Analyse I

Devoir Maison - Correction
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Ce devoir se compose de trois exercices qui sont indépendants et traitent de l'ensemble des notions abordées en cours : suites - dérivations - intégrales - convexité - développement limité. Il se peut même que les exercices mélanges ces différentes notions.

Le premier exercice se propose d'étudier (partiellement) une fonction appelée *fonction de Lambert* qui ne possède pas d'expression analytique. Elle est proposée ici car je l'utilise actuellement dans le cadre d'un travail avec un chercheur.

La deuxième exercice traite de l'*intégrale de Wallis* et construit quelques résultats autour de cette intégrale comme l'existence d'une limite. Il sera surtout l'occasion de vous faire travailler sur les suites, l'intégration par parties et le changement de variable.

Le troisième exercice, plutôt classique, vous fera travailler sur la notion de convergence d'une suite en passant par l'étude d'une fonction. Certainement l'exercice le plus simple de ce devoir et qui ne nécessite pas de connaissances nouvelles particulières.

1 Etude de la fonction de Lambert

Dans ce premier problème, on se propose d'étudier la fonction de Lambert ainsi que certaines de ses propriétés. Plus précisément, on va d'abord étudier la fonction réciproque de la fonctionsde Lambert afin de prouver son existence puis on étudiera une approximation de cette dernière. Une grande particularité de cette fonction est qu'elle n'admet pas d'expression analytique.

1.1 Fonction de Lambert

On commence par étudier la fonction de Lambert. Pour cela on considère d'abord la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que cette fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$.

   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   On pourrait même dire que f est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   En particulier, pour tout $x \in [-1, +\infty[$, on a

   $$f'(x) = e^x(1 + x),$$

   qui est strictement positif pour tout $x > -1$ et nulle en $x = -1$. La fonction f est donc croissante pour tout $x \geq 1$, voire strictement croissante lorsque $x > 1$. De plus :

   $$\lim_{x \to -1} f(x) = -e^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   La fonction f réalise donc une bijection croissante de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$.

2. Etudier la convexité de la fonction f ?

   f est de classe C^∞, elle est donc, en particulier de classe $C^2\mathbb{R}, \mathbb{R}$, et la dérivée seconde est définie par

   $$\forall x > -1 \; f''(x) = e^x(x + 2) > 0.$$

   La fonction f est donc convexe sur $]-1, +\infty[$.

Dans la suite, on notera W la fonction réciproque de cette bijection. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geq -e^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$. On peut aussi écrire que pour tout réel $x \geq -e^{-1}$, nous avons $f(W(x)) = x$.

2. Justifier que la fonction W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et qu'elle est de classe C^∞ sur ce même intervalle.

   La fonction W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ en tant que réciproque d'une fonction continue de $[-1, +\infty[$ dans $[-e^{-1}, +\infty[$.

   Elle est également C^∞ sur ce même intervalle. En effet, pour tout $x \in [-e^{-1}, +\infty[$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{f'(W(x))}$$

et la fonction f' ne s'annule pas. De plus, la bijection réciproque d'une fonction de classe C^∞ est de classe C^∞ si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas. On en déduit que W est de classe C^∞.

3. Montrer que la fonction W est croissante.

   En tant que fonction réciproque d'une fonction croissante, la fonction W est également croissante.

   Nous aurions également pu montrer cela à l'aide de la relation précédemment établie et en utilisant le fait que $f' > 0$.

4. Donner les valeurs de $W(0)$ et de $W'(0)$.

   Comme $f(0) = 0$ et on a $f(W(0)) = 0$, et comme f est bijective, on a nécessairement $W(0) = 0$.

   Enfin, on a

$$W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

5. Montrer que W est concave sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
   Indication : on utilisera le fait que pour tout $a, b \geq -1$, la fonction f est convexe et on posera ensuite $a = W(x)$ et $b = W(y)$.

   Nous avons vu plus tôt que la fonction f est convexe, ce qui signifie que pour tout $a, b \in [-1, +\infty[$ et pour tout $t \in [0,1]$nous avons

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

   f étant bijective, il existe donc des réels x et y dans l'intervalle $[-e^{-1}, +\infty[$ tels que $a = W(x)$ et $b = W(y)$, ce qui donne

$$f(tW(x) + (1-t)W(y)) \leq tf(W(x)) + (1-t)f(W(y)) = tx + (1-t)y.$$

   En composant maintenant à gauche et à droite par la fonction W qui est croissante, on trouve

$$tW(x) + (1-t)W(y) \leq W(tx + (1-t)y).$$

   montrant ainsi que la fonction W est concave.

6. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que l'on équivalent suivant au voisinage de 0 pour la fonction W

$$W(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

   Comme la fonction W est dérivable en 0, la formule de Taylor en 0 nous donne

$$W(x) = W(0) + (x-0)W'(0) + o(x).$$

   Or $W(0) = 0$ et $W'(0) = 1$, donc $W(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.

7. En utilisant le fait que pour tout $x > -1$, nous avons $x = f(W(x))$. Déterminer un équivalent de W au voisinage de $+\infty$ et en déduire que la limite W en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

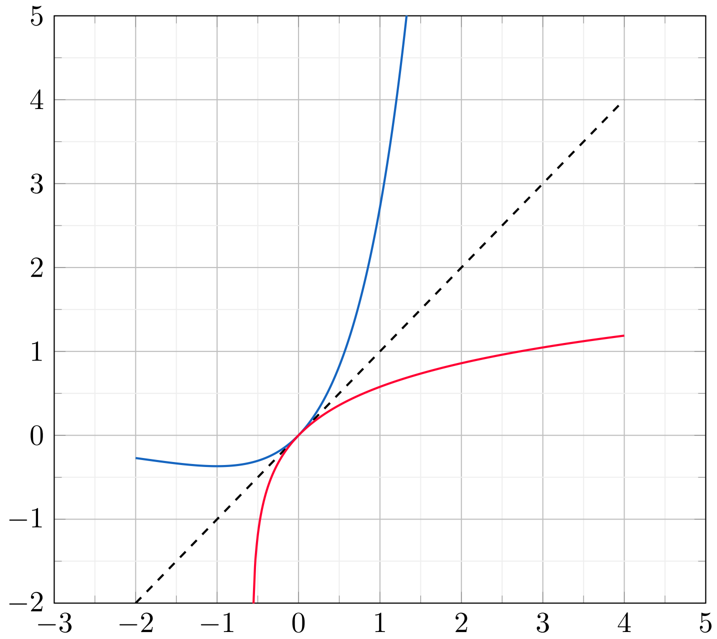
   Par définition, pour tout $x > -1$

   $$x = f(W(x)) = W(x)e^{W(x)}.$$

   Ainsi, pour tout $x > -1$ on a $\ln(x) = W(x) + \ln(W(x)) \underset{x\to+\infty}{=} W(x) + o(W(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(x))$.
   Donc

   $$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} W(x) \to +\infty.$$

8. A l'aide des questions précédentes, donner une représentation graphique de f et de W.



1.2 Approximation de la fonction de Lambert

On considère maintenant une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On cherchera à étudier la convergence de cette suite vers la fonction W définie précédemment.
Pour tout réel x positif, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x(t) = xe^{-xe^{-t}}$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout réel $x \geq 0, w_0(x) = 1$ et $w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x))$.

1. Montrer que pour tout réel x positif, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x, *i.e.* que $W(x)$ est solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

   Il suffit de montrer que $\phi_x(W(x)) = W(x)$. Or on se rappelle que $x = f(W(x)) = W(x)e^{W(x)}$. Donc $W(x) = xe^{-W(x)}$. Ainsi

   $$\phi_x(W(x)) = xe^{-xe^{-W(x)}},$$

   $$\downarrow W(x) = xe^{-W(x)}$$

$$= xe^{-W(x)},$$
$$\downarrow\ W(x) = xe^{-W(x)}$$
$$= W(x).$$

2. Démontrer que, pour tout réel x positif, la fonction ϕ_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \phi_x'(t) \leq \frac{x}{e}.$$

Pour cela, on se rappelle que la fonction W est de classe C^∞. Donc la fonction ϕ_x est de classe C^∞ comme composée de classe C^∞.

La dérivée de la fonction ϕ_x, qui est une fonction composée, est donnée par

$$\phi_x'(t) = x\left(-e^{-t} - xe^{-xe^{-t}}\right) = xe^{-t}xe^{-xe^{-t}} = -xf\left(xe^{-t}\right) \leq \underset{u\leq 0}{xf(u)} = \frac{u}{e}.$$

3. En déduire que

$$\forall x \in [0, e[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|$$

et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers W pour tout $x \in [0, e[$.
Indication : on pensera à utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Le résultat découle d'une récurrence immédiate sur n. La relation à démontrer est évidemment vraie pour $n = 0$ par définie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit n un entier tel que la relation soit vraie, alors

$$\begin{aligned}
|w_{n+1}(x) - W(x)| &= |\phi_x(w_n) - W(x)|, \\
&\downarrow \text{ car } \phi_x(W(x)) = W(x) \\
&= |\phi_x(w_n) - \phi_x(W(x))|, \\
&\downarrow \text{ inégalité des accroissements finis} \\
&\leq \frac{x}{e}|w_n(x) - W(x)|, \\
&\downarrow \text{ hypothèse de récurrence} \\
&\leq \left(\frac{x}{e}\right)^{n+1} |1 - W(x)|.
\end{aligned}$$

La relation est donc vraie au rang $n + 1$, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Finalement, pour tout $x \in [0, e[$, $(x/e) < 1$, donc $\lim\limits_{\to+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n = 0$.
On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers W.

2 Etude de suites d'intégrales

Dans ce deuxième problème, on s'intéresse à l'étude de deux fonctions qui sont définies par des intégrales. L'objectif est de faire une étude plus poussée de l'intégrale de Wallis étudiée en TD.

2.1 Intégrale de Wallis

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\ dx.$$

1. (a) Calculer W_0, W_1 et W_2.

On a trivialement $W_0 = \frac{\pi}{2}$. Pour ce qui est de W_1, nous devons évaluer la valeur de l'intégrale de la fonction sin entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, dont la valeur est égale à $\cos(0) = 1$.
Enfin, pour le calcul de W_2 :

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\ dx,\\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin(x)\ dx,\\
&\quad \downarrow \text{ intégration par parties}\\
&= [-\sin(x)\cos(x)]_{x=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\ dx,\\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\ dx.
\end{aligned}$$

On peut alors calculer la valeur de W_2 à l'aide de cette remarque, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\ dx,\\
&\quad \downarrow \text{ relation entre sin et cos}\\
&= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(x))\ dx,\\
&\quad \downarrow \text{ en exploitant ce qui précède}\\
2W_2 &= \int_0^{\pi/2} \ dx,\\
2W_2 &= \frac{\pi}{2},\\
W_2 &= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Démontrer la relation $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.

Il s'agit essentiellement de voir comment passer de la fonction cos à la fonction sin. Pour cela on se rappelle que pour tout réel x

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Il restera alors à effectuer un petit changement de variable. On peut donc écrire

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx,$$

$$
\begin{aligned}
&\downarrow \text{ on pose le changement de variable affine (donc } C^1\text{)}, t = \frac{\pi}{2} - x. \\
&= \int_{\pi/2}^{0} \sin^n(t)\,(-dt), \\
&= \int_{0}^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt, \\
&= W_n.
\end{aligned}
$$

(c) Vérifier que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de nombres réels strictement positifs.

Pour cela on va calculer la différence entre deux termes consécutifs

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)(\sin(x) - 1)\,dx.$$

Or pour tout $x \in [0, \pi/2]$, nous avons $\sin(x) \in [0, 1]$ donc $\sin(x) - 1 \leq 0$. Ainsi $W_{n+1} - W_n \leq 0$ et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

2. (a) Soit n un entier naturel. Etablir la relation $W_{n+2}(n+2) = (n+1)W_n$.
Indication : on fera une intégration par parties.

On va à nouveau utiliser des propriétés des fonctions trigonométriques pour établir cette égalité.

$$
\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)dx, \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\cos^2(x)dx, \\
&\downarrow \text{ on utilise le fait que } \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(1 - \sin^2(x))dx, \\
&= W_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin^2(x)dx.
\end{aligned}
$$

Il nous faut maintenant travailler sur cette deuxième intégrale en gardant à l'esprit que l'on cherche à faire apparaître W_n.
Faisons une première intégration par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto \sin(x)\cos^n(x)$.

$$
\begin{aligned}
W_{n+2} &= W_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin^2(x)dx, \\
&\downarrow \text{ intégration par parties} \\
&= W_n - \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x)\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n+1}\cos^{n+2}(x)dx, \\
&= W_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}.
\end{aligned}
$$

On a donc $W_{n+2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = W_n$, soit $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

(b) En déduire que W_{n+2} est équivalent à W_n lorsque n tend vers $+\infty$ et que pour tout entier naturel n, on a

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : on cherchera à montrer que $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constant pour tout entier n.

Pour montrer l'équivalence entre W_{n+2} et W_n, nous allons montrer que la limite du rapport entre les deux est égale à 1. Pour cela, on repart de la question précédente et notons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+2}}{W_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Enfin, pour la deuxème partie de la question, il s'agit de voir que le membre de gauche est constant pour tout n. En effet

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

En particulier, pour $n=0$, et en utilisant les questions précédentes, on trouve que

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Vérifier que W_{n+1} est équivalent à W_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour montrer ce premier résultat, on va exploiter le lien entre W_{n+2} et W_n et en utilisant le fait que $W_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} W_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$.

Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, nous avons $0 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $\cos^{n+2}(x) \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$. Par croissante de l'intégrale, on a donc $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ et comme $W_n > 0$, on peut donc écrire

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Or $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$, ce qui, en réinjectant dans l'inégalité précédente, nous donne

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Le théorème des gendarmes nous donne $W_{n+1} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, donc $W_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} W_n$.

(d) En déduire que W_n est équivalent à $\sqrt{\pi/(2n)}$ lorsque n tends vers $+\infty$.

D'après les questions précédentes, nous avons $W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$ et $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Ce qui permet d'écrire $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ soit $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2.2 Etude d'une suite d'intégrales

Pour entier naturel n, on considère la fonction numérique réelle f_n définie dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$f_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2}\, dt.$$

Par exemple $f_n(3) = \int_0^3 t^n e^{-t^2}\, dt$.

1. Préciser la parité de f_n en fonction de l'entier naturel n.

   La question nous invite à étudier la quantité $f_n(-x)$ selon que n soit pair ou impair. Ainsi :
   - lorsque $n = 2m$, nous avons

   $$\begin{aligned} f_{2m}(-x) &= \int_0^{-x} t^{2m} e^{-t^2}\, dt, \\ &\quad \downarrow \text{ on pose } u = -t \\ &= \int_0^{x} -u^{2m} e^{-u^2}\, du, \\ &= -\, f_{2m}(x) \end{aligned}$$

     Ainsi la fonction f_{2m} est impaire.
   - lorsque $n = 2m+1$, nous avons

   $$\begin{aligned} f_{2m+1}(-x) &= \int_0^{-x} t^{2m+1} e^{-t^2}\, dt, \\ &\quad \downarrow \text{ on pose } u = -t \\ &= \int_0^{x} u^{2m+1} e^{-u^2}\, du, \\ &= f_{2m+1}(x) \end{aligned}$$

     Ainsi la fonction f_{2m+1} est paire.

2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, on a

   $$0 \leq f_0(x) \leq 1 + \int_1^x e^{-t}\, dt.$$

   La première inégalité, à gauche, est évidente car pour tout $t > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive.
   Pour la deuxième inégalité, on a

   $$\begin{aligned} f_0(x) &= \int_0^{x} e^{-t^2}\, dt, \\ &\quad \downarrow \text{ relation de Chasles sur l'intégrale} \\ &= \int_0^{1} e^{-t^2}\, dt + \int_1^{x} e^{-t^2}\, dt, \\ &\quad \downarrow \text{ car } e^{-t^2} \leq 1 \text{ pour tout } t > 0 \\ &= 1 + \int_1^{x} e^{-t^2}\, dt, \\ &\quad \downarrow \text{ pour tout } t > 0,\ e^{-t^2} \leq e^{-t} \\ &= 1 + \int_1^{x} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

   Ce qui nous donne notre deuxième inégalité.

(b) Justifier que pour tout entier naturel n, f_n admet une limite en $+\infty$ et que celle de f_0 est finie.

L'inégalité établié précédemment montre bien que f_0 admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, pour tout réel x, nous avons

$$1+\int_1^x e^{-t}\,dt = 1+e^{-1}-e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1+e^{-1}.$$

Pour ce qui de la limite de f_n, les résultats actuels du cours ne permettent pas de montrer la convergence de l'intégrale. Nous le ferons donc a posteriori dans les prochaines questions.

3. Déterminer une relation de récurrence entre f_{n+2} et f_n.
Indication : on procédera à une intégration par parties.

Il suffit simplement de calculer f_{n+2}.

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(x) &= \int_0^x t^{n+2}e^{-t^2}\,dt,\\
&= \int_0^x \left(-\frac{1}{2}t^{n+1}\right)(-2t)e^{-t^2}\,dt,\\
&\quad \downarrow \text{ à l'aide d'une intégration par parties}\\
&= \left[\left(-\frac{1}{2}t^{n+1}\right)e^{-t^2}\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{n+1}{2}\int_0^x t^n e^{-t^2}\,dt,\\
&= -\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2} + \frac{n+1}{2}\int_0^x t^n e^{-t^2}\,dt,\\
&= -\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2} + \frac{n+1}{2}f_n(x).
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout x, $f_{n+2}(x) = -\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2} + \frac{n+1}{2}f_n(x)$.

4. (a) Calculer $f_1(x)$ en fonction du nombre réel x, puis la limite de f_1 en $+\infty$.

On a trivialement

$$f_1(x) = \int_0^x te^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_{t=0}^{t=x} = -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2-1}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \frac{1}{2}$.

(b) En déduire une expression simple de la limite de f_{2n+1} en $+\infty$ en fonction de l'entier naturel n.

D'après la question précédente, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} f_{n+2}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n+1}{2}f_n(x).$$

Par une récurrence simple, on montre que pour tout entier n, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} f_{2n+1}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots(2)}{2^n}f_1(x) = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots(2)}{2^{n+1}} = \frac{n!}{2}.$$

2.3 Lien avec l'intégrale de Wallis

On va maintenant chercher à faire le lien entre la fonction f_n étudier dans la précédente section et l'intégrale de Wallis étudiée en première partie.

1. Soit x un nombre réel tel que $0 \leq x < 1$. Démontrer que l'on a

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

La fonction exponentielle est une fonction convexe, ainsi, la courbe est au dessus de ses tangentes. En particulier, en 0, nous avons

$$e^x \geq e^0 + e^0(x-0) = 1 + x,$$

ce qui nous donne la première inégalité à gauche. Pour la deuxième, posons pour tout $x \in [0,1[, \ h(x) = (1-x)e^x$ et remarquons que cette fonction est décroissante sur ce même intervalle car $h'(x) = -xe^x < 0$. Or $h(0) = 1$ donc pour tout $x \in [0,1[$, nous avons $h(x) = (1-x)e^x \leq h(0) = 1$, ainsi $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$.

2. Soit n un entier naaturel non nul.
   (a) Etablir la relation

$$\int_0^n e^{-x^2}\, dx = n \int_0^1 e^{-n^2t^2}\, dt$$

puis la double inégalité

$$n \int_0^1 (1-t^2)^{n^2}\, dt \leq \int_0^n e^{-x^2}\, dx \leq n \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n^2}}\, dt.$$

Indication : pour la première égalité,on procédera à un changement de variable.

Pour la première égalité qu'il est demandé de montrer, on va simplement procéder au changement de variable, pour tout $n > 0, \ x = nt$ qui est un C^1 difféomorphisme de $[0,n]$ dans $[0,1]$. On obtient ainsi directement l'égalité que l'on souhaite montrer.

$$\int_0^n e^{-x^2}\, dx = n \int_0^1 e^{-n^2t^2}\, dt$$

Pour la deuxième partie de la question, on rappelle que pour tout $x \in [0,1[$

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \iff 1 + x^2 \leq e^{x^2} \leq \frac{1}{1-x^2}.$$

Donc, en composant par la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est décroissante, on trouve

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Finalement, en élevant chaque membre de cette inégalité à la puissance $n^2 > 0$, dont les quantités sont positives, on a

$$(1-x^2)^{n^2} \leq e^{-n^2x^2} \leq \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n^2}.$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité par n, puis en intégrant entre 0 et 1, en utilisant la croissance de l'intégrale et le résultat précédemment établi, on trouve notre double inégalité.

(b) Vérifier que

$$W_{2n^2+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n^2}\, dt.$$

Indication : on effectuera le changement de variable $t = \cos(u)$.

On va simplement suivre les indications. On remarquera que le changement de variable $t = \cos(u)$ est un C^1 difféomorphisme de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}
W_{2n^2+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n^2+1}(t)\, dt,\\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^{2n^2}(t)\, dt,\\
&\downarrow \text{ on utilise le fait que } \sin^2(x) = 1-\cos^2(x).\\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(t)(1-\cos^2(t))^{n^2}\, dt,\\
&\downarrow \text{ on pose le changement de variable } u = \cos(t).\\
&\quad \text{on a donc } du = -\sin(t)\, dt\\
W_{2n^2+1} &= \int_0^1 (1-u^2)^{n^2}\, dt.
\end{aligned}$$

(c) Démontrer l'inégalité

$$W_{2n^2-2} \geq \int_0^1 (1+t^2)^{-n^2}\, dt.$$

Indication : on procédera au changement de variable $t = \tan(u)$

A nouveau, le changement de variable proposé est bien un C^1 difféomorphisme de $[0, \pi/2[$ dans $[0, +\infty[$. La grande difficulté est de faire apparaître cette tangente, mais pour cela, on rappelle que l'on

$$\forall x \in [0, \pi/2[,\ 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
W_{2n^2-2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n^2-2}(t)\, dt,\\
&\downarrow \text{ en utilisant un résultat de la première partie}\\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n^2-2}(t)\, dt,\\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t))^{n^2-1}\, dt,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{cos^2(t)} \left(\frac{1}{cos^2(t)}\right)^{-n^2} \; dt, \\
&\downarrow \; \forall x \in [0, \pi/2[, \; 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}. \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{cos^2(t)} \left(1 + \tan^2(t)\right)^{-n^2} \; dt, \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{cos^2(t)} \left(1 + \tan^2(t)\right)^{-n^2} \; dt, \\
&\downarrow \; \text{on pose } u = \tan(t) \text{ on a donc} \\
&\quad du = (1 + \tan(t))^2 \, dt = \frac{dt}{cos^2(t)}. \\
&= \int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{-n^2}, \\
&\downarrow \; \text{a cause de la positivité de la fonction} \\
&= \int_0^{1} (1 + t^2)^{-n^2}.
\end{aligned}
$$

Ce qui montre le résultat souhaité.

3. (a) Démontrer que la limite de f_0 en $+\infty$ est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Il s'agit de faire le lien avec les questions précédentes et aussi les questions de la première partie et notamment l'encadrement de la question 2 qui peut être réécrit comme

$$nW_{2n^2+1} \leq f_0(n) \leq nW_{2n^2-2}.$$

Or lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $nW_{2n^2+1} \sim nW_{2n^2} \sim n\sqrt{\frac{\pi}{4n^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, donc $nW_{2n^2+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

De la même façon $nW_{2n^2-2} \sim nW_{2n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi, par encadrement on trouve que $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) En déduire la limite de f_{2n} en $+\infty$ en fonction de n.

On procède de la même manière que lors du calcul de la limite de f_{2n+1}.
Notons, d'après les résultats de la section 2, que :

$$\lim_{x \to +\infty} f_{2n}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2n-1}{2} f_{2n}(x).$$

Par une récurrence simple, on montre que pour tout entier n, nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} f_{2n}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(5)(3)1}{2^n} f_0(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(5)(3)1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}.$$

3 Suite de Fibonacci et nombre d'or

On note φ le *nombre d'or*, c'est-à-dire le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

   (a) Pour tout entier $n \geq 0$, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a

$$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout entier n, $a_n > 0$ ce que l'on peut montrer par une récurrence simple sur a_n en remarquant que $a_0 > 0$ et que $a_{n+1} > 1$ par définition.

On souhaite maintenant voir si cette suite est bornée, on va à nouveau le montrer par récurrence sur n. On a bien sûr

$$\frac{3}{2} \leq a_0 \leq 2.$$

Supposons maintenant que la relation est vraie pour un entier n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. En utilisant la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2 \iff & \frac{2}{3} \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2}, \\
& \downarrow \text{ on ajoute 1} \\
\iff & \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{a_n} \leq \frac{5}{3} \leq 2, \\
\iff & \frac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq 2.
\end{aligned}$$

La relation reste vraie au rang $n+1$ et est donc vraie pour tout entier n.

   (b) Etudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$, notamment ses variations et déterminer un point fixe de la fonction f.

La fonction f est définie et dérivable pour tout réel x non nul. Sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ qui est une fonction négative pour tout x non nul et la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^\star$, donc en particulier sur $\mathbb{R}_+^\star$. Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
f	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

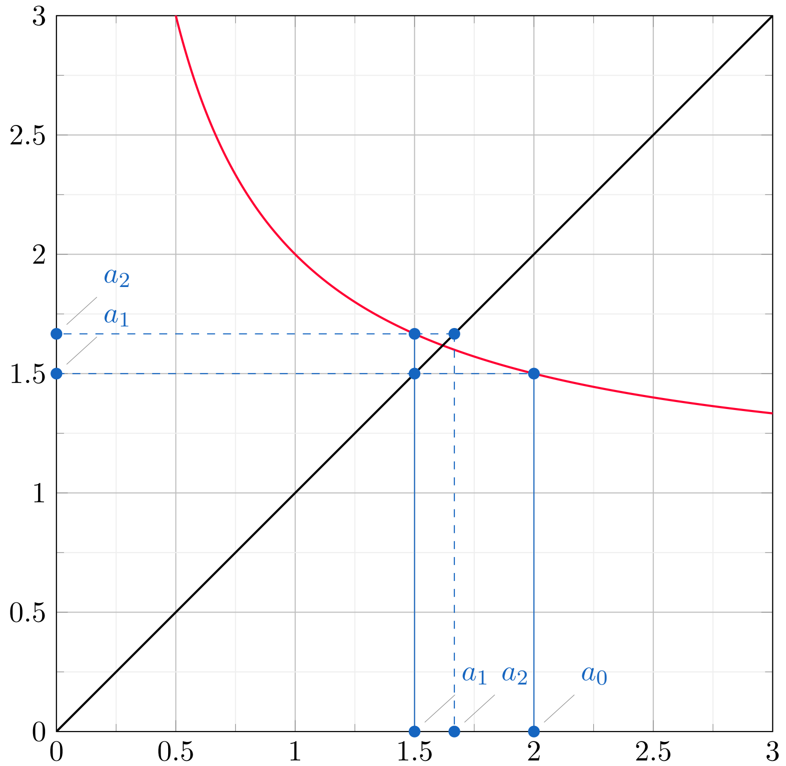
Un point fixe de la fonction f est donnée en résolvant l'équation

$$f(x) = x \iff x = 1 + \frac{1}{x}, \iff x^2 = x + 1.$$

Nous avons déjà vu que les racines de cette équation sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Mais on s'intéresse uniquement à la racine positive ici.

(c) A l'aide de l'étude précédente, déterminer graphiquement les premières valeurs de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vous aidant du graphique ci-dessous.

On se contente de représenter les premières termes de la suite, de façon graphique



(d) Pour tout entier naturel $n \geq 0$, montrer l'inégalité $|a_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \varphi|$.

Pour cette question, on utilisera le fait que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - \varphi| &= \left|1 + \frac{1}{a_n} - \varphi\right|, \\
&\quad \downarrow \text{ en utilisant le fait que } \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= \left|1 + \frac{1}{a_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}\right|, \\
&= \left|\frac{\varphi - a_n}{a_n \varphi}\right|, \\
&\quad \downarrow \text{ pour tout } n,\ a_n \geq \frac{3}{2} \text{ et } \varphi \geq \frac{3}{2} \\
&= \frac{4}{9}\,|a_n - \varphi|\,.
\end{aligned}$$

(e) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 0$,

$$|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

On va montrer la relation par récurrence.

- au rang $n = 0$, nous avons $|a_0 - \varphi| = \left|2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{1}{2}|3 - \sqrt{5}| \leq \frac{3}{4} \leq 1$ car $\frac{3}{2} \leq \sqrt{5} \leq 3$.
- soit $n \geq 0$ pour lequel la relation est vérifiée. Montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. C'est plutôt immédiat.

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \varphi| &\leq \frac{4}{9}|a_n - \varphi|, \\ &\quad \downarrow \text{ hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n, \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

La relation reste donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, nous avons

$$|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(f) Que dire du comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

D'après la question précédente, vu $\frac{4}{9} \leq 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} | a_n - \varphi| = 0$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ.

2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \frac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1}$. On note f la fonction définie pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

(a) Etudier les variations de f sur son intervalle de définition. En particulier, calculer $f(\varphi)$ et montrer que, pour tout nombre réel $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > \frac{1}{2}$.

La fonction f est définie et dérivable pour tout $x > \frac{1}{2}$ et sa dérivée est égale à

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2}, \\ &\quad \downarrow \text{ on va simplifier l'expression} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x-1)^2}, \\ &= 2\frac{x^2 - x - 1}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur dont les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La dérivée est donc positive à l'extérieur de l'intervalle des racines et négative dans l'intervalle défini par les racines.

Remarquons également que $f(\varphi) = \varphi$ On dresse le tableau de variation suivant

x	$\frac{1}{2}$		φ		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	φ	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum est atteint en $x = \varphi$ pour lequel la fonction f est égale à $\varphi > \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, c_n existe et $c_n > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

D'après la question précédente, nous avons montré que pour tout $x > \frac{1}{2}$, nous avons $f(x) > \frac{1}{2}$. Or $c_{n+1} = f(c_n)$ et $c_0 = 2\frac{1}{2}$. Une récurrence simple montre que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout entier n, $c_n > \frac{1}{2}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

On va à nouveau monter ce résultat par récurrence sur n.

- au rang $n = 0$, nous avons $c_0 = 2$, $c_1 = \frac{5}{3}$, donc
$$\varphi \leq c_1 \leq c_0 \leq 2.$$
- soit n un entier naturel pour lequel la relation est vraie. Montrons que cela reste vrai au rang $n+1$.
Au rang n, nous avons
$$\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2.$$
En utilisant la croissance de f sur $]\varphi, +\infty[$ nous avons
$$f(\varphi) \leq f(c_{n+1}) \leq f(c_n) \leq f(2) \iff \varphi \leq c_{n+2} \leq c_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2.$$
La propriété reste donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

(d) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

D'après la question précédente, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

(e) Montrer que pour tout entier naturel n, $c_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2$.

On va utiliser la définition de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$c_{n+1} - \varphi = \frac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1} - \varphi,$$

$$= \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + 1 + \varphi}{2c_n - 1},$$

$\downarrow$ on utilise le fait que $\varphi^2 = 1 + \varphi$

$$= \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi^2}{2c_n - 1},$$

$\downarrow$ on reconnaît une identité remarquable

$$= \frac{(c_n - \varphi^2)^2}{2c_n - 1},$$

$\downarrow$ $\varphi \leq c_n$ donc $2c_n - 1 \geq 2$, on peut minorer le dénominateur par 2

$$\leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi^2)^2.$$

(f) En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 0$, l'inégalité

$$c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

Le plus simple reste de montrer ce résultat par récurrence sur n.

- pour $n = 0$, nous avons bien $c_0 - \varphi = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq \dfrac{1}{2}$.
- soit n un entier naturel pour lequel la relation est vraie et montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$. On repart directement de l'hypothèse de récurrence

$$c_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2,$$

$\downarrow$ hypothèse de récurrence

$$\leq 2^{-1} 2^{-2\sum_{k=0}^{n} 2^k},$$

$$\leq 2^{-1} 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}},$$

$\downarrow$ on change les indices de la somme, en posant $k' = k + 1$

$$\leq 2^{-1} 2^{-\sum_{k'=1}^{n+1} 2^{k'}},$$

$$\leq 2^{-1-\sum_{k'=1}^{n+1} 2^{k'}},$$

$\downarrow$ on utilise le fait que $1 = 2^0$

$$\leq 2^{-\sum_{k'=0}^{n+1} 2^{k'}}.$$

La propriété reste vraie au rang $n + 1$.

On en déduit donc que pour tout entier $n \geq 0$, $c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}$.

(g) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question précédente, pour tout entier n, nous avons

$$0 \leq c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

Or $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k} = 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n - \varphi = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} c_n = \varphi.$$