

Cours de Complexité

Fiche de TD n°1

Le crêpier psycho-rigide

Un cuisinier a préparé des crêpes de tailles différentes, qui sont disposées en désordre sur une pile. Il souhaite les empiler par taille décroissante, en laissant apparaître vers le haut la face colorée. La seule opération à laquelle il a droit est de glisser sa spatule dans la pile, et de retourner d'un seul coup les crêpes de la partie supérieure (situées au-dessus de la spatule), pour les placer à l'envers sur crêpes de la partie inférieure (situées en dessous de la spatule).

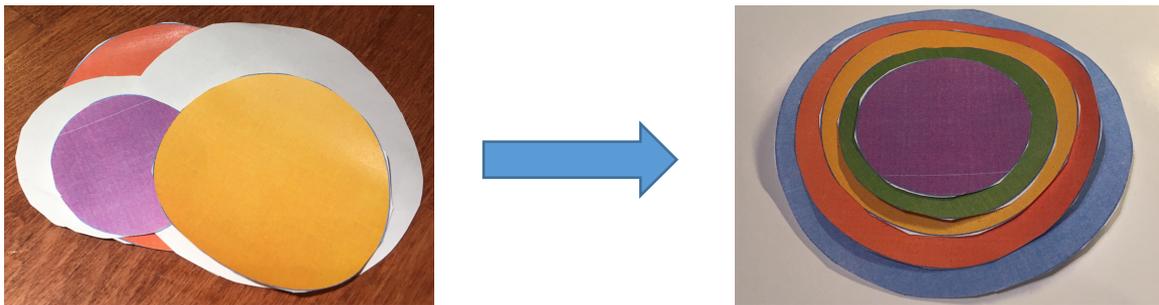


Figure 1 : rangement de la pile de crêpes

1. Proposez un premier algorithme qui permette de ranger toutes les crêpes, par taille décroissante, sans respecter les contraintes sur les couleurs. Combien d'opération fait cet algorithme dans le pire des cas ?
2. Proposez un deuxième algorithme qui s'assure de plus que les faces colorées sont bien tournées vers le haut. Combien d'opération fait cet algorithme dans le pire des cas ?
3. On souhaite maintenant proposer une implémentation informatique de cet algorithme, en utilisant un tableau d'entiers pour mémoriser la pile de crêpes. Ecrivez l'algorithme permettant de modéliser les opérations élémentaires du problème (recherche de la plus grande crêpe, retournement de la partie supérieure de la pile). Quelle est la complexité de ces opérations élémentaires ? en déduire la complexité de l'algorithme de la question 2.

Les tours de Hanoï

Trois cases sont placées côte à côte, et 5 palets sont rangés par taille décroissante dans la case de gauche. L'objectif est de déplacer cette pile dans la case du milieu, en ne déplaçant qu'un seul palet à la fois, et en ne posant un palet que sur l'une des cases vides, ou sur un palet plus grand que lui.

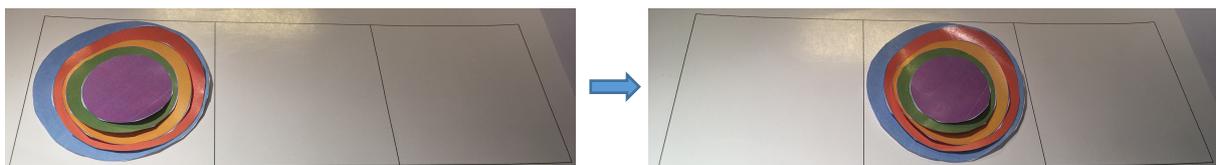


Figure 2 : les tours de Hanoï. Position initiale (à gauche). Position finale (à droite)

1. Commencer par étudier les cas simples : pile de hauteur 1, de hauteur 2, de hauteur 3.
2. Quel est le premier mouvement à faire pour déplacer une pile de hauteur impaire ? de hauteur paire ?
3. Proposer une version récursive de cet algorithme. Etudier sa complexité.

Le drapeau bleu-blanc-rouge

On considère un tableau de n éléments, chaque élément étant colorié avec l'une des 3 couleurs bleu, blanc ou rouge. Le but du problème est de réorganiser le tableau en ne procédant qu'à des échanges de deux éléments, de manière à ce que les éléments bleus soient en début de tableau, les éléments blancs au centre et les rouges en fin de tableau.

1. Pouvez-vous utiliser des algorithmes déjà étudiés en cours pour résoudre ce problème ? quelle est la complexité d'un algorithme basé sur cette solution ? On va rechercher par la suite un algorithme qui résolve le même problème en temps linéaire, et n'utilisant qu'une quantité constante de mémoire supplémentaire.
2. Etudier le cas de drapeau bicolore (bleu-rouge) présenté en figure 3.

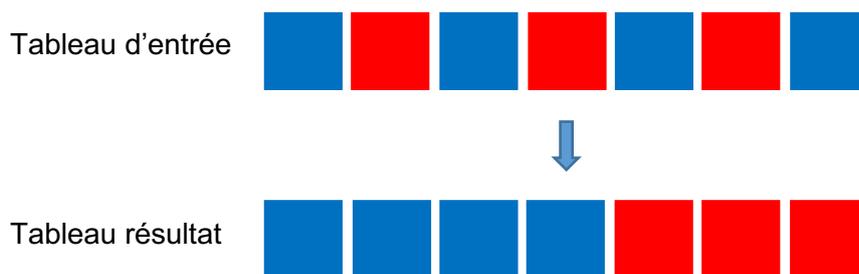


Figure 3 : Drapeau bicolore

3. Modifier votre algorithme pour traiter le cas du drapeau tricolore (bleu-blanc-rouge) présenté en figure 4.

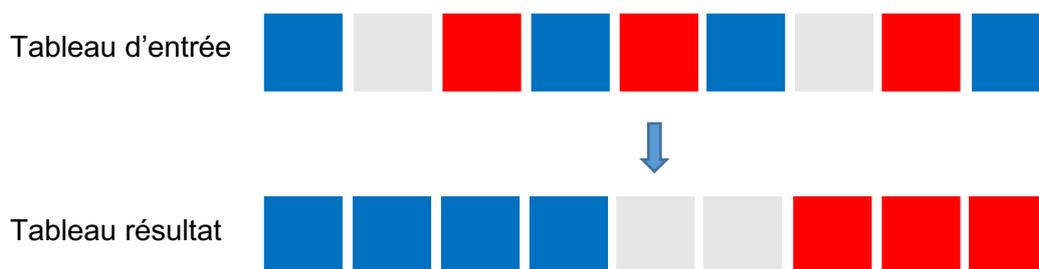


Figure 4 : Drapeau tricolore