Séries chronologiques saisonnières et prévision

L1 IDEA

Julien Ah-Pine (julien.ah-pine@eric.univ-lyon2.fr)

Université Lyon 2 - FSEG

L1 IDEA 2011-2012

Plan du cours

Sources principales

- J.H. Chauchat, Méthodes de prévision à court terme, Notes de cours
- Ch. Gourieroux, A. Monfort, Séries temporelles et modèles dynamiques 2nd édition, Economica, 1996

Motivations

Pourquoi un cours de prévisions de séries chronologiques et saisonnières ?

- Tout le monde a besoin de prévoir l'avenir pour s'organiser
- Pur chacun d'entre nous :
  - Comment s'habiller en fonction du temps de la journée qui vient ?
  - Combien de pain acheter en fonction de la consommation probable de la famille ?
- Pour une entreprise
  - Combien recruter de salariés pour satisfaire les commandes dans les prochains mois ?
  - Quelle quantité de matière première acheter, en fonction des ventes à venir ?
- Certaines prévisions sont qualitatives : il va faire froid ; les ventes vont augmenter . . .
- D'autres sont numériques : il va faire 29°C, on a besoin d'un kilo de pain, les ventes vont augmenter de 10%, ou de 100.000 Euros . . .

Motivations (suite)

- Certaines prévisions sont à court terme : la température de demain, les ventes du mois prochain...
- D'autres sont à long terme : quelle sera la demande dans 5 ans (pour décider d'un investissement) ? Quel sera le montant de ma pension de retraite dans 10 ans, ou dans 40 ans ?...

⇒ Dans ce cours nous apprenons des **modèles simples de prévision numérique à court terme pour des phénomènes saisonniers ou non**

⇒ Nous mettons en oeuvre ces méthodes à l'aide d'un **tableur** (MS Excel)

Approche pragmatique poursuivie par ce cours

- Dans la vie économique, on ne réalise pas en général une prévision isolée : on met en place un système de prévision qui intègre régulièrement toutes les informations nouvelles, y compris les erreurs récentes
- Celui qui est chargé de la prévision met constamment à jour la base de données ; il observe les écarts entre les prévisions et la réalité pour, éventuellement, ajuster les paramètres du modèle, ou même changer de modèle

- Par opposition, certains logiciels de prévision sont "automatiques", on ne sait pas bien quelles méthodes sont utilisées, ni quelles sont les règles de choix des paramètres ; ceci est dangereux car le logiciel est "aveugle", tandis que la personne chargée des prévisions dans l'entreprise connaît la qualité des informations, la particularité de tel mois, le caractère accidentel ou non de telle variation...

Approche pragmatique poursuivie par ce cours (suite)

- Le prévisionniste doit connaître les propriétés mathématiques des modèles et les applications informatiques utilisées, mais il doit connaître aussi les particularités et l'histoire du phénomène qu'il est chargé de prévoir, ainsi que les éléments conjoncturels de son entreprise et de l'économie en général
- En d'autres termes, le prévisionniste est un économiste-statisticien qui possède "le sens des données" : il n'est pas un simple mathématicien, ni un simple informaticien (votre licence IDEA est une bonne préparation multidisciplinaire pour cela...)

⇒ Pour vous rendre compte de ces différents aspects, vous aurez à produire un rapport concernant l'étude et la prévision à court terme de séries temporelles. Vous travaillerez en binôme et vous aurez à trouver vous-mêmes ces données (plus d'information ultérieurement)

Rappel du Sommaire

Notations

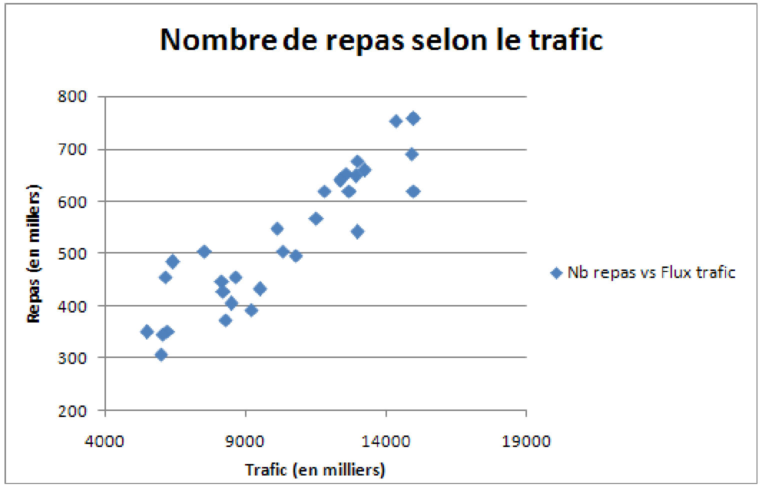
- On cherche à prévoir une variable $\mathbf{y}$ à partir des éléments observés $(y_t, t \in \mathbb{T})$ avec $|\mathbb{T}| = T$ le nombre d'éléments dans $\mathbb{T}$
- Si t représente le temps on parle de séries chronologiques ou temporelles ("time series")
- Si $\mathbf{y}$ est un "stock", $t \in \mathbb{T}$ correspond à une date. Exemples :
  - le nombre d'objets en stock au 31 mars
  - le capital d'une entreprise au 1er janvier
  - son nombre de salariés au 30 octobre. . .
- Si $\mathbf{y}$ est un flux", $t \in \mathbb{T}$ correspond à une période, un intervalle de temps. Exemples :
  - le nombre de vente durant le mois de février
  - le nombre de nouveaux salariés embauchés cette année
  - le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2010. . .
- On supposera que $t = 1, \dots, T$

Différents types de méthodes de prévisions

Il y a deux grands types de méthodes de prévision :

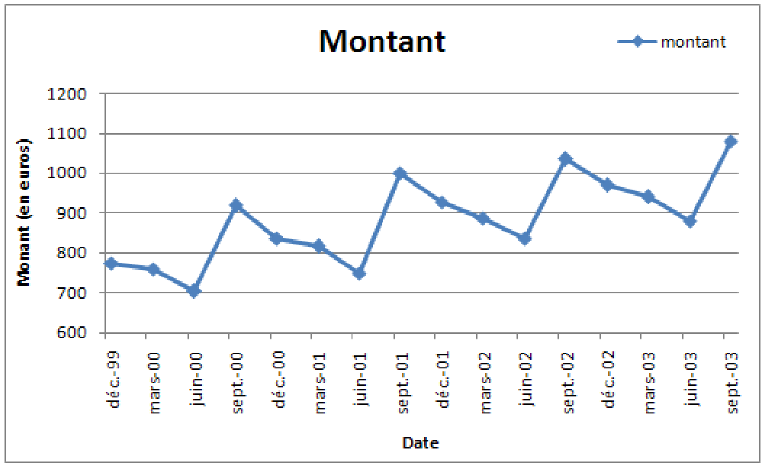
- Méthodes **exogènes** (générées par l'extérieur "exo")
  - On utilise une (ou plusieurs) variable $\mathbf{x}$, autre que $\mathbf{y}$ pour faire les prévisions
  - Exemple : le nombre de parapluies vendus $\mathbf{y}$ est liées au prix de vente $\mathbf{x_1}$ et à la pluie $\mathbf{x_2}$
- Méthodes **endogènes** (générées par l'intérieur "endo")
  - On utilise uniquement les observations de $\mathbf{y}$ dans le temps pour faire des prévisions. On observe des comportements qui peuvent être de plusieurs types. Par exemple :
    - ★ la croissance de $\mathbf{y}$ peut être régulière dans le temps
    - ★ il y a des saisons dans l'année, des jours dans la semaine, des heures dans la journée qui conduisent à des comportements typiques de $\mathbf{y}$ selon ces saisons . . .
  - Exemples :
    - ★ la consommation d'électricité augmente régulièrement (avec l'équipement des ménages)
    - ★ on consomme plus d'électricité à 7 heures du soir qu'à 4 heures du matin, en décembre qu'en juin
    - ★ on vend plus de boissons fraîches en été qu'en hiver

Exemple : cas pour une modélisation de type exogène



Dans ce cas, les observations ne sont pas ordonnées, on prévoit $\mathbf{y}$ en fonction de $\mathbf{x}$

Exemple : cas pour une modélisation de type endogène



Dans ce cas, les observations sont ordonnées dans le temps (ici il s'agit de trimestres). On prévoit $\mathbf{y}$ en fonction des observations du passé

Exemple : Trafic SNCF de 1963 à 1969

Prenons plus particulièrement le cas d'une série chronologique (exemple tiré de Ch. Gourierou et A. Monfort).

Trafic SNCF

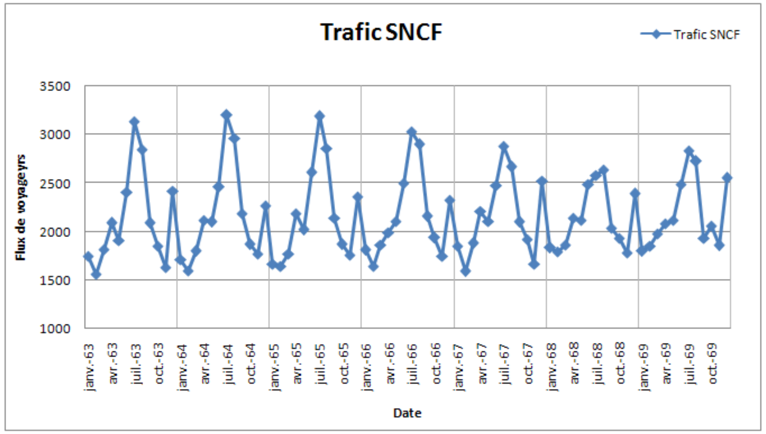
Trafic voyageur SNCF en 2de classe de 1963 à 1980, en millions de voyageurs kilomètres ;
extrait de GOURIEROUX et MONFORT.

	Jan.	Fev.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Aout	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1963	1750	1560	1820	2090	1910	2410	3140	2850	2090	1850	1630	2420
1964	1710	1600	1800	2120	2100	2460	3200	2960	2190	1870	1770	2270
1965	1670	1640	1770	2190	2020	2610	3190	2860	2140	1870	1760	2360
1966	1810	1640	1860	1990	2110	2500	3030	2900	2160	1940	1750	2330
1967	1850	1590	1880	2210	2110	2480	2880	2670	2100	1920	1670	2520
1968	1834	1792	1860	2138	2115	2485	2581	2639	2038	1936	1784	2391
1969	1798	1850	1981	2085	2120	2491	2834	2725	1932	2058	1856	2553

La première chose à faire est de visualiser les données selon deux types de graphiques

Graphique de la série avec $t \in \mathbb{T}$ en abscisse

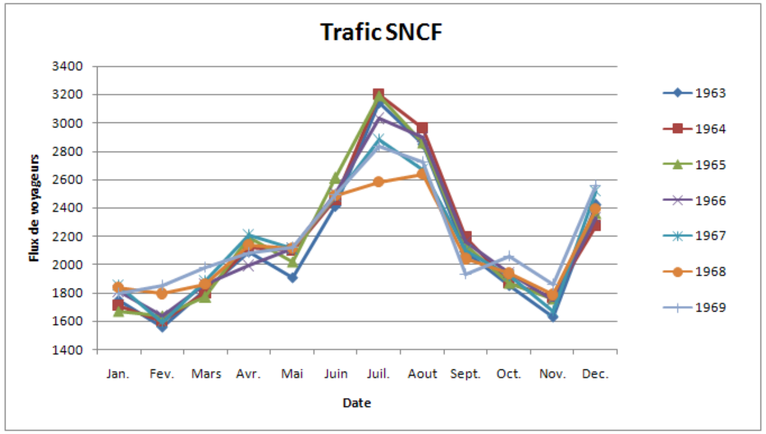
Le premier graphique représente la série $(y_t, t \in \mathbb{T})$ en ordonnée contre l'ensemble des dates $t \in \mathbb{T}$ (ou $t = 1, \ldots, T$) en abscisse



Permet d'avoir une vue d'ensemble de la tendance longue, et de la saisonnalité

Graphique des séries superposées selon chaque période

Le deuxième graphique représente plusieurs sous-séries en ordonnée. Chaque sous-série représente la série tronquée sur une période (année-mois, semaines-jours, journées-heures, . . .)



Permet de visualiser la saisonnalité éventuelle et ses exceptions

Graphiques des séries superposées selon chaque période (suite)

Remarques après visualisation du deuxième graphique :

- En juin 1968, le trafic voyageur a été plus faible que d'habitude ; ceci est lié aux mouvements sociaux de mai-juin 1968
- La saisonnalité du trafic se réduit à partir de 1967 car les français prennent l'habitude de fractionner leurs congés : plus de vacances en février et moins l'été. La 4ème semaine de congés payés, déjà accordée dans quelques entreprises, a été généralisée en France le 16 mai 1969

Rappel du Sommaire

Introduction aux méthodes exogènes

- Une hypothèse de causalité doit exister a priori entre **y** et les variables exogènes
- "A priori" signifie que la causalité vient d'un raisonnement posé avant d'avoir vu les données numériques. "A priori" signifie donc que la causalité n'est pas déduite des corrélations qu'on peut observer dans les données
- Exemples d'hypothèses a priori : la pluie cause l'achat de parapluies ; la consommation de gaz augmente quand la température diminue
- La causalité doit être directe : **x** varie $\Rightarrow$ **y** varie
- Quelquefois il y a des causalités indirectes qui génèrent des corrélations, mais pas des causes directes : (**z** varie $\Rightarrow$ **y** varie et **z** varie $\Rightarrow$ **x** varie) n'implique pas (**x** varie $\Rightarrow$ **y** varie)

Régression linéaire

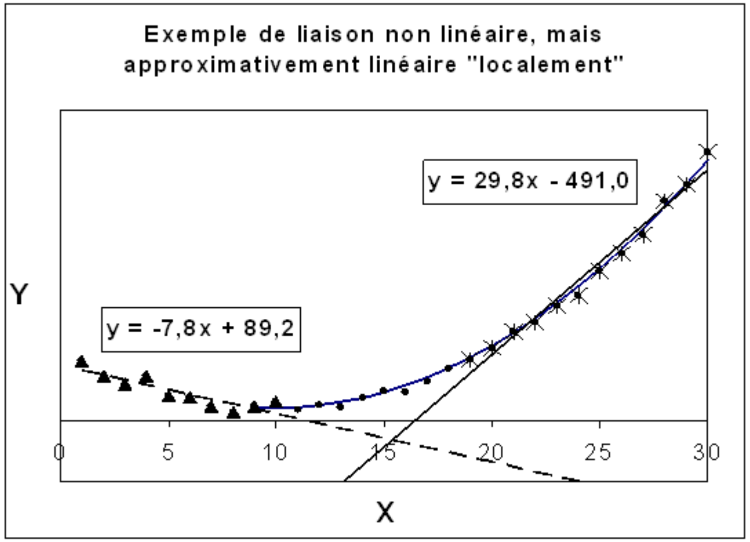
- Dans ce cours, on utilisera la régression linéaire, avec un modèle du type :

$$y_t = a + bx_t + r_t$$

  où a et b sont des nombres qu'il faut estimer et r_t est le résidu (l'erreur)

- Pourquoi le modèle linéaire ?
  - Parce qu'il est plus stable : il y a seulement deux paramètres à estimer a et b ; le modèle est donc moins sensible aux fluctuations d'échantillonnage (càd aux variations aléatoires d'un échantillon à l'autre)
  - Parce que la majorité des phénomènes réels sont linéaires localement (càd dans un certain intervalle de variation de **x**)

Régression linéaire (suite)



Régression linéaire (suite)

- Dans ce cours, on apprend les méthodes simples mais efficaces de prévision à **court terme**
- Ces méthodes ne doivent pas être utilisées quand on sort beaucoup de l'intervalle des $\mathbf{x}$ sur lequel on a estimé les paramètres du modèle
- On peut par exemple prévoir les ventes d'un magasin dans 6 mois mais pas dans 20 ans !

La droite des moindres carrés (“least square”)

⇒ Problème : déterminer les paramètrs a et b du modèle

⇒ Solution : On cherche a et b qui minimisent la somme des carrés des écarts :

$$\min_{a,b} f(a,b) = \sum_{t=1}^{T} \left((a + bx_t) - y_t\right)^2$$

où $a + bx_t$ est la modélisation linéaire de la série $\mathbf{y}$

- Développons la fonction à minimiser :

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \sum(a^2 + b^2x_t^2 + y_t^2 + 2abx_t - 2ay_t - 2bx_ty_t) \\ &= Ta^2 + b^2\sum x_t^2 + \sum y_t^2 + 2ab\sum x_t - 2a\sum y_t - 2b\sum x_ty_t \end{aligned}$$

- Comme $f(a,b)$ est une fonction continue en ses arguments on trouve le minimum de $f(a,b)$ en annulant les dérivées partielles :
  - Pour a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2Ta + 2b\sum x_t - 2\sum y_t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{\sum y_t - b\sum x_t}{T} \\ &\Leftrightarrow \quad a = \bar{\mathbf{y}} - b\bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

en posant $\bar{\mathbf{y}} = \frac{\sum y_t}{T}$ la moyenne de la série $\mathbf{y}$

La droite des moindres carrés (“least square”) (suite)

- Pour b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2b\sum x_t^2 + 2a\sum x_t - 2\sum x_ty_t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad b\frac{\sum x_t^2}{T} + a\frac{\sum x_t}{T} - \frac{\sum x_ty_t}{T} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad b\frac{\sum x_t^2}{T} + (\bar{\mathbf{y}} - b\bar{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{x}} - \frac{\sum x_ty_t}{T} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad b\left(\frac{\sum x_t^2}{T} - \bar{\mathbf{x}}^2\right) + \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{x}} - \frac{\sum x_ty_t}{T} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad b = \frac{\frac{\sum x_ty_t}{T} - \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{x}}}{\frac{\sum x_t^2}{T} - \bar{\mathbf{x}}^2} \\ &\Leftrightarrow \quad b = \frac{cov(\mathbf{x},\mathbf{y})}{var(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

en posant $cov(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{T}\sum(x_t - \bar{\mathbf{x}})(y_t - \bar{\mathbf{y}}) = \frac{1}{T}\sum x_ty_t - \frac{1}{T^2}\sum x_t \sum y_t$
et $var(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\sum(x_t - \bar{\mathbf{x}})^2 = \frac{1}{T}\sum x_t^2 - \frac{1}{T^2}(\sum x_t)^2$

- Les **solutions** du problème de minimisation sont donc :

$$\hat{b} = \frac{cov(\mathbf{x},\mathbf{y})}{var(\mathbf{x})} \text{ et } \hat{a} = \bar{\mathbf{y}} - \hat{b}\bar{\mathbf{x}}$$

Prédictions, erreurs et intervalles de confiance

- Avec les estimations $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de a et b on calcule les valeurs $\hat{y}_t$ prédites par le modèle linéaire pour chaque x_t :

$$\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b}x_t$$

- On peut également calculés les erreurs (ou écarts ou résidus) :

$$\hat{r}_t = \hat{y}_t - y_t$$

- Si les erreurs sont :
  - indépendantes en probabilité
  - de moyenne nulle
  - d'écart-type constant σ

  alors on montre qu'on peut estimer l'**erreur-type** σ par :

$$s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(\hat{y}_t - y_t)^2}$$

- $s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}}$ est l'écart-type de l'erreur $\mathbf{r}$ pour la prédiction de “$\mathbf{y}$ sachant $\mathbf{x}$”
- Si en plus des hypothèses précédentes, les erreurs suivent une loi normale et si T le nombre d'observations est assez grand alors $\mathbf{r}$ suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type σ estimé par $s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}}$

Prédictions, erreurs et intervalles de confiance (suite)

- Sous les hypothèse précédentes cela signifie que :
  - il y a environ 68% de chance que y_t soit dans l'intervalle $[\hat{y}_t - s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}}, \hat{y}_t + s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}}]$
  - il y a environ 95% de chance que y_t soit dans l'intervalle $[\hat{y}_t - 2s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}}, \hat{y}_t + 2s_{\mathbf{y}/\mathbf{x}}]$

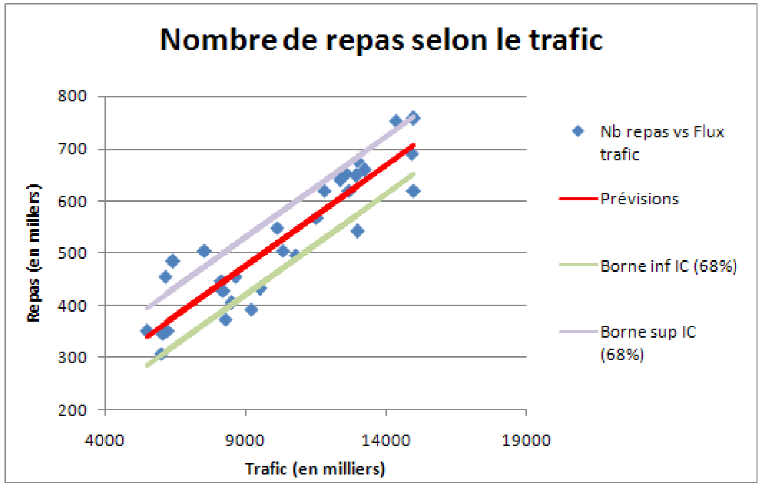
Mise en pratique

Exemple du modèle exogène précédent : $\mathbf{y}$ = Nombre de repas et $\mathbf{x}$ = Trafic (flux de voiture). Extrait de la table obtenue après calculs :

		a=	129,91	b=	0,04	sy/x=	55,05
X	Y	Prévisions	Erreurs	Erreurs carrés	Borne inf IC (68%)	Borne sup IC (68%)	
8646,00	456,00	461,87	5,87	34,43	406,82	516,92	
13001,00	541,00	629,08	88,08	7757,38	574,03	684,13	
8162,00	447,00	443,28	−3,72	13,80	388,23	498,34	
6225,00	351,00	368,91	17,91	320,94	313,86	423,97	
8296,00	373,00	448,43	75,43	5689,66	393,38	503,48	
12595,00	653,00	613,49	−39,51	1561,21	558,44	668,54	
8213,00	428,00	445,24	17,24	297,33	390,19	500,29	
11534,00	567,00	572,75	5,75	33,08	517,70	627,80	
8502,00	405,00	456,34	51,34	2635,71	401,29	511,39	
7556,00	505,00	420,02	−84,98	7221,95	364,97	475,07	
13245,00	659,00	638,44	−20,56	422,54	583,39	693,49	
9216,00	393,00	483,75	90,75	8236,07	428,70	538,80	
12920,00	648,00	625,97	−22,03	485,50	570,92	681,02	

Mise en pratique (suite)

Graphiques obtenus :



Rappel du Sommaire

Rappel du Sommaire

Principe des méthodes endogènes

On décompose la série en composantes simples :
- on estime séparément les caractéristiques de chaque élément
- on prévoit séparément chaque élément
- on recompose finalement tous ces éléments pour les prévisions finales

$\Rightarrow$ Avec cette méthode, on obtient en plus de la prévision, une analyse fine du passé

Modélisation de la série temporelle

La série $\mathbf{y}$ est décomposée en **4 éléments** :
1. Mouvement **conjoncturel c** régulier à court terme
2. Mouvement **saisonnier s** qui se répète régulièrement dans le temps (hiver, printemps,...), ou (lundi, mardi,...), ou (0h, 1h, ..., 24h, ...)
3. Mouvement **exceptionnel e** causé par des événements irréguliers (météo, politique, nouvelle loi, pannes, maladie, grève, événement marketing, ...)
4. Mouvement **résiduel r** d'amplitude relativement faible, de moyenne nulle. On peut le modéliser par une suite de variables aléatoires qu'on supposera ici indépendantes (par exemple, il n'y a pas de tendance au rattrapage de $t-1$ à t) et de moyennes nulles

Modélisation de la série temporelle (suite)

De manière générale, nous supposons donc que nous avons :

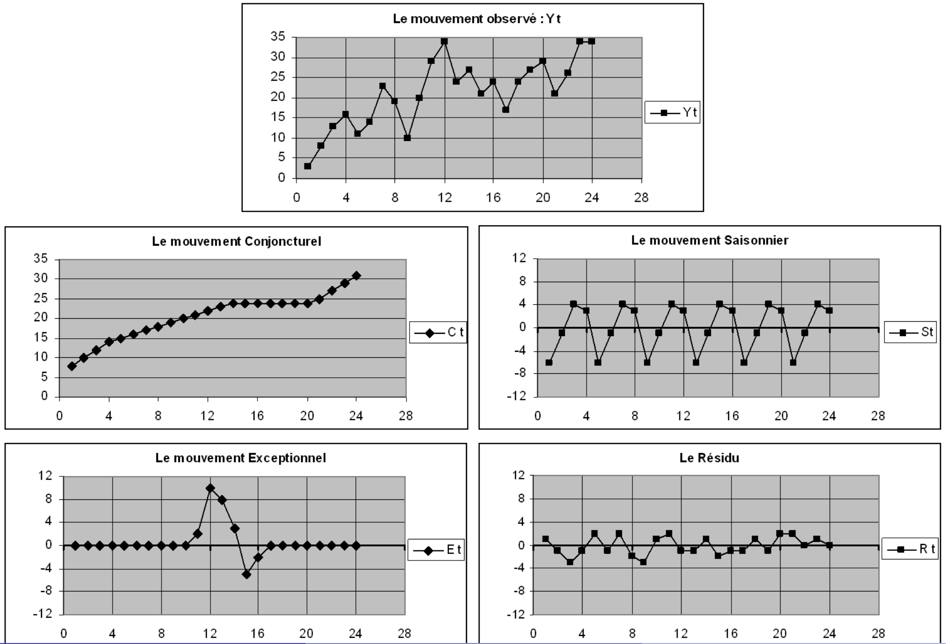
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{c}, \mathbf{s}, \mathbf{e}, \mathbf{r})$$

Il y a deux grandes façons de modéliser la fonction f :
- Composition **additive** :
$$\forall t = 1, \dots, T : y_t = c_t + s_t + e_t + r_t$$
- Composition **multiplicative** :
$$\forall t = 1, \dots, T : y_t = c_t s_t e_t r_t$$

Remarque : on peut revenir du modèle multiplicatif au modèle additif en passant par les logarithmes

$$\forall t = 1, \dots, T : \log(y_t) = \log(c_t) + \log(s_t) + \log(e_t) + \log(r_t)$$

Exemple de composition additive :



Modélisation et prévision à court terme

- Les prévisions obtenues à partir d'un modèle estimé sont dénotées par $\hat{y}_t(p)$ avec $t = 1, \dots, T$ et $p = 1, 2, \dots$. $\hat{y}_t(p)$ signifie : "prévision faite en date t à l'horizon p" (càd je suis en date t et je calcule la prédiction du modèle estimé pour la date $t + p$)
- On distingue deux périodes :
  - La partie "modélisation" avec $t = 1, \dots, T - 1$. Dans ce cas, on fait comme si on parcourait le temps de $t = 1$ à $T - 1$. On se positionne en chaque date t et on estime le modèle à partir des données du "passé" (càd $\{y_{t'} : t' < t\}$). On peut ensuite comparer la valeur prédite par le modèle $\hat{y}_t(1)$ et la valeur observée y_{t+1} pour le calcul de l'erreur par exemple
  - La partie "prévision" avec $t = T$. Dans ce cas, on fait réellement de la prévision puisqu'on ne dispose pas des données du futur (càd pour $t > T$). $\hat{y}_T(p)$ est alors la prévision du modèle estimé en T pour la date "future" $T + p$
- Remarque : même si un modèle permet de calculer la prévision dans un futur relativement lointain (càd p grand), on se gardera de le faire et on prendra en général $p = 1$ voire 2 (**prévision à court terme**)

Rappel du Sommaire

Cas où il n'y a pas de tendance ni de saisonnalité

Méthode endogène où il n'y a pas de tendance et pas saisonnalité :

- Le modèle le plus simple, rarement applicable, mais qui prépare à la compréhension de la suite
- Hypothèses : un niveau moyen stable a, et pas de tendance (càd à la hausse ou à la baisse), ni de saisonnalité
- Formellement :

$$\forall t : y_t = a_t + r_t$$

où $\mathbf{r}$ est une erreur de moyenne nulle et de dispersion (variance) constante ; les erreurs sont indépendantes en probabilité

⇒ Problème : il s'agit ici d'estimer le niveau moyen a_t

⇒ Solution : a est estimé par la moyenne (ou la médiane, moins sensible aux valeurs atypiques) des observations passées des y_t ; dans les moyennes, les observations passées sont pondérées différemment selon les méthodes

Méthode “Moyenne sur tout le passé”

- a_t est estimé par la moyenne de toutes les observations disponibles depuis $t = 1$
- Cette estimation sert de prévision pour tout le futur
- Toutes les observations passées ont le même poids $1/t$

$\Rightarrow$ On a donc la solution suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t} y_{t'} = \hat{a}_t$$

Mise en pratique

y_t $\hat{y}_t(p)$

Année	Mois	t	Ventes	Prévisions
2004	août-04	1	293	
2004	sept-04	2	209	293
2004	oct-04	3	205	251
2004	nov-04	4	273	236
2004	déc-04	5	220	245
2005	janv-05	6	290	240
2005	févr-05	7	243	248
2005	mars-05	8	203	248
2005	avr-05	9	390	242
2005	mai-05	10	360	258
2005	juin-05	11	353	269
2005	juil-05	12	343	276
2005	août-05	13	364	282
2005	sept-05	14	330	288
2005	oct-05	15	377	291
2005	nov-05	16	332	297
2005	déc-05	17		299
2006	janv-06	18		299
2006	févr-06	19		299

$\hat{y}_1(1)$

$\hat{y}_2(1)$

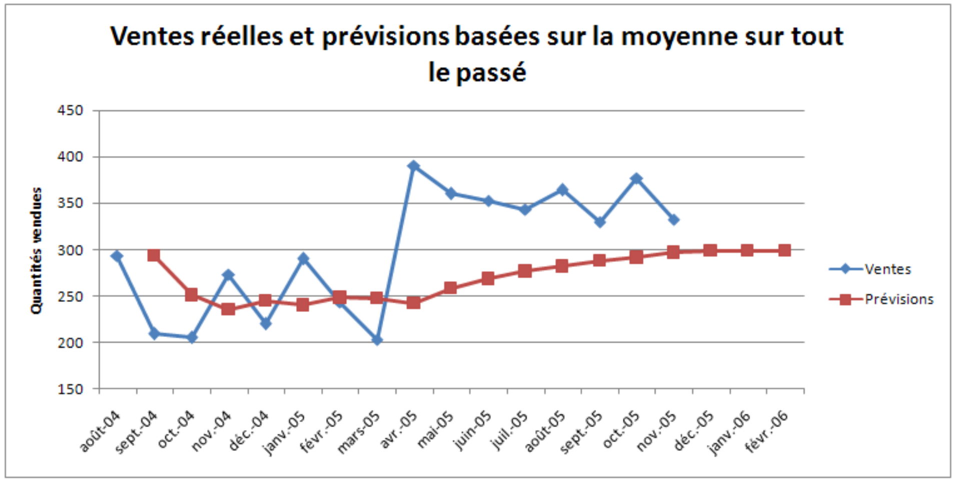
$\hat{y}_8(1) = \frac{1}{8}\sum_{t'=1}^{8} y_{t'}$

$\hat{y}_{16}(1) = \frac{1}{16}\sum_{t'=1}^{16} y_{t'}$

$\hat{y}_{16}(2) = \frac{1}{16}\sum_{t'=1}^{16} y_{t'}$

$\hat{y}_{16}(3) = \frac{1}{16}\sum_{t'=1}^{16} y_{t'}$

Mise en pratique (suite)



Mise en pratique (suite)

Remarques :

- Il y a une rupture du niveau moyen en avril 2005, et le nouveau niveau moyen n'est pas retrouvé correctement
- La prévision dépend trop des valeurs anciennes
- Cette méthode est trop conservatrice

Méthode "Moyenne sur les d dernières observations du passé"

- a_t est estimé par la moyenne des d dernières observations disponibles
- Les observations plus anciennes ont un poids nul et les d plus récentes ont un poids de $\frac{1}{d}$

$\Rightarrow$ On a donc la solution suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \frac{1}{d}\sum_{t'=t-d+1}^{t} y_{t'} = \hat{a}_t$$

Mise en pratique

y_t $\hat{y}_t(p)$

Année	Mois	t	Ventes	Prévisions
2004	août-04	1	293	
2004	sept-04	2	209	
2004	oct-04	3	205	
2004	nov-04	4	273	
2004	déc-04	5	220	
2005	janv-05	6	290	240
2005	févr-05	7	243	239
2005	mars-05	8	203	246
2005	avr-05	9	390	246
2005	mai-05	10	360	269
2005	juin-05	11	353	297
2005	juil-05	12	343	310
2005	août-05	13	364	330
2005	sept-05	14	330	362
2005	oct-05	15	377	350
2005	nov-05	16	332	353
2005	déc-05	17		349
2006	janv-06	18		349
2006	févr-06	19		349

Pas assez de recul

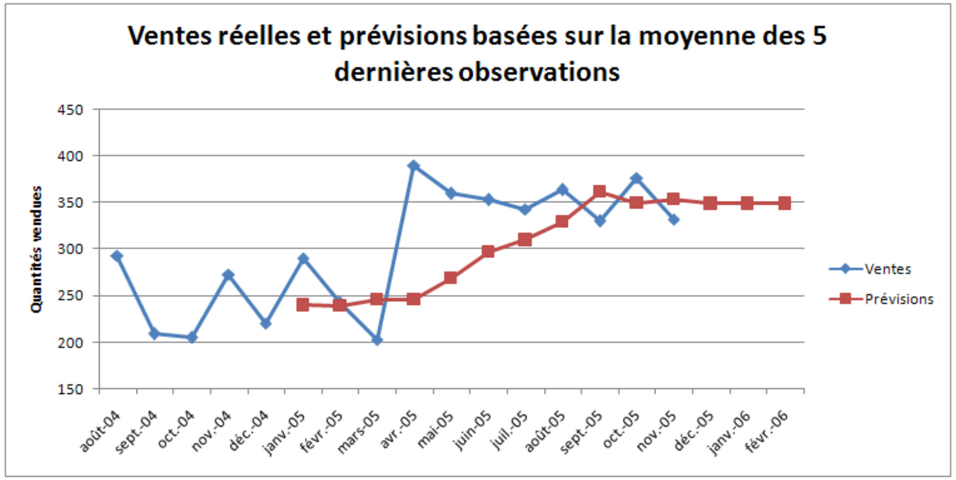
$\hat{y}_8(1) = \frac{1}{5}\sum_{t'=4}^{8} y_{t'}$

$\hat{y}_{16}(1) = \frac{1}{5}\sum_{t'=12}^{16} y_{t'}$

$\hat{y}_{16}(2) = \frac{1}{5}\sum_{t'=12}^{16} y_{t'}$

$\hat{y}_{16}(3) = \frac{1}{5}\sum_{t'=12}^{16} y_{t'}$

Mise en pratique (suite)



Mise en pratique (suite)

Remarques :

- Il y a une rupture du niveau moyen en avril 2005
- Le nouveau niveau moyen est correctement estimé 5 mois après (Sept 2005) car on calcule la moyenne mobile des 5 derniers mois
- Peut-on faire plus "instantané" ?

Méthode "Lissage exponentiel simple"

- a_t est estimé par le lissage exponentiel de toutes les valeurs observées
- L'idée est d'utiliser toutes les observations passées mais en leur donnant un poids décroissant avec leur ancienneté
- On choisit un paramètre $\alpha \in [0, 1]$. La valeur observée la plus récente y_t a un poids de α, la valeur observée y_{t-1} un poids de $\alpha(1-\alpha)$, la valeur observée y_{t-2} un poids de $\alpha(1-\alpha)^2$ et ainsi de suite

⇒ On a donc la solution suivante :

$$\begin{aligned} \forall p : \quad \hat{y}_t(p) &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \ldots \\ &= \sum_{t'=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{t'} y_{t-t'} \end{aligned}$$

On suppose que pour $t' \geq t, y_{t-t'} = 0$

Méthode "Lissage exponentiel simple" (suite)

- Exemple pour $\alpha = 0,4$. On a les poids suivants :

Valeur observée	Poids associé
y_t	$0,4(0,6)^0 = 0,4$
y_{t-1}	$0,4(0,6)^1 = 0,24$
y_{t-2}	$0,4(0,6)^2 = 0,144$
y_{t-3}	$0,4(0,6)^3 = 0,0864$
y_{t-4}	$0,4(0,6)^4 \simeq 0,0519$
y_{t-5}	$0,4(0,6)^5 \simeq 0,0311$
$\vdots$	$\vdots$
y_{t-10}	$0,4(0,6)^{10} \simeq 0,0024$

Méthode "Lissage exponentiel simple" (suite)

- Dans le lissage exponentiel simple, on vérfie que la somme des poids vaut bien 1
- On a le résultat suivant sur les séries, si $0 < x < 1$:
$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$
- En posant $x = 1 - \alpha$ on a bien $0 < x < 1$ et donc :
$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-\alpha)^i = \frac{1}{\alpha}$$
- On en déduit le résultat suivant :
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (1-\alpha)^i = 1$$

Formule de récurrence du lissage exponentiel simple

- Rappelons que :
$\forall p : \hat{y}_t(p) = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \ldots$
- Appliquons la formule pour $\hat{y}_{t-1}(p')$, il vient :
$\forall p' : \hat{y}_{t-1}(p') = \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \ldots$
- En combinant les deux équations précédentes on déduit :
$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(p')$$
avec p' quelconque puisque $\hat{y}_{t-1}(p')$ est une constante quelque soit p'

⇒ En pratique pour la prévision à horizon p on utilise la formule de récurrence suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \hat{y}_t(1) = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1)$$

En t, la prévision pour $t + p$ est une combinaison convexe de l'observation en t et la prévision en t

Paramètres du lissage exponentiel simple

- Comme pour toute formule de récurrence il faut **initialiser la suite**. Il faut donc déterminer $\hat{y}_0(1)$. Il existe plusieurs approches. Ici, on pourra prendre la moyenne des 2 ou 3 premières observations y_1, y_2, y_3
- Choix du paramètre α :
  - Si α est choisi **grand, la prévision est instable** car elle est sensible aux fluctuations des données observées. Par contre, les prévisions reconnaissent plus vite un changement de niveau. A la limite, si $\alpha = 1$, on prend comme prévision la dernière observation : "demain sera comme aujourd'hui"
  - Si α est choisi **petit, la prévision est conservatrice**, elle est peu sensible aux fluctuations aléatoires des données observées. Par contre, les prévisions mettent plus de temps à reconnaître un changement de niveau. A la limite, si $\alpha = 0$, la prévision ne change jamais ; c'est toujours la valeur initialisée : "demain sera comme autrefois"

Mise en pratique

$\hat{y}_t(p)$

			y_t	alpha	alpha
				0,2	0,5
Année	Mois	t	Ventes	Prévisions	Prévisions
2004	août-04	1	293	236	236
2004	sept-04	2	209	247	264
2004	oct-04	3	205	240	237
2004	nov-04	4	273	233	221
2004	déc-04	5	220	241	247
2005	janv-05	6	290	237	233
2005	févr-05	7	243	247	262
2005	mars-05	8	203	246	252
2005	avr-05	9	390	238	228
2005	mai-05	10	360	268	309
2005	juin-05	11	353	287	334
2005	juil-05	12	343	300	344
2005	août-05	13	364	308	343
2005	sept-05	14	330	320	354
2005	oct-05	15	377	322	342
2005	nov-05	16	332	333	359
2005	déc-05	17		333	346
2006	janv-06	18		333	346
2006	févr-06	19		333	346

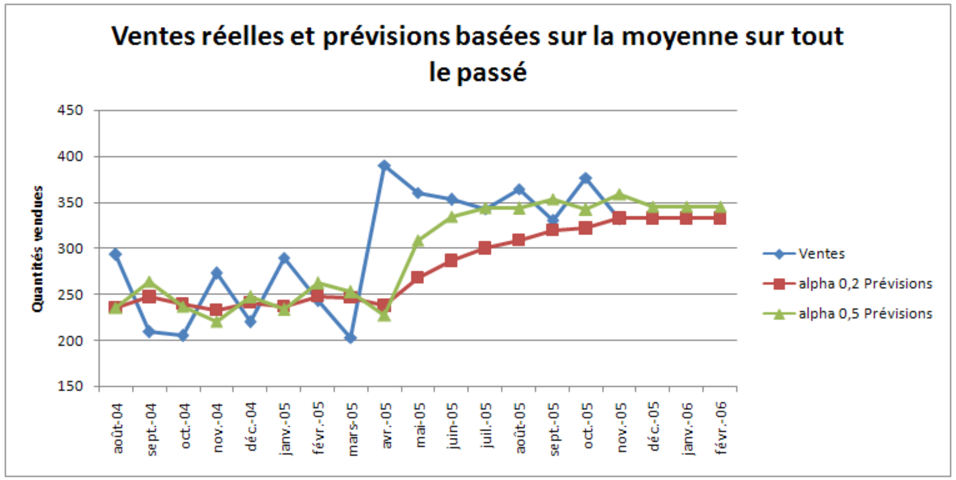
$\hat{y}_0(1) = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

$\hat{y}_8(1) = 0,5y_8 + (1-0,5)\hat{y}_7(1)$

$\hat{y}_{16}(1) = 0,5y_{16} + (1-0,5)\hat{y}_{15}(1)$

$\hat{y}_{16}(2) = 0,5y_{16} + (1-0,5)\hat{y}_{15}(1)$

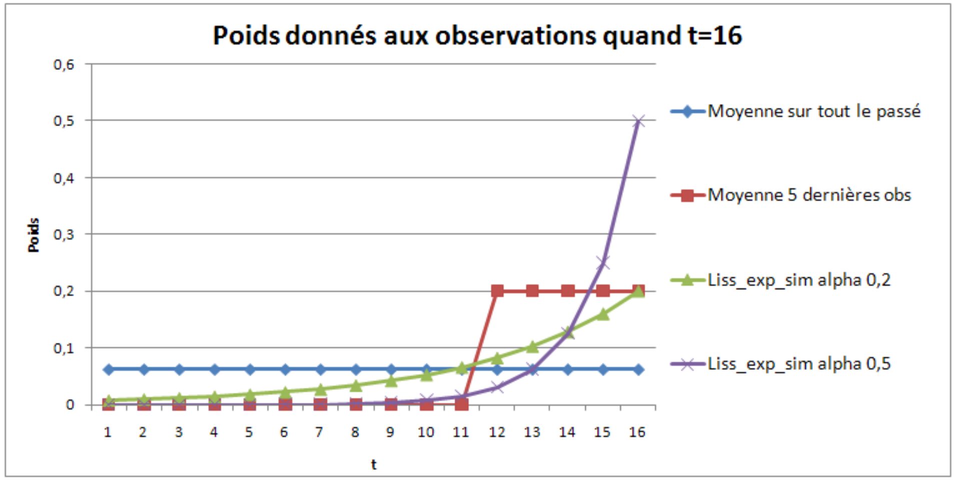
Mise en pratique (suite)



Comparaison des poids attribués aux observations

				Moyenne sur tout le passé	Moyenne 5 dernières obs	Liss_exp_sim alpha 0,2	Liss_exp_sim alpha 0,5
Année	Mois	t	Ventes	Poids	Poids	Poids	Poids
2004	août-04	1	293	0,0625	0	0,01	0,00
2004	sept-04	2	209	0,0625	0	0,01	0,00
2004	oct-04	3	205	0,0625	0	0,01	0,00
2004	nov-04	4	273	0,0625	0	0,01	0,00
2004	déc-04	5	220	0,0625	0	0,02	0,00
2005	janv-05	6	290	0,0625	0	0,02	0,00
2005	févr-05	7	243	0,0625	0	0,03	0,00
2005	mars-05	8	203	0,0625	0	0,03	0,00
2005	avr-05	9	390	0,0625	0	0,04	0,00
2005	mai-05	10	360	0,0625	0	0,05	0,01
2005	juin-05	11	353	0,0625	0	0,07	0,02
2005	juil-05	12	343	0,0625	0,2	0,08	0,03
2005	août-05	13	364	0,0625	0,2	0,10	0,06
2005	sept-05	14	330	0,0625	0,2	0,13	0,13
2005	oct-05	15	377	0,0625	0,2	0,16	0,25
2005	nov-05	16	332	0,0625	0,2	0,20	0,50

Comparaison des poids attribués aux observations (suite)



Rappel du Sommaire

Cas où il y a une pente mais pas de saisonnalité

Méthode endogène où il y a une tendance mais pas de saisonnalité :

- Hypothèses : une pente constante (càd tendance à la hausse ou à la baisse) au moins localement mais pas de saisonnalité
- Formellement :

$$\forall t : y_t = a_t + b_t t + r_t$$

où **r** est une erreur de moyenne nulle et de dispersion (variance) constante ; les erreurs sont indépendantes en probabilité

⇒ Problème : il s'agit ici d'estimer les paramètres de la droite d'ajustement a_t (ordonnée à l'origine) et b_t (la pente)

⇒ Solutions : a_t et b_t peuvent être estimés par des méthodes différentes. Nous étudions l'extension des méthodes vues précédemment dans le contexte où il y a une pente.

Méthode "Moindres carrés sur tout le passé"

- a_t et b_t sont estimés par la méthode des moindres carrés en utilisant toutes les observations disponibles depuis $t = 1$

⇒ Ces estimations servent pour la prévision pour tout le futur selon la formule suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \hat{a}_t + \hat{b}_t(t + p)$$

où $\hat{a}_t$ et $\hat{b}_t$ sont les valeurs qui minimisent la somme des carrés des écarts r_t :

$$\min_{a_t, b_t} \sum_{t'=1}^{t} (y_{t'} - (a_t + b_t t'))^2$$

⇒ Nous savons que la solution des moindres carrés est donnée par :

$$\hat{b}_t = \frac{cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{t})}{var(\mathbf{t})} \text{ et } \hat{a}_t = \bar{\mathbf{y}}_t - \hat{b}_t \bar{\mathbf{t}}$$

où $\mathbf{y}_t = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$ et $\mathbf{t} = (1, 2, \ldots, t)$

Remarque vis à vis de la variable temps

- Comme la variable $\mathbf{t} = (1, 2, \ldots, t)$, nous avons les résultats suivants :
  - $\bar{\mathbf{t}} = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t} t' = \frac{t+1}{2}$
  - $var(\mathbf{t}) = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t}(t' - \frac{t+1}{2})^2 = \frac{t^2-1}{12}$
  - $cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{t}) = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t}(y_{t'} - \bar{\mathbf{y}}_t)(t' - \frac{t+1}{2})$
- Exemple si $\mathbf{t} = (1, 2, 3, 4, 5)$:
  - $\bar{\mathbf{t}} = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{5+1}{2} = 3$
  - $var(\mathbf{t}) = \frac{1}{5}\left[(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\right] = \frac{5^2-1}{12} = 2$

Mise en pratique

$\hat{y}_t(p), p > 0$

Année	Mois	t	Ventes	ât	^bt	Modélisation du passé en t=16	Prévisions en t=16
2004	août-04	1	293			225	
2004	sept-04	2	209			235	
2004	oct-04	3	205			245	
2004	nov-04	4	273			255	
2004	déc-04	5	220			265	
2005	janv-05	6	290			275	
2005	févr-05	7	243			284	
2005	mars-05	8	203			294	
2005	avr-05	9	390			304	
2005	mai-05	10	360			314	
2005	juin-05	11	353			324	
2005	juil-05	12	343			333	
2005	août-05	13	364			343	
2005	sept-05	14	330			353	
2005	oct-05	15	377			363	
2005	**nov-05**	**16**	**332**	**215,60**	**9,82**	373	
2005	déc-05	17					383
2006	janv-06	18					392
2006	févr-06	19					402

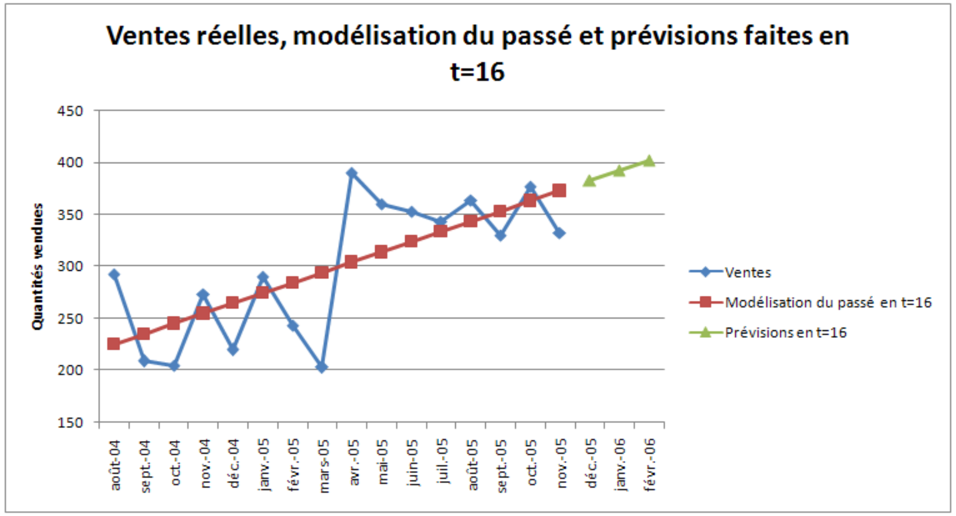
$\hat{y}_{16}(-8) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}8$

$\hat{y}_{16}(1) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}17$

$\hat{y}_{16}(2) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}18$

$\hat{y}_{16}(3) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}19$

Mise en pratique (suite)



Mise en pratique (suite)

Remarques (similaires à la méthode "moyenne sur tout le passé") :

- Il y a une rupture du niveau moyen en avril 2005, et le nouveau niveau moyen n'est pas retrouvé correctement
- La prévision dépend trop des valeurs anciennes
- Cette méthode est trop conservatrice

Méthode "Moindres carrés sur les d dernières observations du passé"

- a_t et b_t sont estimés par la méthode des moindres carrés en utilisant uniquement les d dernières observations. Les observations plus anciennes ont un poids nul et les d plus récentes ont un poids uniforme

⇒ Ces estimations servent pour la prévision pour tout le futur selon la formule suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \hat{a}_t + \hat{b}_t(t+p)$$

où $\hat{a}_t$ et $\hat{b}_t$ sont les valeurs qui minimisent la somme des carrés des écarts r_t mais uniquement sur les d dernières observations :

$$\min_{a_t, b_t} \sum_{t'=t-d+1}^{t} (y_{t'} - (a_t + b_t t'))^2$$

⇒ Dans ce cas la solution des moindres carrés est donnée par :

$$\hat{b}_t = \frac{cov(\mathbf{y}_{t-d+1,t}, \mathbf{t}_{t-d+1,t})}{var(\mathbf{t}_{t-d+1,t})} \text{ et } \hat{a}_t = \bar{\mathbf{y}}_{t-d+1,t} - \hat{b}_t \bar{\mathbf{t}}_{t-d+1,t}$$

où $\mathbf{y}_{t-d+1,t} = (y_{t-d+1}, y_{t-d+2}, \ldots, y_t)$ et
$\mathbf{t} = (t-d+1, t-d+2, \ldots, t)$

Mise en pratique

$\hat{y}_t(1)$ $\qquad$ $\hat{y}_t(p), p > 0$

Année	Mois	t	Ventes	ât	^bt	Prévisions à horizon p=1	Modélisation du passé en t=16	Prévisions en t=16
2004	août-04	1	293					
2004	sept-04	2	209					
2004	oct-04	3	205					
2004	nov-04	4	273					
2004	déc-04	5	220	264,60	-8,20			
2005	janv-05	6	290	168,60	17,70	215		
2005	févr-05	7	243	199,70	9,30	293		
2005	mars-05	8	203	316,00	-11,70	274		
2005	avr-05	9	390	92,10	25,30	211		
2005	mai-05	10	360	67,60	28,70	345		
2005	juin-05	11	353	-29,50	37,70	383		
2005	juil-05	12	343	86,80	24,30	423	351	
2005	août-05	13	364	437,90	-6,90	403	350	
2005	sept-05	14	330	408,80	-4,90	341	349	
2005	oct-05	15	377	307,90	3,50	335	348	
2005	**nov-05**	**16**	**332**	361,80	-0,90	364	347	
2005	déc-05	17				347		347
2006	janv-06	18						346
2006	févr-06	19						345

$\hat{y}_7(1) = \hat{a}_7 + \hat{b}_7 8$

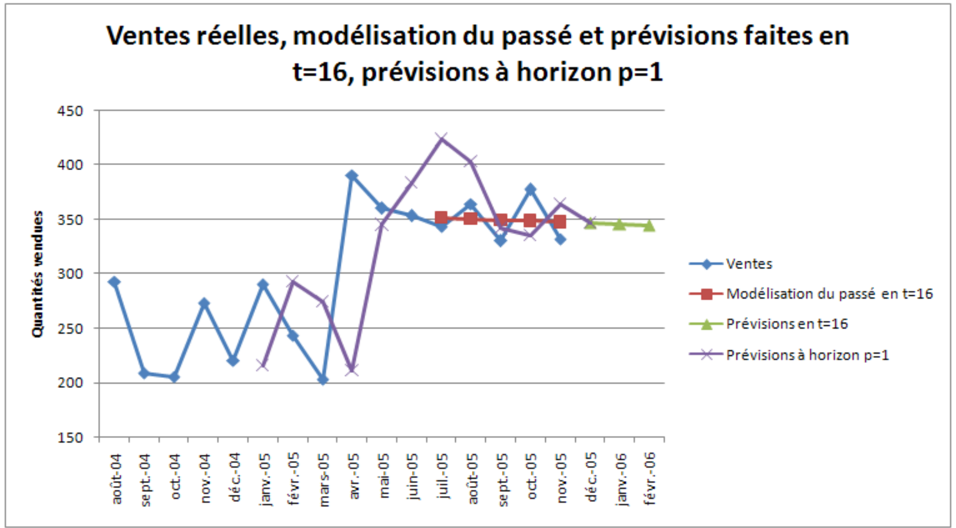
$\hat{y}_{16}(-4) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16} 4$

$\hat{y}_{16}(1) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16} 17$

$\hat{y}_{16}(2) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16} 18$

$\hat{y}_{16}(3) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16} 19$

Mise en pratique (suite)



Méthode "Lissage exponentiel double" (de Holt-Winter)

- Les prévisions sont estimées par lissage exponentiel de toutes les valeurs observées
- L'idée comme précédemment est d'utiliser toutes les observations passées mais en leur donnant un poids décroissant avec leur ancienneté. Toutefois le modèle est différent et nous avons deux paramètres à estimer : a_t (le niveau ou l'ordonnée à l'origine) et b_t (la pente ou la tendance).

⇒ On choisit deux paramètres $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$ et on utilise des formules de récurrences pour leurs mises à jour :

$$\hat{a}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1)$$
$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}$$

- Interprétations :
  - $\hat{a}_t$ est une combinaison convexe de l'observation en t (y_t) et de la prévision faite en $t-1$ pour t ($\hat{y}_{t-1}(1)$)
  - $\hat{b}_t$ est une combinaison convexe de l'écart entre les niveaux estimés en t et $t-1$ ($\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}$) et de la pente estimée en $t-1$ ($\hat{b}_{t-1}$)

Méthode “Lissage exponentiel double” (de Holt-Winter) (suite)

⇒ Une fois estimés $\hat{a}_t$ et $\hat{b}_t$, on peut effectuer la prévision à horizon p en appliquant le modèle estimé dont l'équation est alors la suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \hat{a}_t + \hat{b}_t p$$

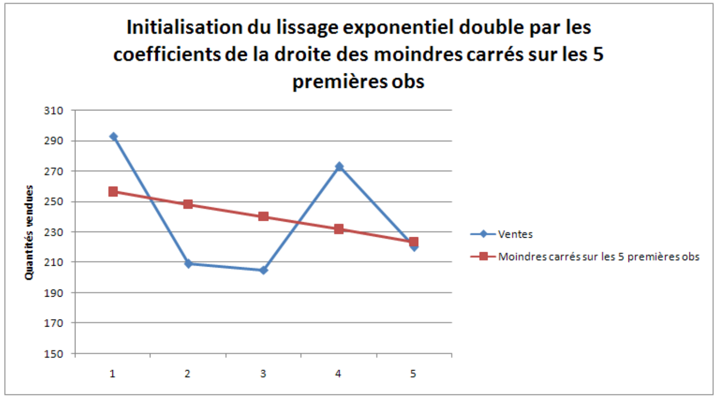
- Attention ! : ici le calcul de la prévision est différent des modèles précédents. Par exemple, à horizon $p = 1$ on a :

$$\hat{y}_t(1) = \hat{a}_t + \hat{b}_t$$

- Remarque : il existe une autre méthode de lissage exponentiel double ne comportant qu'un seul paramètre α. La méthode que nous étudions dans ce cours est celle de Holt-Winter

Paramètres du lissage exponentiel double

- Comme pour le lissage simple il faut **initialiser les suites**. Il faut donc déterminer $\hat{a}_0$ et $\hat{b}_0$. Il existe plusieurs approches. Ici, on pourra prendre les coefficients de la droite des moindres carrés estimés sur les d premières observations (les plus anciennes)
- Illustration : sur l'exemple traité on trouve $\hat{a}_0 = 264.6$ et $\hat{b}_0 = -8.2$



Paramètres du lissage exponentiel double (suite)

- Choix des paramètres α et β :
  - On choisit α et β petits, si la tendance est globalement stable et si les écarts (les erreurs r_t) sont grands ; on dit que le rapport “signal / bruit” est faible. Ainsi on lisse les irrégularités et on retrouve bien la tendance
  - On choisit α et β grands, si la tendance est changeante dans le temps et si les écarts (les erreurs r_t) sont petits ; on dit que le rapport “signal / bruit” est fort. Ainsi on lisse moins les irrégularités mais on s'adapte plus vite aux changements de tendance

Mise en pratique

$\hat{y}_t(1)$ $\quad \hat{y}_t(p), p > 0$

				alpha	0,3		
				beta	0,3		
Année	Mois	t	Ventes	ât	^bt	Prévisions à horizon p=1	Prévisions en t=16
		0		264,6	-8,2		
2004	août-04	1	293	267,4	-4,9	256,4	
2004	sept-04	2	209	246,4	-9,7	262,5	
2004	oct-04	3	205	227,2	-12,6	236,7	
2004	nov-04	4	273	232,1	-7,3	214,6	
2004	déc-04	5	220	223,4	-7,8	224,8	
2005	janv-05	6	290	237,9	-1,1	215,6	
2005	févr-05	7	243	238,7	-0,5	236,9	
2005	mars-05	8	203	227,6	-3,7	238,2	
2005	avr-05	9	390	273,8	11,3	224,0	
2005	mai-05	10	360	307,5	18,0	285,0	
2005	juin-05	11	353	333,8	20,5	325,5	
2005	juil-05	12	343	350,9	19,5	354,3	
2005	août-05	13	364	368,4	18,9	370,4	
2005	sept-05	14	330	370,1	13,7	387,3	
2005	oct-05	15	377	381,8	13,1	383,9	
2005	nov-05	16	332	376,1	7,5	394,9	
2005	déc-05	17				383,5	383,5
2006	janv-06	18					391,0
2006	févr-06	19					398,4

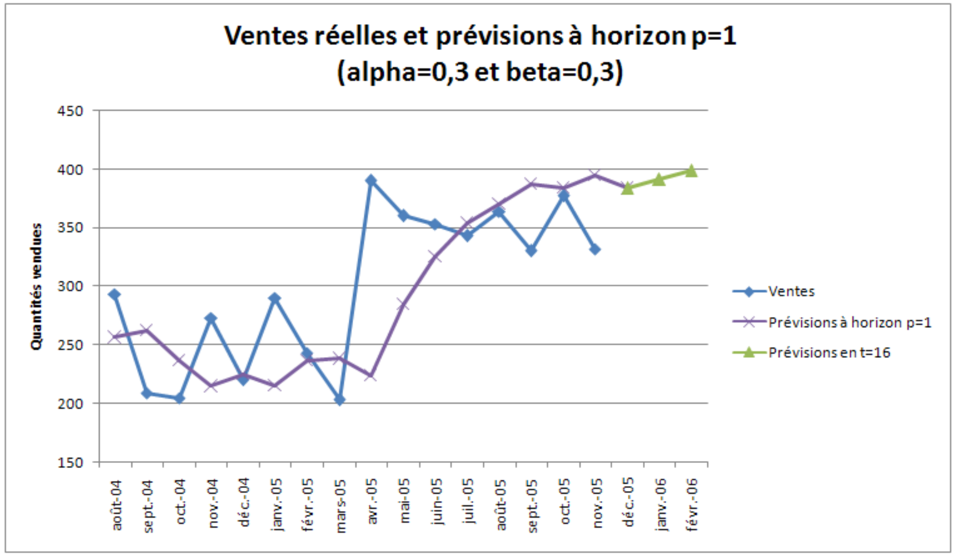
$\hat{y}_7(1) = \hat{a}_7 + \hat{b}_7$

$\hat{y}_{16}(1) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}$

$\hat{y}_{16}(2) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}2$

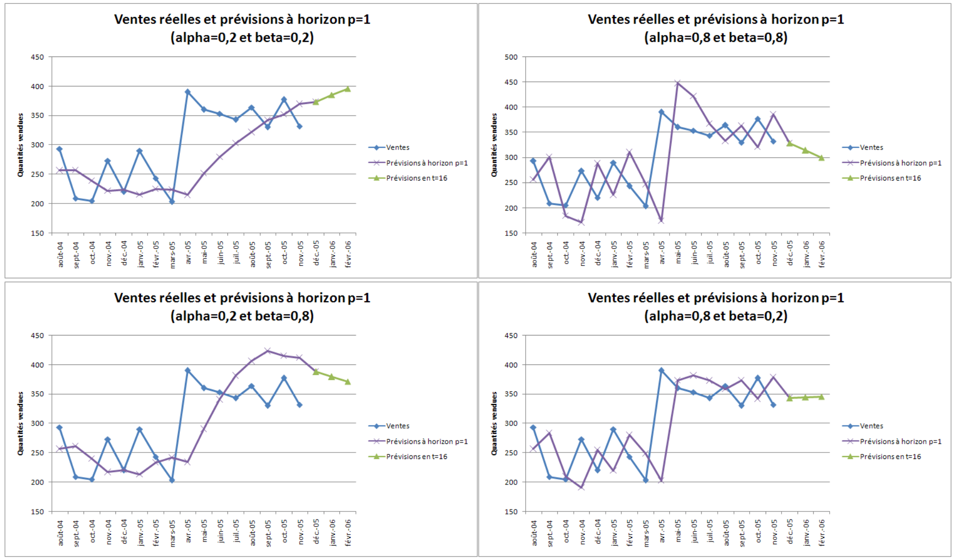
$\hat{y}_{16}(3) = \hat{a}_{16} + \hat{b}_{16}3$

Mise en pratique (suite)



Mise en pratique (suite)

Résultats avec différentes valeurs de α et β :



Mise en pratique (suite)

Remarques :

- Si on compare le graphique avec $\alpha = 0.2$ et $\beta = 0.2$ et celui avec $\alpha = 0.8$ et $\beta = 0.8$ on voit que :
  - Les prévisions du second sont plus fluctuantes que celles du premier
  - Sur la période la plus récente (à partir d'avril 2005), les prévisions du second sont plus rapidement au nouveau niveau que le premier
- Il faut donc avoir un α grand puisqu'il y a des changements de pentes
- Mais sur cette série, on peut garder un β petit car les pentes sont relativement stables (écarts relativement petits)

Rappel du Sommaire

Cas où il y a une pente et une saisonnalité

Méthode endogène où il y a une tendance et une saisonnalité :

- La série $\mathbf{y}$ est décomposée en **3 éléments** :
  1. Mouvement **conjoncturel c** régulier à court terme
  2. Mouvement **saisonnier s** qui se répète régulièrement dans le temps (hiver, printemps,...), ou (lundi, mardi,...), ou (0h, 1h, ..., 24h, ...)
  3. Mouvement **résiduel r** d'amplitude relativement faible, de moyenne nulle. On peut le modéliser par une suite de variables aléatoires qu'on supposera ici indépendantes (par exemple, il n'y a pas de tendance au rattrapage de $t-1$ à t) et de moyennes nulles
- Principe :
  - on estime séparément les caractéristiques de chaque élément
  - on prévoit séparément chaque élément
  - on recompose finalement tous ces éléments pour les prévisions finales

Modélisation de la série temporelle (rappel)

De manière générale, nous supposons donc que nous avons :

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{c}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$$

Il y a deux grandes façons de modéliser la fonction f :

- Composition **additive** :
$$\forall t = 1, \dots, T : y_t = c_t + s_t + r_t$$
- Composition **multiplicative** :
$$\forall t = 1, \dots, T : y_t = c_t s_t r_t$$

Remarque : on peut revenir du modèle multiplicatif au modèle additif en passant par les logarithmes

$$\forall t = 1, \dots, T : \log(y_t) = \log(c_t) + \log(s_t) + \log(r_t)$$

Estimation des effets saisonniers

- Cadre de l'éude :
  - On suppose qu'on a I **périodes** (années ou semaines ou jours ou ...). Les périodes sont découpées en m **saisons**. Si c'est l'année : 12 mois ou 4 trimestres ou 6 bimestres, ... Si c'est la semaine : 7 jours ou jours ouvrés, jours non ouvrés, ... Si c'est le jour : 24 heures ou matin, midi, soir, nuit, ...
  - Le temps est également noté avec 2 indices : y_{ij} est la valeur de la série pour la période i et la saison j. Attention ! à tout couple (i, j) correspond un indice t (comme précédemment)
  - L'effet saisonnier se reproduit identiquement d'année en année : $s_{ij} = s_j$
  - La moyenne de l'effet saisonnier est nulle sur l'année : $s_1 + s_2 + \ldots + s_m = 0$ (ou $s_1 s_2 \ldots s_m = 1$ pour un modèle multiplicatif)

Estimation des effets saisonniers (suite)

- On utilise d'abord une première estimation grossière du mouvement conjoncturel par les **moyennes mobiles centrées** mmc_t de la manière suivante :
  - Si m est un nombre **impair** il peut alors s'écrire $m = 2n + 1$ (exemple $m = 7$ (jours) donc $n = 3$) et on calcule :
$$mmc_t = \frac{y_{t-n} + y_{t-n+1} + \ldots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \ldots + y_{t+n-1} + y_{t+n}}{m}$$
  - Si m est un nombre **pair** il peut alors s'écrire $m = 2n$ (exemple $m = 4$ (trimestres) donc $n = 2$) et on calcule :
$$mmc_t = \frac{\frac{1}{2} y_{t-n} + y_{t-n+1} + \ldots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \ldots + y_{t+n-1} + \frac{1}{2} y_{t+n}}{m}$$

Estimation des effets saisonniers (suite)

- On calcule ensuite des **écarts aux moyennes mobiles centrés** que l'on notera par s'_{ij} :
  - S'il s'agit d'un modèle additif : $s'_{ij} = y_{ij} - mmc_{ij}$
  - S'il s'agit d'un modèle multiplicatif : $s'_{ij} = y_{ij}/mmc_{ij}$
- A partir des s'_{ij} on peut les résumer et ainsi estimer les effets saisonniers : pour chaque saison j on calcule une tendance centrale (moyenne ou médiane) sur l'ensemble des périodes d'observation

$\Rightarrow$ En pratique, on choisit la **médiane** car elle est moins sensible que la moyenne aux valeurs extrêmes (qui sont souvent produites par des événements exceptionnels cachés). On **centre** également les valeurs médianes pour obtenir un ensemble d'effets saisonniers de somme nulle (ou de produit égal à un) :

- Pour un modèle additif :
$$\forall j : \hat{s}_j = med(\{s'_{ij}\}_{i=1,\dots,l}) - moy(\{med(\{s'_{ij}\}_i)\}_{j=1,\dots,m})$$
- Pour un modèle multiplicatif :
$$\forall j : \hat{s}_j = med(\{s'_{ij}\}_{i=1,\dots,l})/moy(\{med(\{s'_{ij}\}_i)\}_{j=1,\dots,m})$$

Mise en pratique (suite)

mmc_{ij} s'_{ij}

n°	an.	trim.	date	montant	Moyennes Mobiles Centrées	Ecarts aux mmc
t	i	j		yij	mmct	s'ij
1	1	1	janv-00	775		
2	1	2	avr-00	760		
3	1	3	juil-00	703	796,5	-93,5
4	1	4	oct-00	918	811,0	107,0
5	2	1	janv-01	835	823,8	11,3
6	2	2	avr-01	816	839,6	-23,6
7	2	3	juil-01	749	861,1	-112,1
8	2	4	oct-01	999	881,5	117,5
9	3	1	janv-02	926	901,5	24,5
10	3	2	avr-02	888	916,9	-28,9
11	3	3	juil-02	837	926,6	-89,6
12	3	4	oct-02	1034	938,5	95,5
13	4	1	janv-03	969	950,4	18,6
14	4	2	avr-03	940	961,5	-21,5
15	4	3	juil-03	880		
16	4	4	oct-03	1080		
17	5	1	janv-04			
18	5	2	avr-04			
19	5	3	juil-04			
20	5	4	oct-04			

$$mmc_3 = \frac{0.5y_1+y_2+y_3+y_4+0.5y_5}{4}$$

$$s'_{2,3} = y_{2,3} - mmc_{2,3}$$

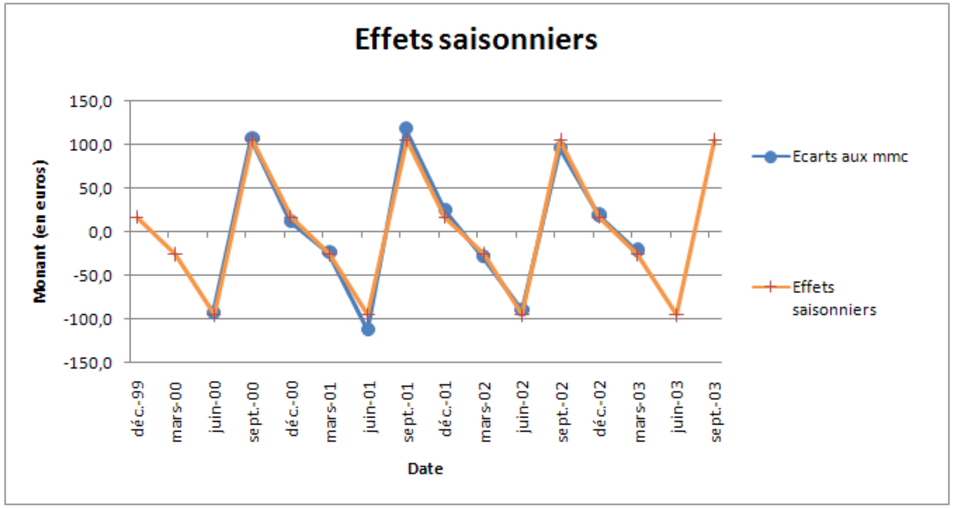
Mise en pratique (suite)

$med(\{s'_{ij}\}_{i=1,\dots,l})$

	an.	2000	2001	2002	2003		
trim.	j/i	1	2	3	4	Médianes	Médianes centrée
janv	1		11,3	24,5	18,6	18,625	16,5
avr	2		-23,6	-28,9	-21,5	-23,625	-25,75
juil	3	-93,5	-112	-89,6		-93,5	-95,625
oct	4	107	118	95,5		107	104,875
						Moyenne	
						2,125	0

$moy(\{med(\{s'_{ij}\}_i)\}_{j=1,\dots,m})$

Mise en pratique (suite)



Estimation de la série CVS

- Une fois estimés les effets de saison, on détermine une série **corrigée des variations saisonnières** (CVS) pour :
  - Rendre plus lisible l'évolution passée
  - Faciliter la prévision en éliminant les fluctuations dues au mouvement saisonnier

$\Rightarrow$ Formellement la sécrie CVS dénotée y_{ij}^{cvs} est donnée par :

- Pour un modèle additif :

$$y_{ij}^{cvs} = y_{ij} - \hat{s}_j$$

- Pour un modèle multiplicatif :

$$y_{ij}^{cvs} = y_{ij} / \hat{s}_j$$

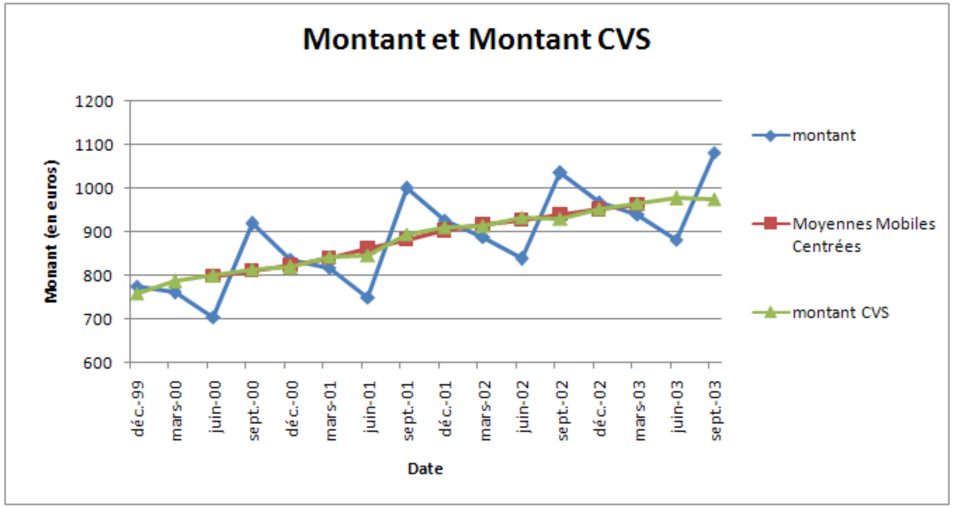
Mise en pratique (suite)

mmc_{ij} s'_{ij} $\hat{s}_j$ y_{ij}^{cvs}

n°	an.	trim.	date	montant	Moyennes Mobiles Centrées	Ecarts aux mmc	Effets saisonniers	montant CVS
t	i	j		yij	mmct	s'ij	^sij	yij (cvs)
1	1	1	janv-00	775			16,5	758,5
2	1	2	avr-00	760			-25,8	785,8
3	1	3	juil-00	703	796,5	-93,5	-95,6	798,6
4	1	4	oct-00	918	811,0	107,0	104,9	813,1
5	2	1	janv-01	835	823,8	11,3	16,5	818,5
6	2	2	avr-01	816	839,6	-23,6	-25,8	841,8
7	2	3	juil-01	749	861,1	-112,1	-95,6	844,6
8	2	4	oct-01	999	881,5	117,5	104,9	894,1
9	3	1	janv-02	926	901,5	24,5	16,5	909,5
10	3	2	avr-02	888	916,9	-28,9	-25,8	913,8
11	3	3	juil-02	837	926,6	-89,6	-95,6	932,6
12	3	4	oct-02	1034	938,5	95,5	104,9	929,1
13	4	1	janv-03	969	950,4	18,6	16,5	952,5
14	4	2	avr-03	940	961,5	-21,5	-25,8	965,8
15	4	3	juil-03	880			-95,6	975,6
16	4	4	oct-03	1080			104,9	975,1
17	5	1	janv-04				16,5	
18	5	2	avr-04				-25,8	
19	5	3	juil-04				-95,6	
20	5	4	oct-04				104,9	

$$y_{4,2}^{cvs} = y_{4,2} - \hat{s}_2$$

Mise en pratique (suite)



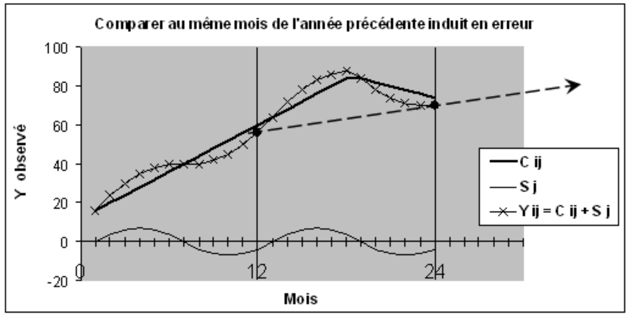
Analyse du passé

Ce que permet l'analyse de la série CVS :

- Sur le graphique des y_{ij}^{cvs} on voit le mouvement conjoncturel, et les éventuels événements exceptionnels
- L'interprétation de la conjoncture récente en utilisant les données CVS est bien meilleure qu'en comparant la valeur du dernier mois à celle du même mois de l'année d'avant
- En effet, ce mois de l'année d'avant peut être modifié (soit par un événement exceptionnel) soit par une variation aléatoire

Analyse du passé (suite)

- De plus, la comparaison à un an d'intervalle peut cacher un retournement récent de conjoncture :



- Ici, quand on compare décembre de la 2ème année à décembre de la 1ère année, on conclut faussement à une croissance (pente positive de la flèche en pointillé), alors que, sur la courbe CVS (ici c_{ij}), on voit bien qu'il y a eu un retournement de la conjoncture à partir du 18ème mois ; en décembre de la 2ème année on est déjà en décroissance depuis 6 mois

Prévision du futur

Après l'analyse fine du passé, on peut faire des prévisions :

- La prolongation du mouvement conjoncturel permet sa prévision :
  - si le mouvement conjoncturel est linéaire, on prolonge la droite sur tout le passé
  - si le mouvement conjoncturel passé présente des changements de niveau ou de pente, on calcule plusieurs variantes ("hypothèse basse", "moyenne", "haute", ...)

  Dans tous les cas, on utilisera la méthode des moindres carrés estimée à partir de la série CVS

  Puis on ajoute (ou multiplie) les coefficients saisonniers aux prévisions de la conjoncture

Mise en pratique (suite)

$\hat{y}_t(1) \hat{y}_t(p), p > 0$

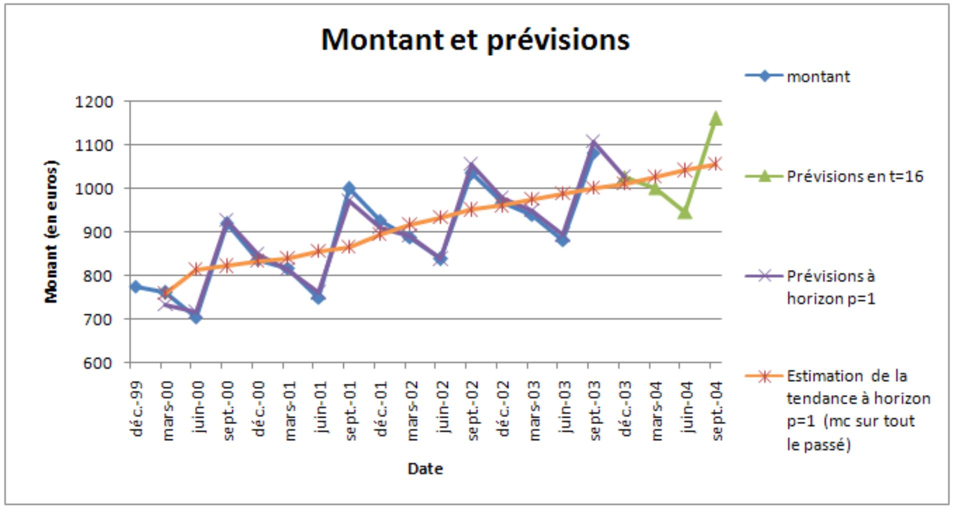
n°	an.	trim.	date	montant	Moyennes Mobiles Centrées	Ecarts aux mmc	Effets saisonniers	montant CVS	Estimation de la tendance à horizon p=1 (mc sur tout le passé)	Prévisions à horizon p=1	Prévisions en t=16
t	i	j		yij	mmct	s'ij	^sij	yij (cvs)			
1	1	1	janv-00	775			16,5	758,5			
2	1	2	avr-00	760			-25,8	785,8	758,5	732,8	
3	1	3	juil-00	703	796,5	-93,5	-95,6	798,6	813,0	717,4	
4	1	4	oct-00	918	811,0	107,0	104,9	813,1	821,1	926,0	
5	2	1	janv-01	835	823,8	11,3	16,5	818,5	833,2	849,7	
6	2	2	avr-01	816	839,6	-23,6	-25,8	841,8	839,1	813,4	
7	2	3	juil-01	749	861,1	-112,1	-95,6	844,6	855,6	760,0	
8	2	4	oct-01	999	881,5	117,5	104,9	894,1	864,4	969,3	
9	3	1	janv-02	926	901,5	24,5	16,5	909,5	893,2	909,7	
10	3	2	avr-02	888	916,9	-28,9	-25,8	913,8	916,9	891,1	
11	3	3	juil-02	837	926,6	-89,6	-95,6	932,6	933,1	837,5	
12	3	4	oct-02	1034	938,5	95,5	104,9	929,1	950,3	1055,1	
13	4	1	janv-03	969	950,4	18,6	16,5	952,5	960,5	977,0	
14	4	2	avr-03	940	961,5	-21,5	-25,8	965,8	974,5	948,8	
15	4	3	juil-03	880			-95,6	975,6	988,3	892,6	
16	4	4	oct-03	1080			104,9	975,1	1000,9	1105,7	
17	5	1	janv-04				16,5		1010,1	1026,6	1026,6
18	5	2	avr-04				-25,8		1025,2		999,4
19	5	3	juil-04				-95,6		1040,3		944,6
20	5	4	oct-04				104,9		1055,4		1160,2

$\hat{y}_{16}(1)$

$\hat{y}_{16}(2)$

$\hat{y}_{16}(3)$

Mise en pratique (suite)



Méthode "Lissage exponentiel triple" (de Holt-Winter)

- Les prévisions sont estimées par lissage exponentiel de toutes les valeurs observées
- La série est décomposée en plusieurs éléments. Par rapport aux modèles de lissage exponentiel précédents nous avons ici en plus les effets de saisons. Nous avons donc trois paramètres à estimer : a_t (le niveau ou l'ordonnée à l'origine), b_t (la pente ou la tendance) et s_t (les effets saisonniers)
- Rappelons que m est le nombre de saisons dans une période (si la période est l'année et une saison un trimestre alors $m = 4$)

$\Rightarrow$ On choisit trois paramètres $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$ et $\gamma \in [0,1]$ et on utilise des formules de récurrences pour leurs mises à jour :

$$\hat{a}_t = \alpha(y_t - \hat{s}_{t-m}) + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$$
$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}$$
$$\hat{s}_t = \gamma(y_t - \hat{a}_t) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-m}$$

Méthodes endogènes | Cas où il y a une pente et une saisonnalité

Méthode "Lissage exponentiel triple" (de Holt-Winter) (suite)

Interprétations des formules de récurrence :

- $\hat{a}_t = \alpha(y_t - \hat{s}_{t-m}) + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$
  $\hat{a}_t$ est une combinaison convexe de (i) l'observation en t corrigée de la variation saisonnière estimée à la période précédente $(y_t - \hat{s}_{t-m})$ (càd du niveau conjoncturel observé moins l'estimation de l'effet saisonnier) et (ii) de la prévision du niveau conjoncturel calculée en $t-1$ pour t $(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$
- $\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}$
  $\hat{b}_t$ est une combinaison convexe de (i) l'écart entre les niveaux estimés en t et $t-1$ $(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1})$ et (ii) de la pente estimée en $t-1$ $(\hat{b}_{t-1})$
- $\hat{s}_t = \gamma(y_t - \hat{a}_t) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-m}$
  $\hat{s}_{t-m}$ est une combinaison convexe de (i) l'ecart saisonnier entre l'observation et le niveau conjoncturel estimé en t $(y_t - \hat{a}_t)$ et (ii) de la précédente estimation de l'effet saisonnier pour la même saison que t (s_{t-m})

Méthodes endogènes | Cas où il y a une pente et une saisonnalité

Méthode "Lissage exponentiel triple" (de Holt-Winter) (suite)

$\Rightarrow$ Une fois estimés $\hat{a}_t$, $\hat{b}_t$ et s_{t-m},, on peut effectuer la prévision à horizon p en appliquant le modèle estimé dont l'équation est alors la suivante :

$$\forall p : \hat{y}_t(p) = \hat{a}_t + \hat{b}_t p + \hat{s}_{t+p-m}$$

- Par exemple, à horizon $p = 1$ on a :

$$\hat{y}_t(1) = \hat{a}_t + \hat{b}_t + \hat{s}_{t+1-m}$$

Méthodes endogènes | Cas où il y a une pente et une saisonnalité

Paramètres du lissage exponentiel triple

- Comme pour précédemment, il faut **initialiser les suites**. Il faut donc déterminer $\hat{a}_0$, $\hat{b}_0$ et des valeurs initiales pour les m effets de saison : $\hat{s}_{-m+1}, \ldots, \hat{s}_0$
- Pour $\hat{a}_0$ et $\hat{b}_0$, on pourra prendre les coefficients de la droite des moindres carrés estimés sur les $2m$ premières observation (les plus anciennes) càd sur les 2 premières périodes
- Une fois $\hat{a}_0$ et $\hat{b}_0$ déterminés, on prendra pour les m premiers effets saisonniers les écarts entre cette droite et les observations de la première période :

$$\forall t = 1, \ldots, m : \hat{s}_{-m+t} = y_t - (\hat{a}_0 + \hat{b}_0 t)$$

- Remarque : ces initialisations figurent dans le tableau au niveau d'une période "0" fictive, les m premières étapes de la récurrence produisent des "prévisions" $\hat{y}_0(t) = \hat{a}_0 + \hat{b}_0 t + \hat{s}_{-m+t}, t = 1, \ldots, m$ qui sont exactement égales aux valeurs observées y_t

Mise en pratique

y_t $\qquad \hat{y}_t(1) \quad \hat{y}_t(p), p > 0$

temps	an.	trim.	Série	alpha =	beta =	gamma =	Prévisions à horizon p=1	Prévisions en t=20
				0,3	0,3	0,5		
t	i	j	yt	ât	^bt	^st	^yt(1)	^yt(p)
-3	0	1				-3,2		
-2	0	2				-0,3		
-1	0	3				5,6		
0	0	4		4,1	3,1	6,5		
1	1	1	4	7,2	3,1	-3,2	4,0	
2	1	2	10	10,3	3,1	-0,3	10,0	
3	1	3	19	13,4	3,1	5,6	19,0	
4	1	4	23	16,5	3,1	6,5	23,0	
5	2	1	12	18,2	2,7	-4,7	16,4	
6	2	2	18	20,1	2,5	-1,2	20,7	
7	2	3	27	22,2	2,3	5,2	28,2	
8	2	4	31	24,5	2,3	6,5	31,1	
9	3	1	19	25,9	2,1	-5,8	22,2	
10	3	2	23	26,8	1,7	-2,5	26,8	
11	3	3	30	27,4	1,4	3,9	33,8	
12	3	4	32	27,8	1,1	5,3	35,3	
13	4	1	19	27,7	0,7	-7,2	23,1	
14	4	2	25	28,1	0,6	-2,8	25,9	
15	4	3	34	29,2	0,8	4,4	32,6	
16	4	4	38	30,7	1,0	6,3	35,3	
17	5	1	27	32,5	1,2	-6,4	24,5	
18	5	2	33	34,3	1,4	-2,1	30,9	
19	5	3	42	36,3	1,6	5,0	40,1	
20	5	4	46	38,4	1,7	6,9	44,2	
21	6	1					33,8	33,8
22	6	2						39,9
23	6	3						48,7
24	6	4						52,4

$\hat{s}_{-2} = y_2 - \hat{a}_0 + \hat{b}_0 2$

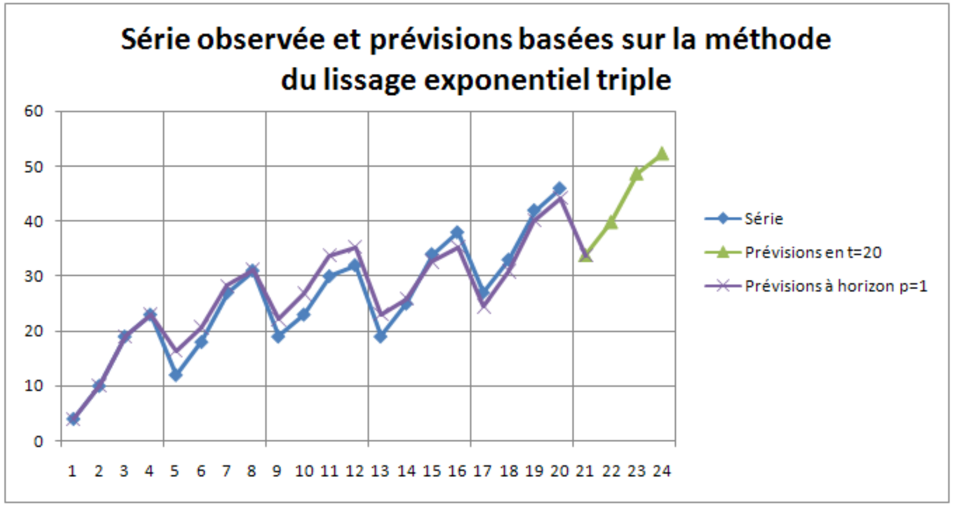
Initialisation

$\hat{y}_8(1) = \hat{a}_8 + \hat{b}_8 + \hat{s}_5$

$\hat{y}_{20}(1) = \hat{a}_{20} + \hat{b}_{20} + \hat{s}_{17}$

$\hat{y}_{20}(2) = \hat{a}_{20} + \hat{b}_{20} 2 + \hat{s}_{18}$

Mise en pratique (suite)



Rappel du Sommaire

Cas où il y a une pente, une saisonnalité et des évènements exceptionnels

Méthode endogène où il y a une tendance, une saisonnalité et éventuellement des évènements exceptionnels

- La série **y** est décomposée en **4 éléments** :
  1. Mouvement **conjoncturel c** constant sur toute la période d'observation
  2. Mouvement **saisonnier s** qui se répète régulièrement dans le temps mais qui est constant
  3. Mouvement **exceptionnel e** causé par des événements irréguliers (météo, politique, nouvelle loi, pannes, maladie, grève, événement marketing, ...)
  4. Mouvement **résiduel r** d'amplitude relativement faible, de moyenne nulle. On peut le modéliser par une suite de variables aléatoires qu'on supposera ici indépendantes (par exemple, il n'y a pas de tendance au rattrapage de $t-1$ à t) et de moyennes nulles
- Principe :
  - contrairement aux modèles précédents, on estime ensemble tous les paramètres
  - les paramètres sont supposés fixes dans le passé et le futur

Modélisation de la série temporelle

De manière générale, nous supposons donc que nous avons :

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{c}, \mathbf{s}, \mathbf{e}, \mathbf{r})$$

Par contre, contrairement aux modèles précédents nous utilisons ici des variables d'indicatrice pour identifier les différents effets saisonniers ainsi que les évènements exceptionnels

Formellement, nous avons le modèle suivant :

$$\forall t = 1, \dots, T : y_t = (a_t + b_t t) + (\textstyle\sum_{j=1}^{m} \mathbf{I}_t^j s_t^j) + (\mathbf{I}_d e_d) + r_t$$

où :

- $\mathbf{I}_t^j$ est l'indicatrice de la saison j à laquelle appartient l'observation t
- s_t^j est l'effet de saison j correspondant à l'observation t
- $\mathbf{I}_d$ est l'indicatrice de l'évènement exceptionnel $d \in \mathbb{T}$
- r_t est une erreur de moyenne nulle et de dispersion (variabilité) constante

Méthode “Régression linéaire avec variables indicatrices”

- On estime l'ensemble des paramètres simultanément en utilisant les **moindres carrés**
- Si nécessaire, pour réduire le nombre de paramètres à estimer, on regroupe les mois qui ont à peu près les mêmes effets saisonniers (idem pour les jours, etc.). Par exemple, on aura une seule indicatrice pour janvier et mars et juin, si ces trois mois ont à peu près les mêmes effets saisonniers
- Par ailleurs, techniquement, il faut supprimer un élément de chaque saisonnalité du modèle à estimer ; en effet ces “variables explicatives” sont linéairement liées :
$$\textstyle\sum_{j=1}^{m} \mathbf{I}_j = \mathbf{1} \text{ où } \mathbf{1} \text{ est le vecteur rempli de } 1$$
En effet, toute observation y_t est dans une saison (un mois, ou un jour, ...) et une seule. On peut choisir librement la (ou les) colonne(s) à supprimer des calculs ; le modèle donnera les mêmes résultats, les mêmes prévisions.

Méthode “Régression linéaire avec variables indicatrices” (suite)

- Une fois les paramètres estimés, on calcule les prévisions de la manière suivante :
$$\forall p : \hat{y}_t(p) = (\hat{a}_t + \hat{b}_t(t+p)) + (\textstyle\sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{I}_{t+p}^j \hat{s}_t^j) + (\mathbf{I}_d \hat{e}_d)$$
- Remarque : pour toutes les observations passées ou les prévisions t' appartenant à une saison j, nous avons l'effet saisonnier $\hat{s}_{t'}^j$ qui est constant

Méthode “Régression linéaire avec variables indicatrices” (suite)

Extensions possibles de cette méthode :

- On peut estimer en même temps **plusieurs saisonnalités**, par exemple : les mois de l'année, et les jours de la semaine, et les heures de la journée, . . . Par exemple :
$$\forall t : y_t = (a_t + b_t t) + (\textstyle\sum_{j=1}^{m_1} \mathbf{I}_t^j s_t^j) + (\textstyle\sum_{k=1}^{m_2} \mathbf{I}_t^k s_t^k) + (\mathbf{I}_d e_d) + r_t$$
où $j = 1, \dots, m_1$ représente l'indice des mois de l'année et $k = 1, \dots, m_2$ représente l'indice des jours (la série est donc journalière mais s'étend sur plusieurs années)
- On peut également ajouter une **variable exogène** si cette dernière a un impact sur le mouvement conjoncturel. Par exemple :
$$\forall t' : y_t = (a_t + b_t t') + c x_t + (\textstyle\sum_{j=1}^{m} \mathbf{I}_t^j s_t^j) + (\mathbf{I}_d e_d) + r_t$$
où $\mathbf{x}$ est une variable exogène

Mise en pratique

y_t $\quad$ $\hat{y}_t(p), p > 0$

temps	an.	trim.	Série	Variables explicatives					Modélisation du passé en t=20	Prévisions en t=20
t	i	j	yt	t	trim 1	trim 2	trim 3	trim 4		
1	1	1	4	1	1	0	0	0	5,6	
2	1	2	10	2	0	1	0	0	11,2	
3	1	3	19	3	0	0	1	0	19,8	
4	1	4	23	4	0	0	0	1	23,4	
5	2	1	12	5	1	0	0	0	10,9	
6	2	2	18	6	0	1	0	0	16,5	
7	2	3	27	7	0	0	1	0	25,1	
8	2	4	31	8	0	0	0	1	28,7	
9	3	1	19	9	1	0	0	0	16,2	
10	3	2	23	10	0	1	0	0	21,8	
11	3	3	30	11	0	0	1	0	30,4	
12	3	4	32	12	0	0	0	1	34	
13	4	1	19	13	1	0	0	0	21,5	
14	4	2	25	14	0	1	0	0	27,1	
15	4	3	34	15	0	0	1	0	35,7	
16	4	4	38	16	0	0	0	1	39,3	
17	5	1	27	17	1	0	0	0	26,8	
18	5	2	33	18	0	1	0	0	32,4	
19	5	3	42	19	0	0	1	0	41	
20	5	4	46	20	0	0	0	1	44,6	
21	6	1		21	1	0	0	0		32,1
22	6	2		22	0	1	0	0		37,7
23	6	3		23	0	0	1	0		46,3
24	6	4		24	0	0	0	1		49,9

$$\hat{y}_{20}(-11) = \hat{a}_{20} + \hat{b}_{20}9 + \hat{s}_9^1$$

$$\hat{y}_{20}(2) = \hat{a}_{20} + \hat{b}_{20}22 + \hat{s}_{22}^2$$

Méthodes endogènes | Prise en compte des évènements exceptionnels

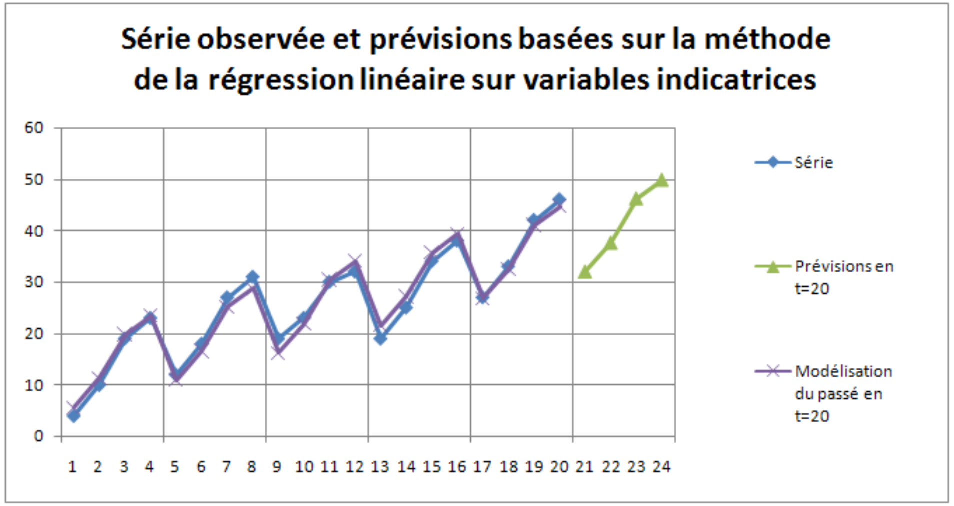
Mise en pratique (suite)

Pour l'estimation des paramètres on utilise la fonction `DROITEREG` d'Excel.

	Estimation des paramètres				
	trim 3	trim 2	trim 1	t	ord.orig
	-2,275	-9,55	-13,83	1,325	18,1
	1,1477	1,1543	1,1654	0,0716	1,1807
R²	0,9772	1,8111	#N/A	#N/A	#N/A
	160,49	15	#N/A	#N/A	#N/A

Méthodes endogènes | Prise en compte des évènements exceptionnels

Mise en pratique (suite)



Méthodes endogènes | Prise en compte des évènements exceptionnels

Mise en pratique (avec évènement exceptionnel)

Mise en pratique (avec évènement exceptionnel)

y_t $\hat{y}_t(p), p > 0$

temps	an.	trim.	Série	Variables explicatives						Modélisation du passé en t=20	Prévisions en t=20
t	i	j	yt	t	Excep.	trim 1	trim 2	trim 3	trim 4		
1	1	1	4	1	0	1	0	0	0	4,9	
2	1	2	10	2	0	0	1	0	0	11,2	
3	1	3	19	3	0	0	0	1	0	19,8	
4	1	4	23	4	0	0	0	0	1	23,4	
5	2	1	12	5	0	1	0	0	0	10,2	
6	2	2	18	6	0	0	1	0	0	16,5	
7	2	3	27	7	0	0	0	1	0	25,1	
8	2	4	31	8	0	0	0	0	1	28,7	
9	3	1	**2**	9	**1**	1	0	0	0	2	
10	3	2	23	10	0	0	1	0	0	21,8	
11	3	3	30	11	0	0	0	1	0	30,4	
12	3	4	32	12	0	0	0	0	1	34	
13	4	1	19	13	0	1	0	0	0	20,8	
14	4	2	25	14	0	0	1	0	0	27,1	
15	4	3	34	15	0	0	0	1	0	35,7	
16	4	4	38	16	0	0	0	0	1	39,3	
17	5	1	27	17	0	1	0	0	0	26,1	
18	5	2	33	18	0	0	1	0	0	32,4	
19	5	3	42	19	0	0	0	1	0	41	
20	5	4	46	20	0	0	0	0	1	44,6	
21	6	1		21	0	1	0	0	0		31,4
22	6	2		22	0	0	1	0	0		37,7
23	6	3		23	0	0	0	1	0		46,3
24	6	4		24	0	0	0	0	1		49,9

$$\hat{y}_{20}(-11) = \hat{a}_{20} + \hat{b}_{20}9 + \hat{s}_9^1 + \hat{e}_9$$

$$\hat{y}_{20}(2) = \hat{a}_{20} + \hat{b}_{20}22 + \hat{s}_{22}^2$$

Mise en pratique (avec évènement exceptionnel)

Pour l'estimation des paramètres on utilise la fonction `DROITEREG` d'Excel.

	Estimation des paramètres					
	trim 3	trim 2	trim 1	Except	t	ord.orig
	-2,275	-9,55	-14,53	-13,5	1,325	18,1
	1,0631	1,0693	1,1428	1,8756	0,0663	1,0937
R^2	0,9852	1,6776	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A
	185,79	14	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A

Mise en pratique (avec évènement exceptionnel)