Analyse I

Examen - Session 2
Licence 1 Informatique (2022-2023)

Guillaume Metzler
Institut de Communication (ICOM)
Université de Lyon, Université Lumière Lyon 2
Laboratoire ERIC UR 3083, Lyon, France
guillaume.metzler@univ-lyon2.fr

Durée : 1h30

L'usage des notes de cours, des notes personnelles ou encore de tout matériel électronique est interdit pendant toute la durée de cet examen

Résumé

Cet examen se compose de trois exercices qui reprennent le contenu des différentes séances de cours.

Les trois exercices sont indépendants et valent tout deux le même nombre de points.

La qualité de la rédaction se prise en compte dans la notation. Ainsi, une bonne réponse non justifiée n'apportera pas la totalité des points.

Exercice 1 : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{2x}{1-x^2} - \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

où $x \mapsto |x|$ désigne la valeur absolue de x, *i.e.*

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle également que la valeur absolue d'un produit est égal au produit des valeurs absolues.

1. Donner le domaine de définition de la fonction g.

   La fonction g s'exprime comme la différence de fonction. La première fonction est définie pour tout x tel que $x^2 \neq 1$ soit $x \neq \pm 1$. La deuxième fonction est définie pour tout x tel que $1 - x \neq 0$ et $1 + x \neq 0$ soit $x \pm 1$.

   Ainsi la fonction g est définie pour tout réel x différent de ± 1.

2. Étudier la parité de la fonction g.

   Le terme $2x$ suggère que la fonction étudiée est certainement impaire, ce que l'on va vérifier en montrant que pour tout $x \neq \pm 1$, on a $g(-x) = -g(x)$

$$\begin{aligned}
g(-x) &= \frac{-2x}{1-(-x)^2} - \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|, \tag{1}\\
&\downarrow \text{ propriété du logarithme}\\
&= -\frac{2x}{1-x^2} - \ln|1-x| - \ln|1+x|, \tag{2}\\
&\downarrow \text{ réécriture}\\
&= -\frac{2x}{1-x^2} \ln|1+x| - \ln|1-x|, \tag{3}\\
&\downarrow \text{ propriété du logarithme}\\
&= -\left(\frac{2x}{1-x^2} - (\ln|1+x| - \ln|1-x|)\right), \tag{4}\\
&= -g(x). \tag{5}
\end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout x où la fonction g est définie, on a

$$g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \ln|1-x| - \ln|1+x|.$$

   On va simplement partir de cette expression et montrer que l'on retrouve bien l'expression initiale.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \ln|1+x| + \ln|1-x|,\\
&\downarrow \text{ propriété du logarithme}\\
&\quad\ \text{mise au même dénominateur}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)} + \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$
$$= \frac{2x}{1-x^2} - \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Ce qui est bien l'expression initiale de la fonction g.

4. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

   On va étudier les limites de g en $\pm\infty$ et en ± 1.
   On déterminera simplement les limites en $+\infty$, 1^- et 1^+. on servira du fait que la fonction g est impaire pour conclure en les valeurs négatives de ces bornes.

   - **limite en $+\infty$:** on a clairement, par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1-x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = 1$ donc le logarithme de cette limite tend vers 0. Ainsi
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$
   On en déduit que la limite de fonction g en $-\infty$ est égale à 0 également.

   - **limite en 1^+ :** on remarque que $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2x}{1-x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = +\infty$ donc le logarithme de cette limite tend aussi vers $+\infty$.

     Ainsi la limite de la fonction g en 1^+ est la somme de ces deux limites qui est égale à $-\infty$.

     On en déduit que la limite de la fonction g en -1^- est égale à $+\infty$.

   - **limite en 1^- :** on procède de la même façon que pour la limite précédente et on en déduit que la limite de g en 1^- est égale à $+\infty$ et qu'en -1^+ elle est égale à $-\infty$.

5. Étudier les variations de g, et dresser son tableau de variations.

   On va à nouveau conduire notre étude sur les intervalles $]1, +\infty[$ et $[0, 1[$ et on pourra conclure en utilisant le fait que g est impaire.

   Sur l'intervalle $[0, 1[$, nous avons
   $$g(x) = \frac{2x}{1-x^2} - \ln(1+x) + \ln(1-x),$$
   dont la dérivée est donnée par
   $$g'(x) = \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}.$$
   $$= \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^2},$$
   $$= \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}.$$

   Cette dérivée est positive sur $[0, 1[$ donc la fonction g est croissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la dérivée est exactement la même. La fonction est donc également croissante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction g est croissante sur son intervalle de définition. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	
g	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

6. En déduire le signe de g.

La question précédente montre directement que la fonction g est positive sur $]-\infty, -1[\cup[0, 1[$ et négative sur $]-1, 0]\cup]1, +\infty[$.

7. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. Faire une étude complète de la fonction f et donner son tableau de variation.

La fonction f est définie et dérivable sur le même intervalle que la fonction g précédemment définie. En outre, on remarque que la fonction f est le produit de deux fonctions impaires (produit de la fonction inverse et on a vu que le deuxième terme de la fonction g était aussi une fonction impaire). La fonction f est donc paire et on peut se contenter de l'étudier pour les valeurs positives de x différentes de 0 et de 1.

Il nous faut maintenant étudier les cas en fonction de la valeur absolue :

- sur l'intervalle $]0, 1[$: nous avons $\ln \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Ainsi, la dérivée de la fonction f est donnée par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{x}\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x^2}g(x).$$

- sur l'intervalle $]1, +\infty[$: on peut procéder de la même façon et obtenir le même résultat que précédemment.

Ainsi, pour tout réel $x \neq \{-1, 0, 1\}$, nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}g(x).$$

Cela nous permet d'exploiter l'étude de la fonction g pour dresser notre tableau de variations.

Il nous reste simplement à étudier les limites en $0, 1$ et $+\infty$ (on en déduit celles en -1 et $-\infty$ par symétrie).

Pour cela, posons $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \ln(1-x)$. Alors

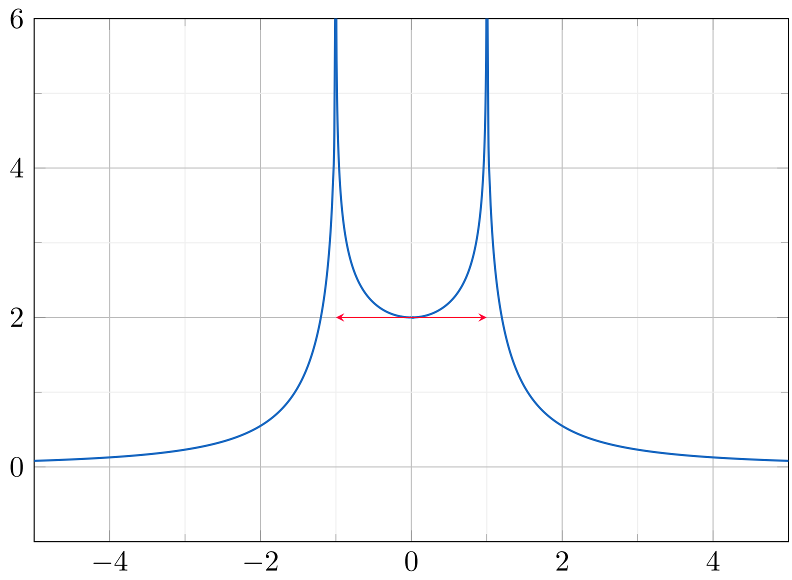
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) = \ & \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}, \\
& = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} - \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) - \ln(1-0)}{x-0}, \\
& = u'(0) - v'(0), \\
& = \frac{1}{1+0} + \frac{1}{1-0}, \\
& = 2.
\end{aligned}$$

Pour les autres limites, on peut directement exploiter celles de la fonction g et on obtient ainsi le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

8. Donner une représentation approximative de la fonction f.

On donne ci-dessous le graphe de la fonction f.



Exercice 2 : Etude d'une intégrale

L'objectif de cette exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\, dx.$$

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+e^x)$.

   (a) Justifier que la fonction f est bien définie sur le segment $[0,1]$.

   La fonction $x \mapsto 1+e^x$ est à valeurs strictement positives sur $[0,1]$ donc la fonction f est bien définie.

   (b) Calculer sa dérivée et étudier ses variations.

   La fonction f est aussi dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et pour tout x dans cet intervalle on a

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

   La dérivée est donc strictement positive et la fonction f est donc croissante. Ce qui permet de dresser le tableau de variation suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{e}{1+e}$

2. A l'aide de la question précédente, déterminer la valeur de I_0.

   Par définition, on a $I_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}$. Or nous avons précédemment vu que $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ donc une primitive est donnée par $f(x)$.
   D'où

$$I_0 = [\ln(1+e^x)]_{x=0}^{x=1} = \ln(1+e) - \ln(1) = \ln(1+e).$$

3. Montrer que $I_0 + I_1 = 1$ et en déduire la valeur de I_1.

   On emploie simplement la définition de I_n, ce qui donne

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x}\, dx = 1.$$

4. Pour tout entier n, en utilisant la linéarité de l'intégrale, déterminer la valeur de $I_n + I_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{e^{(1-n-1)x}}{1+e^x}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\,dx,\\
&= \int_0^1 \frac{e^{(1-n-1)x}(1+e^x)}{1+e^x}\,dx,\\
&= \int_0^1 e^{(-n)x}\,dx,\\
&= \left[\frac{-1}{n}e^{-nx}\right]_{x=0}^{x=1},\\
&= \frac{1-e^{-n}}{n}.
\end{aligned}$$

5. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge.

   On va procéder classiquement en déterminant le signe de la différence $I_{n+1} - I_n$

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{e^{(1-n-1)x}}{1+e^x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\,dx,\\
&= \int_0^1 \frac{e^{(1-n-1)x}(1-e^x)}{1+e^x}\,dx.
\end{aligned}$$

   Or pour tout $x \in [0,1]$, $e^{(1-n-1)x}$ et $1+e^x$ sont positifs alors que $1-e^x < 0$. La différence est donc négative.

6. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   La suite étant décroissante et positive, nous avons

$$0 \leq I_n \leq I_{n-1}.$$

   En ajoutant I_n aux différents membres de l'inégalité et en utilisant le fait que $I_n + I_{n-1}$, nous avons :

$$0 \leq 2I_n \leq I_n + I_{n-1} = \frac{1-e^{-n+1}}{n-1}.$$

   Et le théorème des gendarmes nous permet de conclure que la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 0.