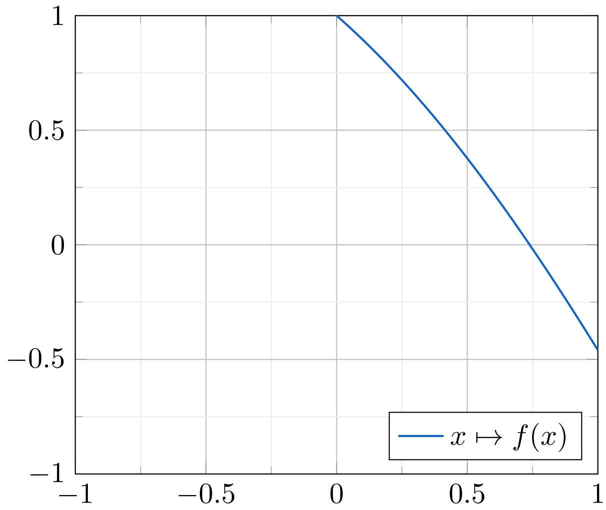
7. Ce résultat ainsi que le lien entre f' et f nous montre même que la fonction f est de classe C^∞.

$[-1, 1]$ donc la valeur de x recherchée se trouve dans cet intervalle.

Considérons maintenant la fonction f définie de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $f(x) = \cos(x) - x$ dont la dérivée est $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$. En outre, $f(-1) = \cos(-1) + 1 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $\cos(x_0) = x_0$. Il nous reste à montrer que cette valeur est unique.

Pour cela, on utilise le fait que la fonction f est strictement décroissante sur $[-1, 1]$, elle est donc injective sur ce même intervalle, ce qui assure l'unicité de x_0 sur cet intervalle.
On peut même être un plus précis en remarquant que $f(0) = \cos(0) = 1 > 0$ donc l'unique solution de l'équation $\cos(x) = x$ se trouve dans l'intervalle $[0, 1]$.





2. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, on a $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$. De la même façon, on a $u_2 = \cos(u_1) \in [0, 1]$ car la fonction $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut alors montrer, par récurrence, que pour tout $n > 1$, nous avons $u_n \in [0, 1]$.

   Gardons à l'esprit que l'on souhaite montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais aussi le résultat de la question précédente.

   Remarquons que pour tout $x \in [0, 1]$, nous avons $|\cos'(1)| = |-\sin(1)| = k < 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons, pour tout $n \geq 2$

$$|\cos(u_n) - \cos(x_0)| \leq k|u_n - x_0|.$$

   En particulier, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$|u_n - x_0| \leq k^{n-2}|u_2 - x_0|.$$

   Or $k < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k^{n-2} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - x_0 = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l'unique solution réelle de l'équation $\cos(x) = x$.

Exercice 7.6 (Suite de fonctions)**.**
On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. *Etudier les variations de f_n.*
2. *Montrer que, $\forall n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.*
3. *Monter que $u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et en déduire que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.*

Correction

Cet exercice original se propose d'étudier une suite définie par les zéros d'une fonction.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a donc pour tout réel x

$$f_n'(x) = 5x^4 + n \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante, voire strictement croissante lorsque $n > 0$. On peut dresser le tableau de variation suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

2. Le tableau de variation établi à la question précédente montre que pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule et unique solution. Cela reste vraie lorsque $n = 0$, car $f_0(x) = x^5 - 1$ dont le seul zéro est donné par $x = 1$.

   On note u_n le zéro de la fonction f_n.

3. Pour cela, on va utiliser le fait que $f_n(u_n) = 0$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 0 &\iff u_n^5 + nu_n - 1 = 0, \\ & \quad \downarrow \text{ on va essayer d'isoler } u_n \\ &\iff u_n(u_n^4 + n) = 1, \\ &\iff u_n = \frac{1}{u_n^4 + n}, \\ & \quad \downarrow \text{ on utilise le fait que } u_n^4 \geq 0 \\ &\implies u_n \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la suite est majorée par $\frac{1}{n}$ qui converge vers 0. Pour montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il faudra vérifier que tous les termes de la suite sont positifs. Mais cela se montre rapidement à l'aide la relation

$$u_n(u_n^4 + n) = 1 \implies u_n \geq 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour cela, on va utiliser le fait que $f_n(u_n) = 0$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 0 &\iff u_n^5 + nu_n - 1 = 0, \\ & \quad \downarrow \text{ on va essayer d'isoler } nu_n \\ &\iff nu_n = 1 - u_n^5. \end{aligned}$$

En prenant la limite de chaque côté de l'égalité, on a $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$.

Exercice 7.7 (Suite de zéros d'une fonction)**.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. *Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.*
2. *Justifier pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n par la suite.*
3. *Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n - \ln(n)) \leq x_n \leq \ln(n)$.*
5. *En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de $\left(\frac{x_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Correction

L'exercice est très semblable au précédent.

1. Notons que la fonction f est de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (que l'on pourrait abréger $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou encore $C^\infty(\mathbb{R})$).

   Elle est ainsi dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $f'(x) = e^x + 1$. La dérivée étant strictement positive pour tout réel x, la fonction f est donc strictement croissante et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction f étant bijective et continue, pour tout entier n, l'équation $f(x) = n$ admet une seule et unique solution. On peut voir cela comme une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de Bolzano).
3. La fonction f étant strictement croissante, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
   En effet
   $$f(x_{n+1}) = n + 1 = f(x_n) + 1.$$
4. De la relation $f(x_n) = n$, *i.e.* $e^{x_n} + x_n = n$, nous avons
   $$e^{x_n} \leq n \implies x_n \leq \ln(n).$$
   En utilisant cette première inégalité et l'injectant dans l'égalité initiale, on trouve
   $$e^{x_n} + x_n = n \implies e^{x_n} + \ln(n) \geq n \implies e^{x_n} \geq n - \ln(n) \implies x_n \geq \ln(n - \ln(n)).$$
   On obtient le résultat en combinant les deux inégalités.
5. Il s'agit ici d'une application du théorème des gendarmes et de comparaison des limites.
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\ln(n - \ln(n))$ qui tend vers $+\infty$ et diverge donc vers $+\infty$.
   En revanche, la suite $\left(\frac{x_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergence. En effet, d'après l'inégalité précédemment établie, nous avons
   $$\frac{\ln(n - \ln(n))}{\ln(n)} \leq \frac{x_n}{\ln(n)} \leq 1.$$
   Le membre de gauche de cette égalité tend vers 1 car $\ln(n - \ln(n)) = \ln\left(n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   Donc $\left(\frac{x_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 7.8 (Suite de fonctions).
Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

1. *Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution que l'on notera u_n.*
2. *Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \in]0, 1[$.*
3. *Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa convergence.*
4. *Calculer la limite de cette suite. On pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.*
5. *En posant $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.*

Correction

Toujours dans le même style que les exercices précédents. On prendra garde au fait que la fonction est étudiée uniquement sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Pour tout $n \geq 1$, nous avons
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
On étudie bien la fonction sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc la fonction f_n est positive et elle même strictement croissante. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, nous avons
$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0.$$
Ainsi, la fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ et l'équation $f_n(x) = 2$ admet donc une unique solution.
2. Soit $n \geq 1$, si on considère u_n le nombre vérifiant $f_n(u_n) = 2$, nous pouvons déjà affirmer que $u_n > 0$ étant donnée l'ensemble d'étude de la fonction. Pour montrer que $u_n < 1$, il suffit de voir que
$$f_n(u_n) = \sum_{k=0}^{n} u_n^k = \frac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} > 0.$$
Or cette dernière inégalité est vraie si
   - $1 - u_n^{n+1}$ **et** $1 - u_n$ sont positifs, ce qui est vrai si et seulement si $u_n < 1$.
   - $1 - u_n^{n+1}$ **et** $1 - u_n$ sont négatifs, ce qui est vrai si et seulement si $u_n > 1$. Or $f_n(u_n) = 2$. Ainsi, si $u_n > 1$ alors $f_n(u_n) > 2$ ce qui n'est pas possible !

   On en déduit que $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \geq 2$.
3. On va pour cela employer la croissante stricte de des fonctions f_n. Remarquons que l'on a
$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1} \quad \text{donc} \quad f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 2 + u_n^{n+1}.$$
Or $u_n > 0$ donc $u_n^{n+1} > 0$ ce qui permet d'écrire $f_{n+1}(u_n) > 2 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Or la fonction f_{n+1} est strictement croissante. On en déduit donc que $u_n > u_{n+1}$, *i.e.* que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

   La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

4. On va exploiter nos connaissances sur les suites géométriques à nouveau. Pour tout $x \neq 1$:
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
En particulier, pour $x = u_n$ nous avons
$$f_n(u_n) = \frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n}.$$
Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante, donc pour tout $n \geq 2$ donc nous avons $u_n \leq u_2 < 1$, donc $u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1} < 1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_2^{n+1} = 0$. L'application du théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$.

   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente, on peut noter l sa limite et en exploitant ce qui précède, on a
$$2 = \frac{1}{1-l} \quad \text{soit} \quad l = \frac{1}{2}.$$
5. On repart toujours de la même base.
$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 2 &\iff \frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n} = 2, \\ &\quad \downarrow \text{ on réduit au même dénominateur} \\ &\iff 1-u_n^{n+1} = 2-2u_n, \\ &\iff u_n^{n+1} = 2u_n - 1. \\ &\quad \downarrow \text{ on utilise la définition de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\iff \left(\frac{1}{2}+v_n\right) = 2v_n. \end{aligned}$$

Exercice 7.9 (Une autre suite de fonctions)**.**
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction g_n par $g_n(x) = e^x - \frac{1}{nx}$.

1. *Etudier les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et prouver que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution sur cet intervalle, que l'on notera désormais u_n.*
2. *Montrer que $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$, en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *Simplifier l'expression de $g_{n+1}(x)-g_n(x)$, et en déduire le signe de $g_n(u_{n+1})$ puis la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.*

Correction

1. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction g_n est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Sa dérivée est égale à
$$g_n'(x) = e^x + \frac{1}{nx^2}.$$
La dérivée étant strictement positive, la fonction g_n est donc strictement croissante. De plus :
$$\lim_{x\to0} g_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty.$$
La fonction g_n réalise donc une bijection continue de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, l'équation $g_n(x)$ admet donc une unique solution.

2. Pour tout $n \geq 1$, nous avons $u_n > 0$ (domaine d'étude de g_n). De plus, en utilisant le fait que $g_n(u_n) = 0$ nous avons $e^{u_n} = \frac{1}{nu_n}$ soit $u_n e^{u_n} = \frac{1}{n}$. Or $u_n > 0$ donc $e^{u_n} \geq 1$, on a donc $u_n \leq u_n e^{u_n} = \frac{1}{n}$.
   En prenant la limite de part et d'autre de l'inégalité et en utilisant le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. On va suivre les indications

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - g_n(x) &= e^x - \frac{1}{(n+1)x} - e^x + \frac{1}{nx}, \\ &= \frac{1}{nx} - \frac{1}{(n+1)x}, \\ &\downarrow \text{ réduction au même dénominateur} \\ &= \frac{1}{n(n+1)x} \end{aligned}$$

   Cette dernière expression est manifestement positive. En particulier $g_{n+1}(u_{n+1}) - g_n(u_{n+1}) > 0$, or $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $g_n(u_{n+1}) < 0$. Ce qui permet d'affirmer que $g_n(u_{n+1}) - g_n(u_n) < 0$ et donc, pas croissante stricte de la fonction g_n que $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. On utilisera le fait $g_n(u_n) = 0$, ce qui nous donne :

$$nu_n = e^{-u_n}.$$

   Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.