Exercices d'Algèbre Linéaire et d'Analyse de Données

L2 MIASHS - Université Lyon 2 - 2017/2018

Responsable : Julien Ah-Pine

1 Familles de vecteurs, bases, espaces vectoriels

1.1 Exercice

On munit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ des lois : $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q1 $\mathbb{E}$ est-il un espace vectoriel ?

1.2 Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ et $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$.

Q1 Montrez que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Q2 Est-ce que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$?

1.3 Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = (1, -2, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -1)$ et $\mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$.

Q1 Montrez que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est une famille libre.

1.4 Exercice

Soients $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2, 3)$ et $\mathbf{v_4} = (1, 3, 4, 8)$.

Q1 Déterminez les relations linéaires liant les vecteurs $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ et $\mathbf{v_4}$.

1.5 Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 2, 0, 1, 2)$.

Q1 Déterminez une base de $Vec\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. En déduire si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ forment une famille de vecteurs libres ou liés.

Q2 Déterminez deux vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ de $\mathbb{R}^5$ de sorte à ce que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^5$.

1.6 Exercice

Résolvez les systèmes d'équations linéaires suivants :

— $$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{cases}$$

— $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + -x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{cases}$$

2 Applications linéaires et représentation matricielle

2.1 Exercice

Soit $\mathbb{E}$ un ev et f une application linéaire.

Q1 Montrez que $Ker(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ muni des lois de composition interne et externe classiques forme un sev de $\mathbb{E}$.

2.2 Exercice

Soit $\left\{ \begin{array}{ll} f : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3) \end{array} \right.$

Q1 Déterminez le sev $Ker(f)$.

Q2 f est-elle un endomorphisme ? un auto-morphisme ?

2.3 Exercice

Soit $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application suivante : $\left\{ \begin{array}{ll} f : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 - x_2, x_3 - x_2) \end{array} \right.$

Q1 Déterminez $M(f)_{\mathbf{e}_i, \epsilon_j}$.

Q2 Déterminez l'image du vecteur $\mathbf{u} = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$ par la représentation algébrique et par la représentation matricielle. A quel sev particulier $\mathbf{u}$ appartient-il ?

2.4 Exercice

Soit $\left\{ \begin{array}{ll} f : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Q1 Déterminez une base de $Ker(f)$.

Q2 Déterminez une base de $Im(f)$.

3 Inverses de matrice, changements de bases, déterminants

3.1 Exercice

Déterminez l'inverse de la matrice suivante à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2 Exercice

Soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Q1 Déterminez la matrice de passage $\mathbf{P}_{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}'_i}$.

Q2 Montrez que $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q3 Déterminez $\mathbf{P}_{\mathbf{e}'_i - \mathbf{e}_i}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base de $\mathbf{e}_i$ est représenté par la matrice :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a - b & a + c & c - b \\ b - a & c - a & b + c \\ a + b & a - c & b - c \end{pmatrix}$$

Q4 Calculez la matrice de f dans la base $\{\mathbf{e}'_i\}$.

3.3 Exercice

Calculez les déterminants suivants :

Q1 $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$

Q2 $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$

3.4 Exercice

Soit la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Q1 Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}$ est inversible ?
Q2 Calculez alors son inverse.

4 Réduction des endomorphismes

4.1 Exercice

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Questions :
Q1 Calculez les valeurs propres. Remarque : 2 est valeur propre.
Q2 Calculez les vecteurs propres. $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

4.2 Exercice

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.
Questions :
Q1 Calculez les valeurs propres.
Q2 Calculez les vecteurs propres. Justifiez le fait que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable ?
Q3 Exprimez $\mathbf{A}$ dans la base formée par les vecteurs propres.
Q4 Déterminez les matrices de passages $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{e}_i - \mathbf{v}_i}$ et $\mathbf{P}^{-1}$.

4.3 Exercice

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre n qui soit diagonalisable et notons $\mathbf{B}$, la représentation de $\mathbf{A}$ dans la base des vecteurs propres $\{\mathbf{v}_i\}$.
Questions :
Q1 Montrez que $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{B}^k\mathbf{P}^{-1}$ où $\mathbf{P}$ est la matrice de passage $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{v}_i - \mathbf{e}_i}$.
Q2 Utilisez ce résultat afin de donner une expression de $\mathbf{A}^k$ avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.4 Exercice

Soit la matrice $\mathbf{A}$ suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q1 Quelles sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$? $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ? $\mathbf{A}$ est-elle inversible ? Que pouvez-vous en conclure ?

Soit la matrice $\mathbf{B}$ suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q2 Quels sont les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{B}$? $\mathbf{B}$ est-elle diagonalisable ? $\mathbf{B}$ est-elle inversible ? Que pouvez-vous en conclure ?

5 Espaces euclidiens

5.1 Exercice

Sur $\mathbb{R}^3$ on définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$

Q1 Est-ce que f ainsi définie est un produit scalaire ?

Q2 Même question pour :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3\right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + x_3y_3$$

5.2 Exercice

Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 3s_1t_1 + s_2t_2 + 3s_3t_3 - s_2t_1 - s_1t_2 - s_3t_2 - s_2t_3$$

Questions :

Q1. Montrez que f est un produit scalaire.

Q2. Soit $\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i}$ la matrice de passage de $\{\boldsymbol{\epsilon}_i\}$ vers $\{\mathbf{e}_i\}$ définie par :

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminez $\mathbf{F}$ la matrice représentant le produit scalaire f dans la base $\{\mathbf{e_i}\}$. Puis complétez la matrice $\mathbf{F}'$ suivante qui correspond à l'expression de f dans la base $\{\boldsymbol{\epsilon}_i\}$:

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & f'_{13} \\ 1 & 2 & f'_{23} \\ f'_{31} & f'_{32} & f'_{33} \end{pmatrix}$$

Q3. Soient les vecteurs $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{y}'$ dont les composantes dans $\{\epsilon_i\}$ sont les suivantes : $\mathbf{x}' = (0, 1, 0)$, $\mathbf{y}' = (-1, 1, 1)$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux selon le produit scalare associé à f ?

5.3 Exercice

Soient $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et soit $\mathbb{F} = Vec\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Questions :

Q1 Déterminez $\mathbf{P}_\mathbb{F}$ la matrice de projection orthogonale sur $\mathbb{F}$.

Q2 Soit $\mathbf{w} = (-1/2, 1, -1/2)$. Calculez $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ et $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. A quel sous-espace vectoriel particulier $\mathbf{w}$ appartient-il ? Que pouvez-vous en conclure sur $\mathbf{P}_\mathbb{F}\mathbf{w}$.

5.4 Exercice

Soit $\mathbf{A}$ une matrice de taille $(n \times p)$. Questions :

Q1 Rappelez la formule donnant $\mathbf{P}_{\mathbb{F}}$ la matrice de projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{F}$ engendré par les colonnes de $\mathbf{A}$.

Q2 Supposons que $p = 1$ et que $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ de taille $n \times 1$. Que vaut dans ce cas $\mathbf{P}_{\mathbb{F}}$? Calculez la projection orthogonale de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{F}$.