Analyse I

Examen - Session 2
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h30

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de trois exercices qui reprennent le contenu des différentes séances de cours.

Les trois exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{2x}{1-x^2} - \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

où $x \mapsto |x|$ désigne la valeur absolue de x, *i.e.*

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle également que la valeur absolue d'un produit est égal au produit des valeurs absolues.

1. Donner le domaine de définition de la fonction g.

2. Étudier la parité de la fonction g.

3. Montrer que pour tout x où la fonction g est définie, on a

$$g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \ln|1-x| - \ln|1+x|.$$

4. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

5. Étudier les variations de g, et dresser son tableau de variations.

6. En déduire le signe de g.

7. On pose $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. Faire une étude complète de la fonction f et donner son tableau de variation.

8. Donner une représentation approximative de la fonction f.

Exercice 2 : Etude d'une intégrale

L'objectif de cette exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\,dx.$$

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+e^x)$.
   (a) Justifier que la fonction f est bien définie sur le segment $[0,1]$.

   (b) Calculer sa dérivée et étudier ses variations.

2. A l'aide de la question précédente, déterminer la valeur de I_0.

3. Montrer que $I_0 + I_1 = 1$ et en déduire la valeur de I_1.

4. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge.

5. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.