Analyse I

Fiche de TD

Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler

Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France

guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Résumé

Les exercices proposés dans cette fiche constituent une bonne base d'entraînement pour mettre en application les différentes notions vues en cours. Les exercices sont essentiellement triés par thème mais il n'est pas impossible qu'il faille avoir recours à des notions vues ultérieurement afin de pouvoir le traiter.

Les exercices proposés sont également séparés en deux catégories, une partie dite "Applications" constituée des exercices simples que vous devez savoir faire dans le cadre de ce cours. D'autres exercices sont proposés dans une partie "*Pour aller plus loin*". Ces exercices là présentent des difficultés supplémentaires : parfois plus complexes en terme de calculs, plus théoriques ou nécessitent de faire des démonstrations en revenant aux définitions donnés dans le cours. Bien que je ne demande pas, dans le cadre de ce cours, à ce que vous sachiez résoudre ce type d'exercices, ils restent très formateurs.

En cas de problème dans la résolution de ces exercices, vous pouvez toujours me solliciter par mail.

Tous les exercices ne pourront pas être traités en TD, il est donc important que vous vous entraîniez chez vous pour maîtriser ces notions et que vous refassiez les exercices traités en cours.

Table des matières

1 Suites de nombres réels 3

2 Généralités sur les fonctions 10

3 Continuité et convexité 12

4 Dérivabilité et régularité 13

5 Développement limité 16

6 Primitives et Intégrales 18

7 Etude de (suites de) fonctions 22

1 Suites de nombres réels

Exercice 1.1 (Vérifier ses connaissances)**.**
Les questions suivantes sont des questions de cours pour vérifier vos connaissances.

1. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez ou donner un contre-exemple*
   (a) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$, *alors* $u_n \geq L$ *à partir d'un certain rang.*
   (b) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L < 0$, *alors* $u_n < 0$ *à partir d'un certain rang.*
   (c) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$ *et que* $u_n \geq 0$, *alors* $L \geq 0$.
   (d) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$ *et que* $u_n < 0$, *alors* $L < 0$.
   (e) *Si une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $L \in \mathbb{R}$ *et si* $K > L$, *alors* $u_n \leq K$ *à partir d'un certain rang.*
   (f) *Toute suite monotone est convergente.*
2. *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Les propositions* A *et* B *sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?*
   (a) A : u *est bornée,*
   B : u *est convergente.*
   (b) A : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$,
   B : u *diverge*
   (c) A : u *converge,*
   B : u *est stationnaire*
3. *Soient deux suites réelles* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Les propositions* A *et* B *sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?*
   (a) A : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$,
   B : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)$.
   (b) A : $u_n < v_n$ *à partir d'un certain rang,*
   B : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) < \lim\limits_{n\to\infty}(v_n)$.
4. *On considère les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2-n^2}{n^3}$$

   (a) *Déterminer un équivalent de ces deux suites lorsque* $n \to +\infty$.
   (b) *Faire de même avec les suites* $u_n v_n$, $\frac{u_n}{v_n}$, $u_n + v_n$ *et* $u_n - v_n$.

Exercice 1.2 (Variations d'une suite)**.**
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suivantes sont-elles croissantes ou décroissantes ?*

1. $u_n = n^2 + 5n + 4$.
2. $u_n = \dfrac{-2n+3}{n+1}$.
3. $u_n = \sqrt{2n+5}$.
4. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Exercice 1.3 (Suite arithmético-géométrique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 10$ *et pour tout entier* $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

1. *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3.
2. *On considère la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = u_n - 3$. *Calculer* v_0, v_1, v_2 *et* v_3.

3. *Déterminer la nature de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. *Exprimer* v_n *en fonction de* n*, puis* u_n *en fonction de* n.
5. *Calculer* $S_n = v_0+v_1++\ldots+v_n$ *et en déduire la valeur de la somme* $S'_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$.

Exercice 1.4 (Etude d'une suite)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 0$ *et la relation de récurrence* $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$ *pour tout entier naturel* n*. On définit également la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$ *pour tout entier naturel* n.

1. *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3
2. *Montrer que* $(v_n)_{n\in N}$ *est une suite géométrique et donner des précisions.*
3. *Exprimer* v_n *en fonction de* n.
4. *En déduire une expression de* u_n.

Exercice 1.5 (Variation d'une suite)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ *définie par* $u_0 = 2$ *et, pour tout entier naturel* n *:*

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

1. *Montrer que pour tout* n*,* $u_{n+1} \geq 1$.
2. *Montrer que pour tout entier* n*, on a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}.$$

3. *En déduire les variations de* $(u_n)_{n\in N}$.

Exercice 1.6 (Une suite arithmético-géométrique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ *définie par* $u_0 = -4$ *et* $u_{n+1} = -\dfrac{3}{4}u_n + 3$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer le signe de la limite de cette suite.*
2. *Trouver un point fixe de la suite* $(u_n)_{n\in N}$*. On le notera* s.
3. *Déterminer la nature de la suite* $(v_n)_{n\in N}$ *définie par* $v_n = u_n - s$.
4. *En déduire une expression de la suite* $(u_n)_{n\in N}$ *et sa limite.*

Exercice 1.7 (Calculs de Racines Carrées)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$*. On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ *et pour tout* $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On considère également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ *et pour tout* $n \geq 0$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. *Montrer que pour tout entier* n*,* $v_{n+1} = v_n^2$.
2. *Calculer* v_n *en fonction de* v_0 *et montrer que* $|v_0| < 0$*. En déduire que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.
3. *Exprimer* u_n *en fonction de* v_n *et montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.
4. *Calculer les trois premiers termes de la suite, pour* $u_0 = 1$ *et* $a = 2$.

Exercice 1.8 (Etude de la convergence d'une suite)**.**
Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}.$$

1. (a) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.*
   (b) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. Peut)on préciser sa limite sans calcul supplémentaire.*
2. (a) *A l'aide du théorème des acroissements finis, encadrer $\ln(n+1)-\ln(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*
   (b) *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et préciser sa limite.*

Exercice 1.9 (Suite de Fibonacci)**.**
L'histoire des Mathématiques est parfois surprenante, et décidément toujours inattendue. Le vieux nombre d'or (qui sera l'objet de cet exercice), à l'origine géométrique, s'apparenta des siècles plus tard avec des fractions issues d'une suite purement arithmétique. L'artisan de cette union fut le plus remarquable mathématicien du Moyen Âge, Leonardo Pisano, plus connu sur le nom de Fibonacci[1]*. Le plus célèbre de tout les problèmes qui fait apparaître ce nombre d'or se trouve certainement dans le* ***Livre de l'abaque****. Il s'agit du fameux problème des lapins, dont la solution est la suite aujourd'hui connue sous le nom de Fibonacci.*

Le problème est posé de la façon suivante : combien de couples de lapins aurons-nous à la fin de l'année si nous commençons avec un couple qui engendre chaque mois un autre couple qui procrée à son tour au bout de deux mois de vie ?

L'objectif de cet exercice est alors d'étudier les solutions de ce problème et plus largement la suite de Fibonacci $(F_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et $F_2 = 1$ et pour tout $n \geq 1$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. *On s'intéresse à l'équation $x^2 = x + 1$.*
   (a) *Montrer que cette équation possède une solution positive que l'on notera φ. Ce nombre est appelé nombre d'or. L'autre solution, négative, sera notée ϕ*
   (b) *Montrer les égalités*
   $$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1}.$$
   (c) *Montrer que l'on a $\varphi = \dfrac{-1}{\phi}$.*
2. *On considère à présent les termes de la suite de Fibonacci.*
   (a) *Calculer les valeurs de F_n pour $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.*
   (b) *En utilisant le fait que $F_{n+2} \geq 2F_n$, donner une borne inférieure sur F_n pour entier naturel n.*

1. **Leonardo Pisano, Fibonacci (1170 - 1250)**. Il naquit à Pise en 1170. Son surnom renseigne sur son origine familiale : Fibonacci signifie tout simplement «fils de Bonacci» (figlio di Bonacci). Cependant, ce nom est d'origine moderne ; on ne dispose d'aucune preuve permettant d'affirmer qu'il était connu sous le patronyme de Fibonacci. Il s'initia aux Mathématiques à partir de la comptabilité, car son père était un marchand italien qui avait des activités commerciales internationales. Rapidement, Leonardo montra un vif intérêt pour les mathématiques qui allait bien au-delà de leurs applications mercantiles. Ses voyages marchands en Afrique du Nord lui offrirent l'opportunité de s'initier aux mathématiques arabes aux côtés de maîtres musulmans. Il connut ainsi le système de numérotation arabo-hindou et en comprit immédiatement les énormes avantages. En Europe, il en devint le défenseur le plus zélé et tenta de le vulgariser. C'est à lui que nous devons apparition dans notre culture.

3. Soient deux réels α et β. On considère, pour tout entier n, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(a) Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation de récurrence

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

(b) Déterminer les valeurs de α et β telles que $f_0 = f_1 = 1$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un entier naturel.

(d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = \varphi$. On pourra résoudre cette question de deux façons différentes.

Exercice 1.10 (Approximations du nombre d'or)**.**

On rappelle que l'on a posé $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

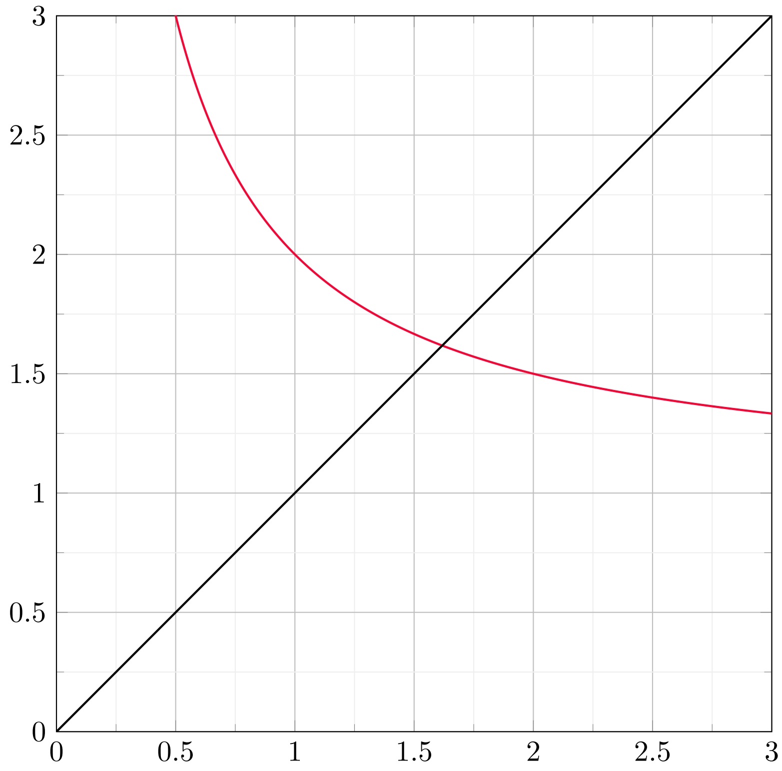
1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

(a) Pour tout entier $n \geq 0$, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a

$$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2.$$

(b) Etudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$, notamment ses variations et déterminer un point fixe de la fonnction f.

(c) A l'aide de l'étude précédente, déterminer graphiquement les premières valeurs de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vous aidant du graphique ci-dessous.



(d) Pour tout entier naturel $n \geq 0$, montrer l'inégalité $|a_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \varphi|$.

(e) *En dédure que pour tout entier naturel* $n \geq 0$,

$$a_n - \varphi \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

(f) *Que dire du comportement de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *?*

2. *Soit* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $c_0 = 2$ *et pour tout entier naturel* n, $c_{n+1} = \dfrac{c_n^2+1}{2c_n-1}$. *On note* f *la fonction définie pour tout* $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ *par*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

(a) *Etudier les variations de* f *sur son intervalle de définition. En particulier, calculer* $f(\varphi)$ *et montrer que, pour tout nombre réel* $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > \frac{1}{2}$.

(b) *En déduire que pour tout entier naturel* n, c_n *existe et* $c_n > \frac{1}{2}$, *c'est-à-dire que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*

(c) *En déduire que pour tout entier naturel* n, $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

(d) *Montrer que la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

(e) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $c_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2$.

(f) *En déduire, pour tout entier naturel* $n \geq 0$, *l'inégalité*

$$c_n - \varphi \leq 2^{-\sum_{k=0}^{n} 2^k}.$$

(g) *En déduire la limite de la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.11 (Autour de la suite de Fibonacci)**.**
On considère, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On note à nouveau φ, *le nombre d'or, i.e.* $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et on introduit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

1. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, $|\varphi - u_n| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.
2. *Montrer, pour tous les entiers pour lesquels cela a un sens, que* $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}$.
3. *En déduire que tous les termes imparirs de la suite de Fibonacci sont des nombres entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés de nombres entiers.*
4. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *nous avons*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

5. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *nous avons* $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ [2]. *Quelle est la nature de cette suite ?*

2. Cette identité est connue sous le nom de *Identité de Cassini*. Elle est étend d'ailleurs cette relation à tous les entiers relatifs n.

6. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 1.12 (Exotisme de Fibonacci)**.**
La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

possède de nombreuses propriétés. La première propriété est de pouvoir construire un triplet Pythagoricien. Rappelez-vous, un triplet (a, b, c) d'entiers est appelé triplet pythagoricien s'il vérifie la relation

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Cela est par exemple le cas du triplet $(3, 4, 5)$ pour lequel nous avons

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

1. Pour tout entier naturel n, nous définissons

$$a = F_n F_{n+3}, \quad b = 2F_{n+2}F_{n+1} \quad \text{et} \quad c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2.$$

Montrer que le triplet (a, b, c) forme un triplet Pythagoricien.

D'autres propriétés intéressantes portent sur la somme des termes de la suite de Fibonacci. Par exemple, il est facile d'exprimer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite de Fibonacci à partir d'un seul de ses termes.

2. Montrer que pour tout entier n, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

3. A l'aide de la relation précédente, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{k'} F_{n+k} = F_{n+k'+2} - F_{n-1}.$$

Enfin, une dernière propriété remarquable est le fait que la somme de dix termes consécutifs de la suite est un multiple de 11. On peut même être plus précis, en disant que cette somme est égale à 11 fois le septième terme de la somme.

3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{9} F_{n+k} = 11F_{n+6}.$$

Exercice 1.13 (Limite d'une suite)**.**
Pour tout entier $n \geq 1$, considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n+\ln(1)} + \frac{1}{n+\ln(2)} + \ldots + \frac{1}{n+\ln(n)}.$$

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et déterminer sa limite.

Exercice 1.14 (Lemme de Cesàro)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réeelle convergente vers un réel* L*. Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *la suite définie pour tout* n *non nul par*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge vers* L [3].

Exercice 1.15 (Calculs d'équivalents)**.**
Soit une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\underset{n\to\infty}{u_n} = 0$*. Justifier les équivalences suivantes*

1. $\sin(u_n) \sim u_n$.
2. $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
3. $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$.
4. $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.
5. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.
6. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
7. *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R} : (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

3. On pourra d'abord commencer par traiter le cas $L = 0$

2 Généralités sur les fonctions

Exercice 2.1 (Etude des fonctions circulaires)**.**
Cet exercice se propose de vous faire travailler autour des fonctions circulaires.

1. *Pour tout réel x, déterminer la valeur de* $\cos(x)^2 + \sin(x)^2$.
2. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$*, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\sin(\arcsin(x))$.
   (b) $\cos(\arccos(x))$.
   (c) $\sin(\arccos(x))$.
   (d) $\cos(\arcsin(x))$.
3. *Pour quelles valeurs du réel x a-t-on les égalités suivantes ?*
   (a) $\arcsin(\sin(x)) = x$.
   (b) $\arccos(\cos(x)) = x$.

Exercice 2.2 (Etude des fonctions hyperboliques)**.**
Cet exercice se propose de vous faire travailler autour des fonctions hyperboliques.

1. *Pour tout réel x, déterminer la valeur de* $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$
   (b) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$
   (b) $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))$
4. *Pour tout* $x \in [1, +\infty]$*, simplifier les expressions suivantes*
   (a) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$
   (b) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$

Exercice 2.3 (Etude des fonctions hyperboliques)**.**
Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier la définition de la dérivée et des limites vues en cours

1. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.
2. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.
3. $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

Exercice 2.4 (Etude de la cotangente)**.**
On considère la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Cette fonction est la fonction inverse de la fonction tan *et s'appelle la cotangente, notée* cotan. *A ne pas confondre avec la réciproque de la fonction* tan *qui est l'arctangente, notée* arctan.

1. *Donner le domaine de définition de cette fonction u*
2. *Exprimer la dérivée de cette fonction.*
3. *Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son intervalle de définition.*

Exercice 2.5. *Déterminer les limites des fonctions suivantes*

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + x - 3}{2x^2 - 3x^3}$ *en* $+\infty$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} - x$ *en* $+\infty$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$ *en* $+\infty$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\tan(3x)}$ *en* 0.
5. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x \ln(x))}{x}$ *en* 0.
6. $f : x \mapsto \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^x$ *en* $+\infty$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$ *en* 0.
8. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2 + x - 2}$ *en* 1.
9. $f : x \mapsto \left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ *en* $+\infty$.
10. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$ *en* $+\infty$.

3 Continuité et convexité

Exercice 3.1 (Vérifier ses connaissances)**.**

1. *Soit une fonction réelle f sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'un implique l'autre ?*
   A : la restriction de f à $[0,1]$ est continue,
   B : f est continue en tout point de $[0,1]$
2. *L'image d'un intervalle ouvert par une fonction réelle continue est-elle nécessairement un intervalle ouvert ?*
3. (a) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.*
   (b) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0,1]$ et non bornées ? Si oui, en donner un exemple.*
   (c) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $]0,1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.*
   (d) *Existe-t-il des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$, bornées mais n'atteignant pas leurs bornes ? Si oui, en donner un exemple.*
4. *Soit une fonction réelle f définie sur $[a,b]$ et croissante, alors $f([a,b])$ est :*
   (a) $[f(a), f(b)]$.
   (b) $[f(b), f(a)]$.
   (c) *On ne peut pas savoir*
5. *Soit une fonction réelle f définie, continue sur $[a,b]$ et décroissante, alors $f([a,b])$ est :*
   (a) $[f(a), f(b)]$.
   (b) $[f(b), f(a)]$.
   (c) *On ne peut pas savoir*
6. (a) *Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   A : $f > 0$,
   B : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq \alpha$.
   (b) *Même question lorsque I est un segment $[a,b]$.*
7. (a) *Soit f une fonction réelle définie sur $[0,2]$. On sait que les restrictions de f à $[0,1]$ et à $[1,2]$ sont continues. Peut-on affirmer que f est continue ?*
   (b) *Même question si les restrictions de f à $[0,1]$ et $]1,2]$ sont supposées continues.*
8. *Une application contractante est-elle nécessairement continue ?*

Exercice 3.2 (Convexité)**.**
Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Monter que si g est convexe et que f est convexe et croissante, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 3.3 (Une utilisation de la convexité)**.**
Soit f une application deux fois dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f''(x) = -x|f(x)|$$

et

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0.$$

Montrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$

4 Dérivabilité et régularité

Exercice 4.1 (Vérifier ses connaissances)**.**

1. *Monter, à l'aide de la définition du nombre dérivé, que la fonction* $f : x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que :* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$.
2. *Soit* f *une fonction réelle définie sur un intervalle* I*, et soit* a *un point intérieur de* I *(donc différent des bornes de* I*). Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   A *:* f *est dérivable en* a*,*
   B *:* f *est dérivable à droite et à gauche en* a
3. *Soit* f *une fonction réelle définie sur un segment* $[a, b]$*. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.*
   (a) *Si* f *est dérivable sur* $[a, b]$ *et si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f'(c) = 0$.
   (b) *Si* f *est dérivable sur* $]a, b[$ *et si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.
   (c) *Si* f *est de classe* C^1 *sur* $[a, b]$ *alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
   (d) *Si* f *admet un extremum en* $c \in [a, b]$ *et si* f *est dérivable en* c *alors* $f'(c) = 0$.
   (e) *Si* f *admet un extremum en* $c \in]a, b[$ *et si* f *est dérivable en* c *alors* $f'(c) = 0$.
4. *Soit* f *une fonction réelle, définie et dérivable sur un intervalle* I*, et soit* a *un point intérieur à* I*. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   (a) A *:* f *est strictement croissante sur* I*,*
   $B : \forall x \in I,\ f'(x) > 0$.
   (b) A *:* f *admet un extremum local en* a*,*
   $B : f'(a) = 0$.
5. *Soit* f *une fonction réelle définie sur intervalle* I*. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
   (a) *Si* f *est dérivable sur* I*, alors elle est continue sur* I*.*
   (b) *Si* f *est deux fois dérivable sur* I *alors elle est de classe* C^2
   (c) *Si* f *est deux fois dérivable sur* I*, alors est elle de classe* C^1 *sur* I*.*
   (d) *Si* f *est convexe sur* I *alors elle est dérivable sur* I *et sa dérivée est croissante.*
   (e) *Si, pour* $n \in \mathbb{N}$*,* f *est* n *fois dérivable sur* I *et si* f *s'annule* $n + 1$ *fois alors* $f^{(n)}$ *s'annule au moins une fois sur* I*.*
   (f) *Si* f *est de classe* C^2 *sur* I *et si* $f'' \geq 0$ *alors* f *est convexe sur* I*.*
6. *Soit* f *une fonction réelle continue sur* $[0, 1]$ *et de classe* C^1 *sur* $[0, 1[$ *telle que la fonction* f' *admette une limite finie en* 1*. Peut-on affirmer que* f *est de classe* C^1 *sur* $[0, 1]$ *?*

Exercice 4.2 (Calculs de dérivées)**.**
Dans cet exercice, on cherche à calculer les dérivées de fonctions composées.

1. *Soit une fonction* u *définie et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Calculer la dérivée de* $\varphi : x \mapsto e^{(u(x))}$.
2. *Soit une fonction* u *définie et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^\star$*. Calculer la dérivée de* $\varphi : x \mapsto \ln(u(x))$.
3. *Soit une fonction* u *définie et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Calculer la dérivée de* $\varphi : x \mapsto e^{(1+u(x)^2)}$.
4. *Soit une fonction* u *définie et dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^\star$*. Calculer la dérivée de* $\varphi : x \mapsto \sqrt{1 + \dfrac{1}{u(x)^2}}$.

5. *Soit une fonction u définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. Calculer la dérivée de $\varphi : x \mapsto e^{\left(-\frac{1}{1-u(x)^2}\right)}$.*

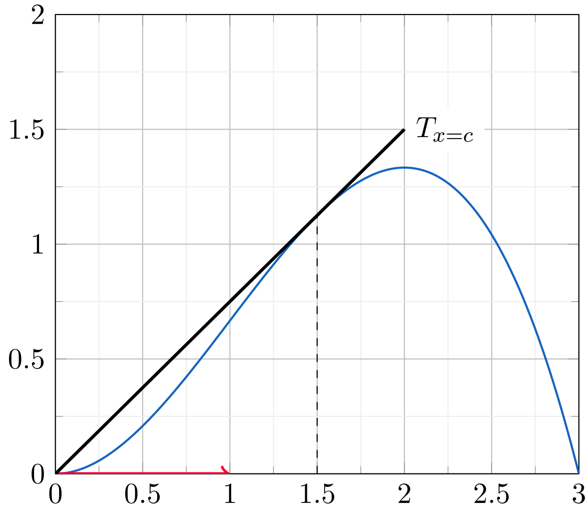
Exercice 4.3 (Etude de la régularité d'une fonction)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

1. *La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*
2. *La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*
3. *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 4.4 (Usage du théorème de Rolle)**.**
Soit a un réel strictement positif, et soit f une fonction définie et dérivable de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$. On note Γ_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère centrée en l'origine O, de coordonnées $(0,0)$. On suppose de plus de que $f(0) = f(a) = 0$ et que $f'(0) = 0$.

1. *Montrer qu'il existe un point M de Γ_f, distinct de O, tel que la tangente à Γ_f en M passe par le point O. On pourra considérer la fonction φ définie sur $]0,a]$ dans $\mathbb{R}$ par la $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.*



2. *Appliquer le résultat précédent à la fonction $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$.*

Exercice 4.5 (Calculs de dérivées)**.**
Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'intervalle de définition, de dérivabilité ainsi que l'expression de la dérivée.

1. *la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.*
2. *la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.*
3. *la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-\cos(x)}$.*
4. *la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.*
5. *la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)}$.*
6. *la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.*

7. *la fonction* $f : x \mapsto e^{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4.6 (Etude de la dérivabilité)**.**
Soit f *la fonction réelle définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} \text{ si } x \geq 1, \\ \dfrac{x^2-1}{x-3} \text{ si } x < 1. \end{cases}$$

La fonction f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *? dérivable sur* $\mathbb{R}$ *? de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 4.7 (Etude de la régularité d'une fonction)**.**
Soit f *une fonction réelle définie et dérivable sur* $[0,1]$ *telle que* $f(0) = f(1)$*. Soit* g *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par :*

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ f(2x-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. *La fonction* g *est-elle continue sur* $[0,1]$ *?*
2. *La fonction* g *est-elle dérivable sur* $[0,1]$ *? Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* f *pour que* g *soit dérivable sur* $[0,1]$.

Exercice 4.8 (Dérivations)**.**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales). On essaiera également, lorsque cela est possible, d'étudier les variations de la fonction.

1. $f : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$.
2. $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$.
4. $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$. *On ne cherchera pas à établir les variations de cette fonction.*

Exercice 4.9 (Une application du théorème de Rolle)**.**
Soient f *et* g *deux fonctions dérivables d'un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $g(a) \neq g(b)$ *et que* g'*, la dérivée de la fonction* g*, ne s'annule pas sur* $]a,b[$*. Montrer qu'il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

On pensera à utiliser le théorème de Rolle et on considérera la fonction $\varphi : [a,b]\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\varphi(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x).$$

5 Développement limité

Exercice 5.1 (Un développement limité de la fonction tangente).
qui L'objectif de cet exercice est de retrouver le développement limité à l'ordre 8 *de la fonction* $x \mapsto \tan(x)$*, au voisinage de* 0*, en se servant uniquement du fait que* $\tan(x) = x + o(x^2)$

1. *Que peut-on dire de la parité de la fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *?*
2. *Déterminer un développement limité de* $1 + \tan^2$.
3. *Rappeler l'expression de la dérivée de* $x \mapsto \tan(x)$ *et en déduire un développement limité à l'ordre* 4 *de cette même fonction.*
4. *Répéter les deux questions précédente jusqu'à l'obtention du résultat souhaité.*

Exercice 5.2 (Développement limité).
On considère la fonction u *définie par*

$$u(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}.$$

1. *Donner l'ensemble de définition de la fonction* u.
2. *Rappeler le développement limité de la fonction* $x \mapsto e^x$ *en* 0*, à l'ordre* 3.
3. *Déterminer un développement limité du dénominateur à l'ordre* 3 *en* 0.
4. *En déduire un développement limité en* 0 *de la fonction* u *à l'ordre* 3.

Exercice 5.3 (Etude d'une fonction avec radicale).
On considère la fonction u *définie par*

$$u(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

1. *Donner l'ensemble de définition de la fonction* u.
2. *Déterminer l'expression de sa dérivée et préciser l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable.*
3. *Déterminer un développement limité de* u*, en* 0*, à l'ordre* 5.

Exercice 5.4 (Etude d'une fonction rationnelle).
On considère la fonction u *définie par*

$$u(x) = \frac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}.$$

1. *Donner l'ensemble de définition de la fonction* u.
2. *Quelle est la limite de la fonction* u *en* -1 *? en* $+\infty$ *?*
3. *Déterminer un développement limité du numérateur à l'ordre* 4 *en* 0.
4. *Déterminer un développement limité du dénominateur à l'ordre* 3 *en* 0.
5. *En déduire un développement limité, en* 0*, de la fonction* u.
6. *En déduire la valeur de la fonction* u *en* 0.

Exercice 5.5 (Développements limités).
Déterminer les développements limités à l'ordre 4*, au voisinage de* 0*, des fonctions suivantes*

1. $u : x \mapsto e^x - \mathrm{ch}(x)$.
2. $u : x \mapsto \sin(3x)$.
3. $u : x \mapsto (1 + 3x^2)^4$.
4. $u : x \mapsto \cos(x) - 1 - x^2/2$.

Exercice 5.6 (Développements limités).
Déterminer les développements limités à l'ordre 4*, au voisinage de* 0*, des fonctions suivantes*

1. $u : x \mapsto \sin(3x) + e^{-x}$.
2. $u : x \mapsto \cos(2x) - \ln(1+x)$.
3. $u : x \mapsto \dfrac{1}{1+2x^2}$.
4. $u : x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$.
5. $u : x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

6 Primitives et Intégrales

Exercice 6.1 (Contrôle des connaissances).

1. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*
   (a) *Toute fonction réelle continue est continue par morceaux.*
   (b) *La fonction f définie par :*
   $$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \tan(x)$$
   est continue par morceaux sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) *La fonction partie entière est continue par morceaux.*
   (d) *Si une fonction réelle f est continue par morceaux et positive sur $[a, b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
   (e) *Si une fonction réelle f est continue par morceaux, positive et non nulle sur $[a, b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.
   (f) *Si une fonction réelle f est continue, positive et non nulle sur $[a, b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.
   (g) *Toute fonction réelle continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.*
2. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Justifier qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ soit égal à la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.*
3. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?*
   (a) $A : f = 0$,
   $B : \displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$.
   (b) $A : f \geq 0$,
   $B : \displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
   (c) $A : f = 0$,
   $B : f \geq 0$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$.
4. *A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 6.2 (Changement de variable).
A l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(t)}{3 + \sin^2(t)} dt.$$

Exercice 6.3 (Changement de variable).
A l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$, déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2(t)} dt.$$

Exercice 6.4 (Intégrale de Wallis).
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$ *et* $K_n = (n+1)I_nI_{n+1}$.

1. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = I_n$.
2. (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   (b) *En déduire des expressions de* I_{2p} *et* I_{2p+1}*, pour tout* $p \in \mathbb{N}$*, à l'aide de factorielles.*
3. (a) *Montrer que* $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.
   (b) *Montrer que la suite* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante.*
   (c) *En déduire que* $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 6.5 (Primitives et Intégrales)**.**

1. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.*
   (a) $f : x \mapsto 5x^3 - 3x^2 + 5$.
   (b) $f : x \mapsto 2\cos(x) - 3\sin(x)$.
   (c) $f : x \mapsto -3e^x + x^2 - 3$.
   (d) $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3x}}$.
   (e) $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 6x^3 - 5x}{x^4}$.
2. *Calculer les intégrales suivantes*
   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$.
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$.
   (c) $\displaystyle\int_e^{e^{e^2}} \frac{1}{t\ln(t^2)} dt$.
   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} dt$.
   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt$*. On utilisera le fait que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$

Exercice 6.6 (Primitives et Intégrales)**.**

1. *Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.*
   (a) $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$.
   (b) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x^2-1)^2}$*, on commencera par montrer que pour tout* $x \neq \{-1, 1\}$*, on a :*
   $$f(x) = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^2}$$
   (c) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 2x + 5}$.
   (d) $f : x \mapsto (x^2+2)e^{4x}$
2. *Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé.*
   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln(t))^3}$ *; en posant* $x = \ln(t)$.
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\arccos(t)} dt$ *; en posant* $x = \arccos(t)$.

Exercice 6.7 (Calculs de Primitives).
Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.

1. $f : x \mapsto \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^8+1}$.
3. $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2+4} - \dfrac{6x}{x^2+4}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x^2}$.

Exercice 6.8 (Intégrations par parties).
Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de validité des calculs.

1. $f : x \mapsto x\sin(2x)$.
2. $f : x \mapsto x^2\ln(x)$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin^2(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}$.

Exercice 6.9 (Changement de variables).
Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx$, *en posant* $x = 1/t$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$, *en posant* $x = -\ln(t)$.
3. $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7dx$, *en posant* $t = 5x^2-3$.
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$, *en posant* $t = \sqrt{x+1}$.

Exercice 6.10 (Suite définie par une intégrale).
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, *on considère l'intégrale* I_n *définie par* $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{1/x}dx$.

1. *Calculer* I_2
2. (a) *Démontrer que pour tout entier* $n \geq 2$, *on a*
$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$
   (b) *En déduire la valeur de* I_3.
3. (a) *Montrer que pour tout* $x \in [1,2]$ *nous avons*
$$0 \leq \frac{1}{x^n}e^{1/x} \leq \frac{e}{x^n}.$$
   (b) *En déduire un encadrement de* I_n *puis étudier la limite de la suite* $(I_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 6.11 (Suite définie par une intégrale).
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $I_0 = \displaystyle\int_1^e xdx$ *et pour tout* $n \geq 1$ *par* $I_n = \displaystyle\int_1^e x\ln(x)^n dx$.

1. *Calculer* I_0.
2. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier* $n \geq 1$: $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

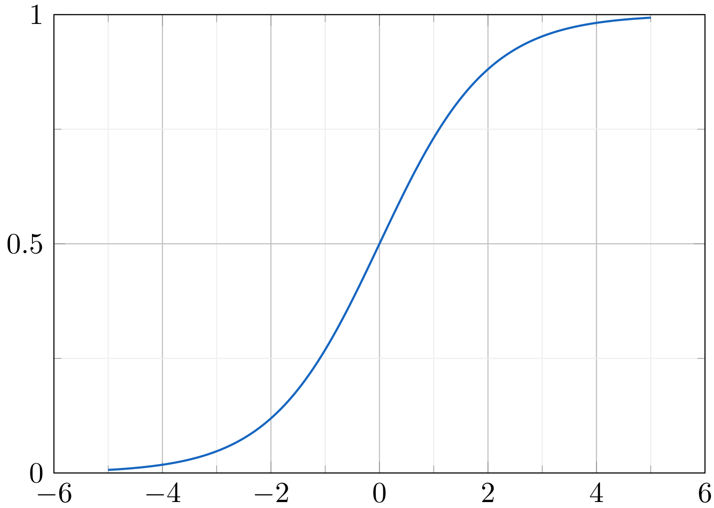
3. *En déduire* I_1.
4. *Démontrer que la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
5. *Montrer que pour tout entier* n, *nous avons*

$$I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

   Pour cela, on commencera par étudier la fonction $x \mapsto \ln(x) - \dfrac{x}{e}$ *sur l'intervalle* $[1, e]$.
6. *En déduire la limite de la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* $n \to +\infty$.

7 Etude de (suites de) fonctions

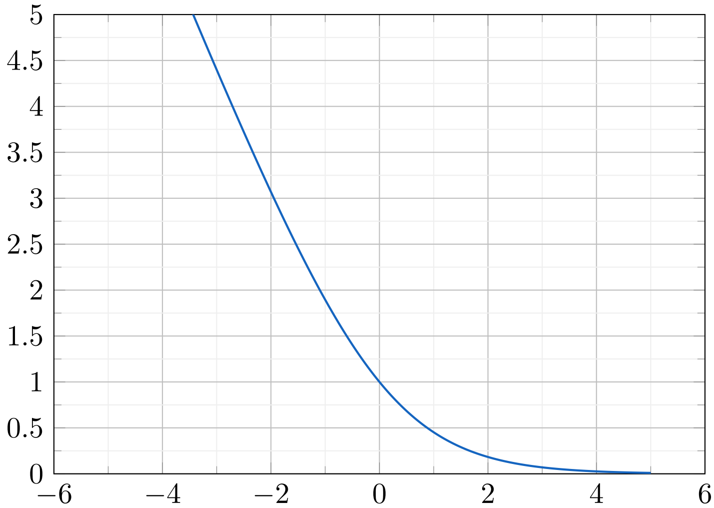
Exercice 7.1 (Etude de la fonction logistique)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ *dont la représentation graphique est donnée ci-dessous*



Cette fonction est appelée fonction logistique[4] *ou encore sigmoïde*

1. *Etudier les variations de cette fonction.*
2. *Etudier sa convexité.*
3. *Montrer qu'au voisinage de* 0*, nous avons* $f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + o(x^2)$.

Exercice 7.2 (Etude de la loss logistique)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1+e^{-x}\right)$ *dont la représentation graphique est donnée ci-dessous*



Cette fonction est appelée fonction de perte logistique

1. *Etudier les variations de cette fonction.*
2. *Déterminer un équivalent de cette fonction en* $-\infty$.

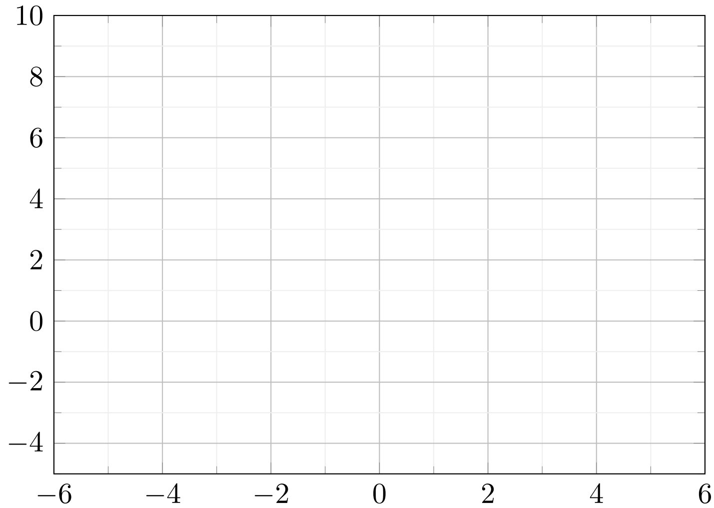
4. Elle intervient naturellement dans des problèmes de régression généralisée et plus particulièrement en apprentissage automatique lorsque l'on cherche à déterminer la probabilité d'appartenance d'un individu à un groupe en fonction de ces caractéristiques. Ces notions, plus complexes, seront abordées en troisième année de Licence sur le plan statistique avant d'avoir une vision plus *Machine Learning* du problème

3. *Déterminer un équivalent de cette fonction au voisinage de* 0.

Exercice 7.3 (Une étude de fonctions)**.**

On considère la fonction f *définie par* $f(x) = e^{\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)} + x$. *Le but de cet exercice est d'étudier cette fonction.*

1. *Donner l'ensemble de définition de cette fonction*
2. *On se place sur l'intervalle* $]-1,+\infty[$
   (a) *Etudier la convexité de la fonction* f
   (b) *En déduire que* f' *ne s'annule qu'une seule fois.*
   (c) *Etudier les limites de* f *en* -1^+ *et en* $+\infty$ *et en déduire les variations de* f.
   (d) *Déterminer l'asymptote oblique à* f *en* $+\infty$.
3. *On se place maintenant sur l'intervalle* $]-\infty,-1[$.
   (a) *Evaluer la dérivée de la fonction* f *en* -2.
   (b) *Etudier la convexité de la fonction* f.
   (c) *Etudier les limites de* f *en* -1^- *et en* $-\infty$
   (d) *En déduire les variations de* f
   (e) *Déterminer l'asymptote oblique à* f *en* $-\infty$.
4. *Tracer l'allure de cette fonction sur le graphe ci-dessous à l'aide des éléments précédents*



Exercice 7.4 (Etude de fonctions)**.**
Etudier chacune des fonctions suivantes : domaine de définition et de dérivabilité, variations et signe de la fonction, ainsi que les éventuelles asymptotes (horizontales, verticales ou obliques)

1. $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$.
2. $f : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ *pour tout* $x \in]-1,1[$ *et qui vaut* 0 *partout ailleurs.*
3. $f : x \mapsto e^{-3x} - 2x + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

Exercice 7.5 (Suite de fonction)**.**

1. *Montrer que l'équation* $\cos(x) = x$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}$
2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = cos(u_n)$. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*

Exercice 7.6 (Suite de fonctions).
On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. *Etudier les variations de f_n.*
2. *Montrer que, $\forall n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.*
3. *Monter que $u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et en déduire que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.*

Exercice 7.7 (Suite de zéros d'une fonction).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. *Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.*
2. *Justifier pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n par la suite.*
3. *Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n - \ln(n)) \leq x_n \leq \ln(n)$.*
5. *En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de $\left(\dfrac{x_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 7.8 (Suite de fonctions).
Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

1. *Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution que l'on notera u_n.*
2. *Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \in]0, 1[$.*
3. *Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa convergence.*
4. *Calculer la limite de cette suite. On pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.*
5. *En posant $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.*

Exercice 7.9 (Une autre suite de fonctions).
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction g_n par $g_n(x) = e^x - \dfrac{1}{nx}$.

1. *Etudier les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et prouver que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution sur cet intervalle, que l'on notera désormais u_n.*
2. *Montrer que $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$, en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *Simplifier l'expression de $g_{n+1}(x) - g_n(x)$, et en déduire le signe de $g_n(u_{n+1})$ puis la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.*