Analyse Relationnelle Mathématique et ses applications en aide multicritère à la décision et en classification automatique

Julien Ah-Pine
julien.ah-pine@univ-lyon2.fr

Laboratoire ERIC
Université Lyon 2

Séminaire du LIMOS
Clermont-Ferrand
28 septembre 2017

Sommaire

Rappel du Sommaire

Agrégation de relations binaires (RB)

- Le problème général qui nous intéresse se formalise comme suit :

$$\boxed{R^* = \arg\max_{R \in \mathbb{S}} \Delta(\mathcal{A}(R^1, R^2, \ldots, R^m), R)}$$

où :

- $\{R^1, R^2, \ldots, R^m\}$, $m \geq 1$, est un ensemble de **RB individuelles**.
- $\mathcal{A}$ est un procédé d'agrégation des $\{R^j\}_{j=1,\ldots,m}$ en une **RB collective valuée**.
- Δ est une application mesurant la qualité de l'**ajustement** entre la RB collective et une RB $R \in \mathbb{S}$.
- $\mathbb{S}$ est l'ensemble des **RB d'un type donné** (ensemble de recherche).
- R^* est une **RB de consensus (ou centrale)** permettant de résumer au mieux, au sens de $\mathcal{A}$ et Δ, l'ensemble $\{R^j\}_{j=1,\ldots,m}$.

Deux applications classiques

- Agrégation de préférences -relations d'ordre- (votes, choix social, aide multicritère à la décision. . .) :
  - $\{R^j\}_{j=1,\ldots,m}$ sont des relations d'ordre complet.
  - $\mathcal{A}$ est un comptage de voix (pondéré ou pas).
  - Δ est une règle de vote, une fonction de choix social. . .
  - $\mathbb{S}$ est l'ensemble des relations d'ordre complet.

Deux applications classiques

- Agrégation de préférences -relations d'ordre- (votes, choix social, aide multicritère à la décision. . .) :
  - $\{R^j\}_{j=1,\dots,m}$ sont des relations d'ordre complet.
  - $\mathcal{A}$ est un comptage de voix (pondéré ou pas).
  - Δ est une règle de vote, une fonction de choix social. . .
  - $\mathbb{S}$ est l'ensemble des relations d'ordre complet.
- Agrégation de similarités -relations d'équivalence- (clustering de données qualitatives, correlation clustering, méth. ensemblistes. . .) :
  - $\{R^j\}_{j=1,\dots,m}$ sont des relations d'équivalence.
  - $\mathcal{A}$ est une mesure de proximité.
  - Δ est un critère de partitionnement.
  - $\mathbb{S}$ est l'ensemble des relations d'équivalence.

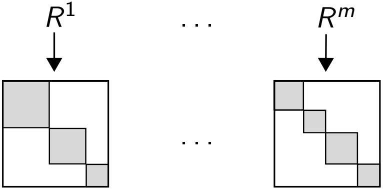
Deux applications classiques

- Agrégation de préférences -relations d'ordre- (votes, choix social, aide multicritère à la décision...) :
  - $\{R^j\}_{j=1,\ldots,m}$ sont des relations d'ordre complet.
  - $\mathcal{A}$ est un comptage de voix (pondéré ou pas).
  - Δ est une règle de vote, une fonction de choix social...
  - $\mathbb{S}$ est l'ensemble des relations d'ordre complet.
- Agrégation de similarités -relations d'équivalence- (clustering de données qualitatives, correlation clustering, méth. ensemblistes...) :
  - $\{R^j\}_{j=1,\ldots,m}$ sont des relations d'équivalence.
  - $\mathcal{A}$ est une mesure de proximité.
  - Δ est un critère de partitionnement.
  - $\mathbb{S}$ est l'ensemble des relations d'équivalence.
- L'**ARM** permet de résoudre de façon unifiée ces deux problèmes :
  - Représentation **matricielle** des relations $\{R^j\}_{j=1,\ldots,m}$ et R.
  - Modélisation de $\mathcal{A}$ par **addition** des matrices relationnelles.
  - Modélisation de Δ par la **règle majoritaire** (critère de **Condorcet**).
  - Modélisation de $\mathbb{S}$ par des **contraintes linéaires**.
  - Détermination de R^* (solution exacte) par **PL en nombres binaires**.

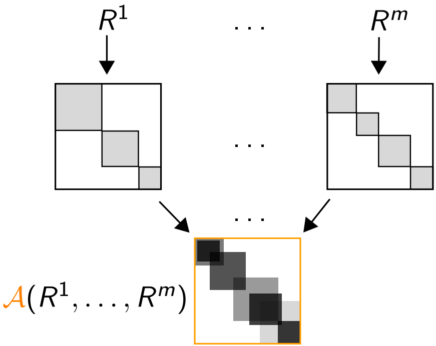
ARM

$$R^1 \qquad \dots \qquad R^m$$

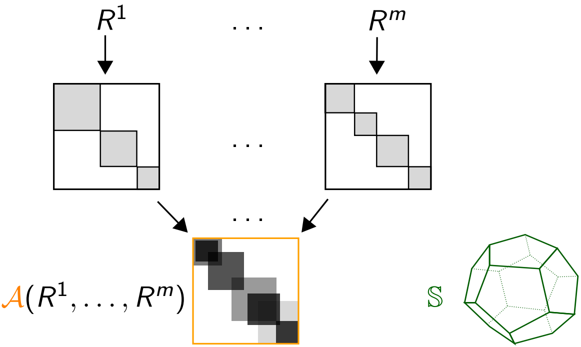
ARM



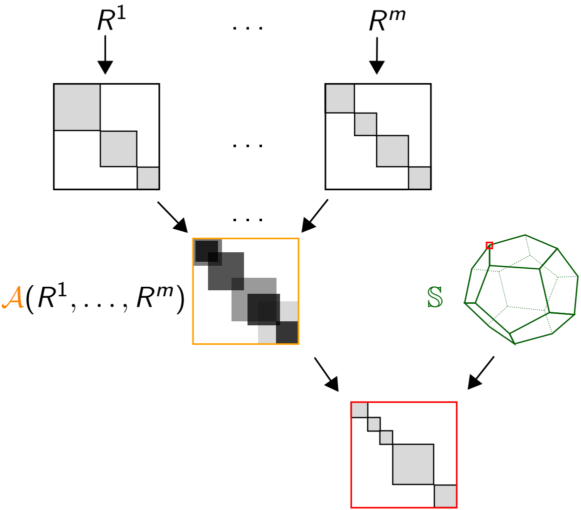
ARM



ARM



ARM



$$R^* = \arg\max_{R \in \mathbb{S}} \Delta(\mathcal{A}(R^1, \ldots, R^m), R)$$

Rappel du Sommaire

Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$

- Soit $\mathbb{A}$ un ensemble fini d'éléments $\{a, b, c, \ldots\}$ avec $|\mathbb{A}| = n$.
- Une relation binaire R sur $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, càd un **ensemble de paires ordonnées** : $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- Si $(a, b) \in R$ (noté aussi aRb) on dit que "a est **en relation avec** b".

Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$

- Soit $\mathbb{A}$ un ensemble fini d'éléments $\{a, b, c, \ldots\}$ avec $|\mathbb{A}| = n$.
- Une relation binaire R sur $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, càd un **ensemble de paires ordonnées** : $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- Si $(a, b) \in R$ (noté aussi aRb) on dit que "a est **en relation avec** b".
- R peut être représentée par un **graphe** orienté (non orienté si la RB est symétrique).

Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$

- Soit $\mathbb{A}$ un ensemble fini d'éléments $\{a, b, c, \dots\}$ avec $|\mathbb{A}| = n$.
- Une relation binaire R sur $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, càd un **ensemble de paires ordonnées** : $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- Si $(a, b) \in R$ (noté aussi aRb) on dit que "a est **en relation avec** b".
- R peut être représentée par un **graphe** orienté (non orienté si la RB est symétrique).
- R peut être représentée par une matrice d'adjacence binaire $\mathbf{R}$ que l'on appellera **matrice relationnelle**.

Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$

- Soit $\mathbb{A}$ un ensemble fini d'éléments $\{a, b, c, \ldots\}$ avec $|\mathbb{A}| = n$.
- Une relation binaire R sur $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, càd un **ensemble de paires ordonnées** : $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- Si $(a, b) \in R$ (noté aussi aRb) on dit que "a est **en relation avec** b".
- R peut être représentée par un **graphe** orienté (non orienté si la RB est symétrique).
- R peut être représentée par une matrice d'adjacence binaire $\mathbf{R}$ que l'on appellera **matrice relationnelle**.
- La **relation complémentaire** de R est notée $\overline{R}$ et définie par :

$$\forall a, b (a\overline{R}b \Leftrightarrow \neg(aRb))$$

Relations binaires sur un ensemble $\mathbb{A}$

- Soit $\mathbb{A}$ un ensemble fini d'éléments $\{a, b, c, \ldots\}$ avec $|\mathbb{A}| = n$.
- Une relation binaire R sur $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$, càd un **ensemble de paires ordonnées** : $R \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
- Si $(a, b) \in R$ (noté aussi aRb) on dit que "a est **en relation avec** b".
- R peut être représentée par un **graphe** orienté (non orienté si la RB est symétrique).
- R peut être représentée par une matrice d'adjacence binaire $\mathbf{R}$ que l'on appellera **matrice relationnelle**.
- La **relation complémentaire** de R est notée $\overline{R}$ et définie par :

$$\forall a, b (a\overline{R}b \Leftrightarrow \neg(aRb))$$

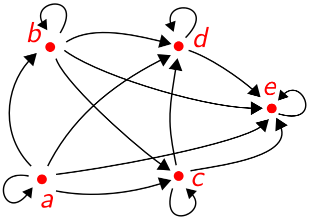
- La **relation inverse** de R est notée $\check{R}$ et définie par :

$$\forall a, b (a\check{R}b \Leftrightarrow bRa)$$

Exemple d'une relation d'ordre complet

- $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$
- $R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),$
  $(c,c),(c,d),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}.$

- Représentation graphique :



- Matrice relationnelle :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple d'une relation d'ordre complet (suite)

- **Matrice relationnelle** :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple d'une relation d'ordre complet (suite)

- **Matrice relationnelle** :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Complémentaire** : $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{1} - \mathbf{R}$.

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple d'une relation d'ordre complet (suite)

- **Matrice relationnelle** :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Complémentaire** : $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{1} - \mathbf{R}$.

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Inverse** : $\check{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^\top$.

$$\check{\mathbf{R}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rappel du Sommaire

Relations I, J, P issues de R

- R est une relation de préférence.
- aRb :"a est **préféré ou indifférent** à b".
- $\forall(a, b) \in \mathbb{A}^2$, une et une seule des quatre situations est vraie :

Relations I, J, P issues de R

- R est une relation de préférence.
- aRb :"a est **préféré ou indifférent** à b".
- $\forall(a, b) \in \mathbb{A}^2$, une et une seule des quatre situations est vraie :
  - $(aRb \wedge bRa)$, notée aI_Rb, que l'on interprète comme "a est **indifférent** de b".

Relations I, J, P issues de R

- R est une relation de préférence.
- aRb :"a est **préféré ou indifférent** à b".
- $\forall(a,b) \in \mathbb{A}^2$, une et une seule des quatre situations est vraie :
  - $(aRb \wedge bRa)$, notée aI_Rb, que l'on interprète comme "a est **indifférent** de b".
  - $(a\overline{R}b \wedge b\overline{R}a)$, notée aJ_Rb, que l'on interprète comme "a est **incomparable** à b".

Relations I, J, P issues de R

- R est une relation de préférence.
- aRb :"a est **préféré ou indifférent** à b".
- $\forall(a,b) \in \mathbb{A}^2$, une et une seule des quatre situations est vraie :
  - $(aRb \wedge bRa)$, notée aI_Rb, que l'on interprète comme "a est **indifférent** de b".
  - $(a\overline{R}b \wedge b\overline{R}a)$, notée aJ_Rb, que l'on interprète comme "a est **incomparable** à b".
  - $(aRb \wedge b\overline{R}a)$, notée aP_Rb, que l'on interprète comme "a est **strictement préféré** à b".

Relations I, J, P issues de R

- R est une relation de préférence.
- aRb :"a est **préféré ou indifférent** à b".
- $\forall(a, b) \in \mathbb{A}^2$, une et une seule des quatre situations est vraie :
  - $(aRb \wedge bRa)$, notée aI_Rb, que l'on interprète comme "a est **indifférent** de b".
  - $(a\overline{R}b \wedge b\overline{R}a)$, notée aJ_Rb, que l'on interprète comme "a est **incomparable** à b".
  - $(aRb \wedge b\overline{R}a)$, notée aP_Rb, que l'on interprète comme "a est **strictement préféré** à b".
  - $(a\overline{R}b \wedge bRa)$, notée bP_Ra, que l'on interprète comme "b est **strictement préféré** à a".

Relations I, J, P issues de R

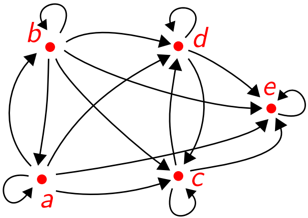
- R est une relation de préférence.
- aRb :"a est **préféré ou indifférent** à b".
- $\forall(a,b) \in \mathbb{A}^2$, une et une seule des quatre situations est vraie :
  - $(aRb \wedge bRa)$, notée aI_Rb, que l'on interprète comme "a est **indifférent** de b".
  - $(a\overline{R}b \wedge b\overline{R}a)$, notée aJ_Rb, que l'on interprète comme "a est **incomparable** à b".
  - $(aRb \wedge b\overline{R}a)$, notée aP_Rb, que l'on interprète comme "a est **strictement préféré** à b".
  - $(a\overline{R}b \wedge bRa)$, notée bP_Ra, que l'on interprète comme "b est **strictement préféré** à a".
- Ces situations sont résumées dans le tableau suivant :

	bRa	$b\overline{R}a$
aRb	aI_Rb	aP_Rb
$a\overline{R}b$	bP_Ra	aJ_Rb

Exemple d'une relation de préordre complet

- $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}$
- $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e), (c,c), (c,d), (c,e), (d,c), (d,d), (d,e), (e,e)\}$.

- Représentation graphique :



- Matrice relationnelle :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

ARM et aide multicritère à la décision par l'exemple

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort
a	10k	6.5	A	Mauvaise
b	20k	7.6	A	Bonne
c	25k	7.5	B	Moyenne
d	30k	8.2	C	Trés bonne

ARM et aide multicritère à la décision par l'exemple

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort
a	10k	6.5	A	Mauvaise
b	20k	7.6	A	Bonne
c	25k	7.5	B	Moyenne
d	30k	8.2	C	Trés bonne

- Chaque critère infère une relation d'ordre :
  1. prix : $aRbRcRd$,
  2. conso. : $aRcRbRd$,
  3. poll. : aI_RbRcRd,
  4. confort : $dRbRcRa$.

ARM et aide multicritère à la décision par l'exemple

Voitures	prix (euros)	conso. (l/100 km)	niv. poll.	niv. confort
a	10k	6.5	A	Mauvaise
b	20k	7.6	A	Bonne
c	25k	7.5	B	Moyenne
d	30k	8.2	C	Trés bonne

- Chaque critère infère une relation d'ordre :
  1. prix : $aRbRcRd$,
  2. conso. : $aRcRbRd$,
  3. poll. : aI_RbRcRd,
  4. confort : $dRbRcRa$.
- Bien que les échelles soient distinctes, le formalisme relationnel permet d'homogénéiser l'information ordinale de préférence.

Matrices relationnelles individuelles et collective

- Pour chaque critère on a les mat. rel. individuelles suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^1};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^2};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^3};\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^4}$$

Matrices relationnelles individuelles et collective

- Pour chaque critère on a les mat. rel. individuelles suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^1};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^2};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^3};\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^4}$$

- La **mat. rel. collective** (**procédé d'agrégation** $\mathcal{A}$) est définie par :

$$\underbrace{\mathcal{A}(R^1,\ldots,R^4)}_{\mathbf{C}}=\sum_{k=1}^{4}\mathbf{R}^k=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a\\ b\\ c\\ d \end{array} & \begin{pmatrix}4&3&3&3\\2&4&3&3\\1&1&4&3\\1&1&1&4\end{pmatrix}\end{array}$$

Matrices relationnelles individuelles et collective

- Pour chaque critère on a les mat. rel. individuelles suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^1};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^2};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^3};\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{\mathbf{R}^4}$$

- La **mat. rel. collective** (**procédé d'agrégation** $\mathcal{A}$) est définie par :

$$\underbrace{\mathcal{A}(R^1,\dots,R^4)}_{\mathbf{C}}=\sum_{k=1}^{4}\mathbf{R}^k=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array} & \begin{pmatrix}4&3&3&3\\2&4&3&3\\1&1&4&3\\1&1&1&4\end{pmatrix}\end{array}$$

- **Comptage de voix** (ex. : $\mathbf{C}_{bc}=3$ critères supportant bRc).

Règles de Condorcet et ARM

- **Règle de la majorité par paire (RMP)** : a est collectivement préf. ou indif. à b, s'il y a plus de critères supportant "a préf. ou indif. à b" que de critères supportant "b préf. ou indif. à a".

Règles de Condorcet et ARM

- **Règle de la majorité par paire (RMP)** : a est collectivement préf. ou indif. à b, s'il y a plus de critères supportant "a préf. ou indif. à b" que de critères supportant "b préf. ou indif. à a".
- Soit $\mathbf{X}$ la mat. rel. de la préférence collective R^*. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{ab} = 1 &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \mathbf{C}_{ba} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \check{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0\end{aligned}$$

où $\check{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \check{\mathbf{R}}^k$.

Règles de Condorcet et ARM

- **Règle de la majorité par paire (RMP)** : *a* est collectivement préf. ou indif. à *b*, s'il y a plus de critères supportant "*a* préf. ou indif. à *b*" que de critères supportant "*b* préf. ou indif. à *a*".
- Soit $\mathbf{X}$ la mat. rel. de la préférence collective R^*. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{ab} = 1 &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \mathbf{C}_{ba} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \check{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0\end{aligned}$$

  où $\check{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \check{\mathbf{R}}^k$.
- Mais la RMP conduit à des **effets Condorcet** ($\mathbf{X}$ non transitive).

Règles de Condorcet et ARM

- **Règle de la majorité par paire (RMP)** : *a* est collectivement préf. ou indif. à *b*, s'il y a plus de critères supportant "*a* préf. ou indif. à *b*" que de critères supportant "*b* préf. ou indif. à *a*".
- Soit **X** la mat. rel. de la préférence collective R^*. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{ab} = 1 &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \mathbf{C}_{ba} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \check{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0\end{aligned}$$

  où $\check{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \check{\mathbf{R}}^k$.
- Mais la RMP conduit à des **effets Condorcet** (**X** non transitive).
- **Règle de la majorité globale sous contraintes (RMGC)** : parmi toutes les relations d'ordre complet possible, choisir celle qui est la plus supportée par l'ensemble des critères.

Règles de Condorcet et ARM

- **Règle de la majorité par paire (RMP)** : *a* est collectivement préf. ou indif. à *b*, s'il y a plus de critères supportant "*a* préf. ou indif. à *b*" que de critères supportant "*b* préf. ou indif. à *a*".
- Soit **X** la mat. rel. de la préférence collective R^*. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ab} = 1 &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \mathbf{C}_{ba} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \check{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

  où $\check{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \check{\mathbf{R}}^k$.
- Mais la RMP conduit à des **effets Condorcet** (**X** non transitive).
- **Règle de la majorité globale sous contraintes (RMGC)** : parmi toutes les relations d'ordre complet possible, choisir celle qui est la plus supportée par l'ensemble des critères.
- La RMGC est un pb NP-complet. L'**ARM** donne une méthode de calcul exacte basée sur la **programmation linéaire en nombres binaires**.

Modèle ARM pour les ordres et préordres complets

- Agrégation de relations d'ordre et ordre complet de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}_{ab}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{m}\check{\mathbf{R}}_{ab}^{k}}^{\check{\mathbf{C}}_{ab}})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S}) \text{ s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} = 1 & \forall a \neq b & \text{(Antisymétrique, Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

Modèle ARM pour les ordres et préordres complets

- Agrégation de relations d'ordre et ordre complet de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}_{ab}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{m}\check{\mathbf{R}}_{ab}^{k}}^{\check{\mathbf{C}}_{ab}})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} = 1 & \forall a \neq b & \text{(Antisymétrique, Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

- La RMGC est formalisée en ARM par une **fonction linéaire** en $\mathbf{X}$:

$$\Delta_{\text{Cond.}}(\mathbf{C}, \check{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) = \sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \check{\mathbf{C}}_{ab}\right) \mathbf{X}_{ab}$$

Modèle ARM pour les ordres et préordres complets

- Agrégation de relations d'ordre et ordre complet de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}_{ab}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{m}\check{\mathbf{R}}_{ab}^{k}}^{\check{\mathbf{C}}_{ab}})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} = 1 & \forall a \neq b & \text{(Antisymétrique, Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

- La RMGC est formalisée en ARM par une **fonction linéaire** en $\mathbf{X}$:

$$\Delta_{\text{Cond.}}(\mathbf{C}, \check{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) = \sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \check{\mathbf{C}}_{ab}\right) \mathbf{X}_{ab}$$

- $\mathbf{X}$ doit vérifier des **contraintes linéaires** correspondant aux propriétés d'une relation d'ordre complet (réfl., antisym., transitive, complète).

ARM et aide multicritère à la décision par l'exemple

- Les matrices collectives donnent :

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad \check{\mathbf{C}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ARM et aide multicritère à la décision par l'exemple

- Les matrices collectives donnent :

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad \check{\mathbf{C}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

- La RMGC dans le cas d'un ordre complet de consensus donne :

$$\mathbf{C} - \check{\mathbf{C}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et donc, } \mathbf{X}^* = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cas de l'agrégation d'ordres complets - Théorie des votes

- Le **critère de Condorcet** (règle majoritaire globale sous contraintes) vérifie 4 des 5 axiomes du **théorème d'impossibilité d'Arrow** :
  - Universalité
  - Unanimité faible
  - Non dictature
  - Transitivité

Cas de l'agrégation d'ordres complets - Théorie des votes

- Le **critère de Condorcet** (règle majoritaire globale sous contraintes) vérifie 4 des 5 axiomes du **théorème d'impossibilité d'Arrow** :
  - Universalité
  - Unanimité faible
  - Non dictature
  - Transitivité
- Rappelons que la mat. rel. collective, **C**, est définie par :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{ab} = \text{Nb de RB supportant ``}a\text{ est préf. ou ind. à }b\text{''}$$

Cas de l'agrégation d'ordres complets - Théorie des votes

- Le **critère de Condorcet** (règle majoritaire globale sous contraintes) vérifie 4 des 5 axiomes du **théorème d'impossibilité d'Arrow** :
  - Universalité
  - Unanimité faible
  - Non dictature
  - Transitivité
- Rappelons que la mat. rel. collective, $\mathbf{C}$, est définie par :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{ab} = \text{Nb de RB supportant ``} a \text{ est préf. ou ind. à } b\text{''}$$

- Si les $\{R^j\}_{j=1,\dots,m}$ sont des ordres complets $\Delta_{\text{Cond.}}$ s'écrit :

$$\sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2}\right) \mathbf{X}_{ab}$$

où $\frac{m}{2}$ est la majorité simple.

Représentation numérique des ordres et préordres

- R est un ordre complet **ssi** il existe une fonction $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) \\ g(a) = g(b) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

On ne peut pas avoir d'ex-aequos entre deux éléments distincts.

Représentation numérique des ordres et préordres

- R est un ordre complet **ssi** il existe une fonction $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) \\ g(a) = g(b) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

  On ne peut pas avoir d'ex-aequos entre deux éléments distincts.

- Si R est un préordre complet **ssi** la fonction g est telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$$

  Si $g(a) = g(b)$ alors a et b sont indifférents (aI_Rb) et sont ex-aequos.

Représentation numérique des ordres et préordres

- R est un ordre complet **ssi** il existe une fonction $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) \\ g(a) = g(b) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

  On ne peut pas avoir d'ex-aequos entre deux éléments distincts.

- Si R est un préordre complet **ssi** la fonction g est telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$aRb \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$$

  Si $g(a) = g(b)$ alors a et b sont indifférents (aI_Rb) et sont ex-aequos.

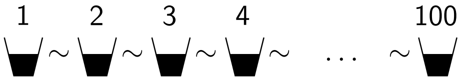
- Remarque : les fonctions g ne sont pas uniques.

Limites des ordres et préordres

- Relations d'ordre et de préordre sont des relations de préférences classiques mais elles sont restrictives et ne permettent pas de tenir compte de situations complexes.

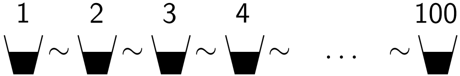
Limites des ordres et préordres

- Relations d'ordre et de préordre sont des relations de préférences classiques mais elles sont restrictives et ne permettent pas de tenir compte de situations complexes.
- Exemple : paradoxe des tasses de café de Luce,



Limites des ordres et préordres

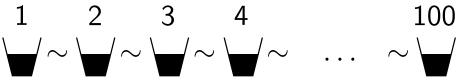
- Relations d'ordre et de préordre sont des relations de préférences classiques mais elles sont restrictives et ne permettent pas de tenir compte de situations complexes.
- Exemple : paradoxe des tasses de café de Luce,



- Autres paradoxes de ce type : Fechner, Poincaré...

Limites des ordres et préordres

- Relations d'ordre et de préordre sont des relations de préférences classiques mais elles sont restrictives et ne permettent pas de tenir compte de situations complexes.
- Exemple : paradoxe des tasses de café de Luce,



- Autres paradoxes de ce type : Fechner, Poincaré...
- Dans ces paradoxes, la relation d'indifférence I_R n'est pas transitive.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :
  - $aI_R b$ si les intervalles se chevauchent.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :
  - aI_Rb si les intervalles se chevauchent.
  - aP_Rb si les intervalles sont disjoints et si $l_a > u_b$.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :
  - aI_Rb si les intervalles se chevauchent.
  - aP_Rb si les intervalles sont disjoints et si $l_a > u_b$.
  - bP_Ra si les intervalles sont disjoints et si $l_b > u_a$.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :
  - aI_Rb si les intervalles se chevauchent.
  - aP_Rb si les intervalles sont disjoints et si $l_a > u_b$.
  - bP_Ra si les intervalles sont disjoints et si $l_b > u_a$.
- On distingue alors :
  - les **semi-ordres** si l'intervalle de tout a est de même longueur,
  - les **ordres d'intervalle** si les intervalles sont de longueurs différentes.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :
  - $aI_R b$ si les intervalles se chevauchent.
  - $aP_R b$ si les intervalles sont disjoints et si $l_a > u_b$.
  - $bP_R a$ si les intervalles sont disjoints et si $l_b > u_a$.
- On distingue alors :
  - les **semi-ordres** si l'intervalle de tout a est de même longueur,
  - les **ordres d'intervalle** si les intervalles sont de longueurs différentes.
- La longueur d'un intervalle peut-être associée à la notion de **seuil d'indifférence**.

Relations de préférence à seuil

- La représentation numérique des ordres et préordres reposent sur l'attribution d'un (unique) score à chaque $a \in \mathbb{A}$.
- Plus généralement, on peut attribuer un **intervalle** à chaque $a \in \mathbb{A}$!
- Notons $[l_a, u_a]$ et $[l_b, u_b]$ les intervalles de deux éléments a et b :
  - $aI_R b$ si les intervalles se chevauchent.
  - $aP_R b$ si les intervalles sont disjoints et si $l_a > u_b$.
  - $bP_R a$ si les intervalles sont disjoints et si $l_b > u_a$.
- On distingue alors :
  - les **semi-ordres** si l'intervalle de tout a est de même longueur,
  - les **ordres d'intervalle** si les intervalles sont de longueurs différentes.
- La longueur d'un intervalle peut-être associée à la notion de **seuil d'indifférence**.
- Ex. : $[l_a, u_a] = [l_a, l_a + q_a]$ où q_a est un seuil au-delà duquel, on n'est plus indifférent à a.

Représentation numérique des semi-ordres et ordres d'intervalle

- R est une relation de **semi-ordre** complet ssi il existe une fonction $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et une constante $q \geq 0$ (seuil de discrimination **fixe**) telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} aP_R b \Leftrightarrow \underbrace{g(a)}_{l_a} > \underbrace{g(b) + q}_{u_b} \\ aI_R b \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

Représentation numérique des semi-ordres et ordres d'intervalle

- R est une relation de **semi-ordre** complet ssi il existe une fonction $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ et une constante $q \geq 0$ (seuil de discrimination **fixe**) telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} aP_R b \Leftrightarrow \underbrace{g(a)}_{l_a} > \underbrace{g(b) + q}_{u_b} \\ aI_R b \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

- R est une relation d'**ordre d'intervalle** complet ssi il existe deux fonctions $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (seuil de discrimination **variable**) telles que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\begin{cases} aP_R b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ aI_R b \Leftrightarrow (g(a) \leq g(b) + q(g(b))) \wedge (g(b) \leq g(a) + q(g(a))) \end{cases}$$

Représentation numérique des semi-ordres et ordres d'intervalle

- R est une relation de **semi-ordre** complet ssi il existe une fonction $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et une constante $q \geq 0$ (seuil de discrimination **fixe**) telle que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

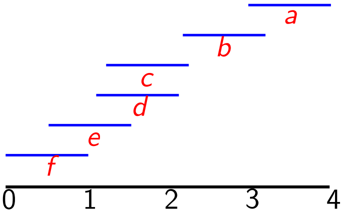
$$\begin{cases} aP_R b \Leftrightarrow \underbrace{g(a)}_{l_a} > \underbrace{g(b) + q}_{u_b} \\ aI_R b \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

- R est une relation d'**ordre d'intervalle** complet ssi il existe deux fonctions $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (seuil de discrimination **variable**) telles que, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

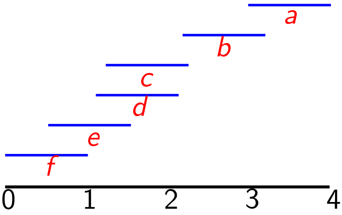
$$\begin{cases} aP_R b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ aI_R b \Leftrightarrow (g(a) \leq g(b) + q(g(b))) \wedge (g(b) \leq g(a) + q(g(a))) \end{cases}$$

- Remarque : g et q ne sont pas uniques.

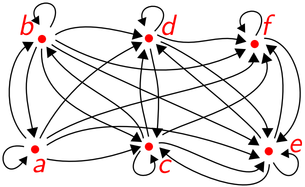
Exemple d'une relation de semi-ordre complet



Exemple d'une relation de semi-ordre complet



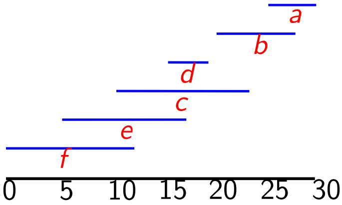
- Représentation graphique :



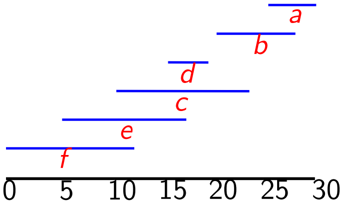
- Matrice relationnelle :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

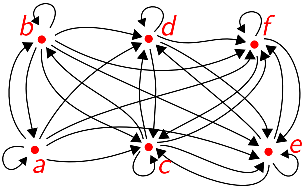
Exemple d'une relation d'ordre d'intervalle complet



Exemple d'une relation d'ordre d'intervalle complet



- Représentation graphique :



- Matrice relationnelle :

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
- Propriétés supplémentaires des préférences à seuil :

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
- Propriétés supplémentaires des préférences à seuil :
  - R est **semi-transitive** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRd \vee dRc))$.

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
- Propriétés supplémentaires des préférences à seuil :
  - R est **semi-transitive** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRd \vee dRc))$.
  - R est **de Ferrers** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge cRd) \Rightarrow (aRd \vee cRb))$.

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
- Propriétés supplémentaires des préférences à seuil :
  - R est **semi-transitive** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRd \vee dRc))$.
  - R est **de Ferrers** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge cRd) \Rightarrow (aRd \vee cRb))$.
- R est une **relation de semi-ordre (ou quasi-ordre) complet** ssi :
  - R est complète.
  - R est semi-transitive.
  - R est de Ferrers.

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
- Propriétés supplémentaires des préférences à seuil :
  - R est **semi-transitive** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRd \vee dRc))$.
  - R est **de Ferrers** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge cRd) \Rightarrow (aRd \vee cRb))$.
- R est une **relation de semi-ordre (ou quasi-ordre) complet** ssi :
  - R est complète.
  - R est semi-transitive.
  - R est de Ferrers.
- R est une **relation d'ordre d'intervalle complet** ssi :
  - R est complète.
  - R est de Ferrers.

Propriétés relationnelles

- Propriétés des préférences classiques :
  - R est **réflexive** ssi $\forall a\,(aRa)$.
  - R est **antisymétrique** ssi $\forall a, b\,((aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b)$.
    Ce qui est équivalent à $\forall a \neq b\,\left(aRb \Rightarrow b\overline{R}a\right)$.
  - R est **complète** (ou totale) ssi $\forall a \neq b\,(aRb \vee bRa)$.
  - R est **transitive** ssi $\forall a, b, c\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc)$.
- Propriétés supplémentaires des préférences à seuil :
  - R est **semi-transitive** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRd \vee dRc))$.
  - R est **de Ferrers** ssi $\forall a, b, c, d\,((aRb \wedge cRd) \Rightarrow (aRd \vee cRb))$.
- R est une **relation de semi-ordre (ou quasi-ordre) complet** ssi :
  - R est complète.
  - R est semi-transitive.
  - R est de Ferrers.
- R est une **relation d'ordre d'intervalle complet** ssi :
  - R est complète.
  - R est de Ferrers.

▷ Ces propriétés peuvent aussi être modélisées par contraintes linéaires !

Modèle ARM pour l'obtention d'un ordre d'intervalle de consensus

- Agrégation de relations d'ordre complet et semi-ordre de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}}-\frac{m}{2})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{ba}\geq 1 & \forall a,b \quad \text{(Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{bc}-\mathbf{X}_{ad}-\mathbf{X}_{dc}\leq 1 & \forall a,b,c,d \quad \text{(semi-transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{cd}-\mathbf{X}_{ad}-\mathbf{X}_{cb}\leq 1 & \forall a,b,c,d \quad \text{(de Ferrers)} \\ \mathbf{X}_{ab}\in\{0,1\} & \forall a,b \quad \text{(Binaire)} \end{cases}$$

Modèle ARM pour l'obtention d'un ordre d'intervalle de consensus

- Agrégation de relations d'ordre complet et semi-ordre de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}}-\frac{m}{2})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{ba}\geq 1 & \forall a,b & \text{(Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{bc}-\mathbf{X}_{ad}-\mathbf{X}_{dc}\leq 1 & \forall a,b,c,d & \text{(semi-transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{cd}-\mathbf{X}_{ad}-\mathbf{X}_{cb}\leq 1 & \forall a,b,c,d & \text{(de Ferrers)} \\ \mathbf{X}_{ab}\in\{0,1\} & \forall a,b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

- Pour un ordre d'intervalle de consensus, il suffit d'enlever les contraintes linéaires de semi-transitivité.

Différents types de préférences et contraintes linéaires

Ordre d'intervalle $\xrightarrow{\text{Si seuil constant}}$ Semi-ordre $\xrightarrow{\text{Si } I_R \text{ transitif}}$ Préordre complet $\xrightarrow{\text{Si pas d'ex-aequo}}$ Ordre complet

Différents types de préférences et contraintes linéaires

$$\text{Ordre d'intervalle} \xrightarrow{\text{Si seuil constant}} \text{Semi-ordre} \xrightarrow{\text{Si } I_R \text{ transitif}} \text{Préordre complet} \xrightarrow{\text{Si pas d'ex-aequo}} \text{Ordre complet}$$

Réflexive	$\mathbf{X}_{aa} = 1, \forall a$
Antisymétrique	$\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \leq 1,\ \forall a, b; a \neq b$
Complet	$\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \geq 1,\ \forall a, b$
Transitive	$\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1,\ \forall a, b, c$
Semi-transitive	$\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ad} - \mathbf{X}_{dc} \leq 1,\ \forall a, b, c, d$
de Ferrers	$\mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{cd} - \mathbf{X}_{ad} - \mathbf{X}_{cb} \leq 1,\ \forall a, b, c, d$

Exemple des sushis

- 5000 personnes donnent leurs avis (ordres complets -sans ex-aequos-) sur un ensemble de 10 sushis en indiquant parmi 10 ordres complets au choix celui qui correspond davantage à leurs préférences.

Exemple des sushis

- 5000 personnes donnent leurs avis (ordres complets -sans ex-aequos-) sur un ensemble de 10 sushis en indiquant parmi 10 ordres complets au choix celui qui correspond davantage à leurs préférences.
- $\mathbb{A}$: 1 ebi (shrimp), 2 anago (sea eel), 3 maguro (tuna), 4 ika (squid), 5 uni (sea urchin), 6 sake (salmon roe), 7 tamago (egg), 8 toro (fatty tuna), 9 tekka-maki (tuna roll), 10 kappa-maki (cucumber roll).

Exemple des sushis

- 5000 personnes donnent leurs avis (ordres complets -sans ex-aequos-) sur un ensemble de 10 sushis en indiquant parmi 10 ordres complets au choix celui qui correspond davantage à leurs préférences.
- $\mathbb{A}$: 1 ebi (shrimp), 2 anago (sea eel), 3 maguro (tuna), 4 ika (squid), 5 uni (sea urchin), 6 sake (salmon roe), 7 tamago (egg), 8 toro (fatty tuna), 9 tekka-maki (tuna roll), 10 kappa-maki (cucumber roll).

$$\mathbf{C}-\check{\mathbf{C}} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9\\ 10 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & -674 & 684 & 174 & -112 & 1846 & -2106 & 704 & 2516 & -248 \\
674 & 0 & 1742 & 650 & 424 & 2550 & -2364 & 2184 & 3620 & 630 \\
-684 & -1742 & 0 & -326 & -906 & 1184 & -2668 & -8 & 2630 & -1324 \\
-174 & -650 & 326 & 0 & -178 & 836 & -2136 & 246 & 1572 & -362 \\
112 & -424 & 906 & 178 & 0 & 1646 & -2010 & 878 & 2452 & 50 \\
-1846 & -2550 & -1184 & -836 & -1646 & 0 & -3146 & -1396 & 1560 & -2088 \\
2106 & 2364 & 2668 & 2136 & 2010 & 3146 & 0 & 3128 & 3754 & 2058 \\
-704 & -2184 & 8 & -246 & -878 & 1396 & -3128 & 0 & 3134 & -1090 \\
-2516 & -3620 & -2630 & -1572 & -2452 & -1560 & -3754 & -3134 & 0 & -3378 \\
248 & -630 & 1324 & 362 & -50 & 2088 & -2058 & 1090 & 3378 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple des sushis (suite)

- Modèle ARM pour déterminer un ordre d'intervalle de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}} - \frac{m}{2})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \geq 1 & \forall a, b \quad \text{(Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{cd} - \mathbf{X}_{ad} - \mathbf{X}_{cb} \leq 1 & \forall a, b, c, d \quad \text{(de Ferrers)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b \quad \text{(Binaire)} \end{cases}$$

Exemple des sushis (suite)

- Modèle ARM pour déterminer un ordre d'intervalle de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}} - \frac{m}{2})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{ba} \geq 1 & \forall a, b \quad \text{(Complet)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{cd} - \mathbf{X}_{ad} - \mathbf{X}_{cb} \leq 1 & \forall a, b, c, d \quad \text{(de Ferrers)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b \quad \text{(Binaire)} \end{cases}$$

- On obtient la solution optimale suivante :

$$\mathbf{X}^{*} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

  - La solution est un ordre complet : 7, 2, 5, 10, 1, 4, 8, 3, 6, 9.

Rappel du Sommaire

Modèle ARM pour l'obtention d'une partition de consensus

- Les $\{R^k\}_{k=1,\dots,m}$ et R sont des relations d'équivalences.
- aRb : "a est indifférent (ou équivalent) à b" pour R.

Modèle ARM pour l'obtention d'une partition de consensus

- Les $\{R^k\}_{k=1,\ldots,m}$ et R sont des relations d'équivalences.
- aRb : "a est indifférent (ou équivalent) à b" pour R.
- Le critère de Condorcet peut être étendu au problème d'agrégation de relations d'équivalence.

Modèle ARM pour l'obtention d'une partition de consensus

- Les $\{R^k\}_{k=1,\dots,m}$ et R sont des relations d'équivalences.
- aRb : "a est indifférent (ou équivalent) à b" pour R.
- Le critère de Condorcet peut être étendu au problème d'agrégation de relations d'équivalence.
- C'est un modèle pour le clustering de données qualitatives nominales qui a été redécouvert dans le cadre du correlation clustering.

Modèle ARM pour l'obtention d'une partition de consensus

- Les $\{R^k\}_{k=1,\dots,m}$ et R sont des relations d'équivalences.
- aRb : "a est indifférent (ou équivalent) à b" pour R.
- Le critère de Condorcet peut être étendu au problème d'agrégation de relations d'équivalence.
- C'est un modèle pour le clustering de données qualitatives nominales qui a été redécouvert dans le cadre du correlation clustering.
- L'ARM en mettant les RB au centre de l'analyse permet de faire un pont conceptuel entre le problème d'agrégation des préférences d'une part et le problème de classification automatique d'autre part.

ARM et classification automatique par l'exemple

Individus	Sexe	CSP	Diplôme	Age
a	H	Cadre	IUT	> 25
b	F	Cadre	Master	> 25
c	F	Prof. Lib.	Master	> 25
d	H	Employé	IUT	$<= 25$

ARM et classification automatique par l'exemple

Individus	Sexe	CSP	Diplôme	Age
a	H	Cadre	IUT	> 25
b	F	Cadre	Master	> 25
c	F	Prof. Lib.	Master	> 25
d	H	Employé	IUT	$<= 25$

- Chaque variable qualitative nominale infère une relation d'équivalence.

ARM et classification automatique par l'exemple

Individus	Sexe	CSP	Diplôme	Age
a	H	Cadre	IUT	> 25
b	F	Cadre	Master	> 25
c	F	Prof. Lib.	Master	> 25
d	H	Employé	IUT	$<= 25$

- Chaque variable qualitative nominale infère une relation d'équivalence.
- Les matrices relationnelles individuelles sont alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathrm{R}^1};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathrm{R}^2};\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathrm{R}^3};\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\mathrm{R}^4}$$

Matrice relationnelle collective

- Comme pour les ordres, l'ARM permet de surmonter le pb des échelles distinctes.

Matrice relationnelle collective

- Comme pour les ordres, l'ARM permet de surmonter le pb des échelles distinctes.
- Le procédé d'agrégation $\mathcal{A}$ est alors possible par simple somme des mat. rel. ind.. La **mat. rel. collective** est définie par :

$$\underbrace{\mathcal{A}(R^1, \ldots, R^4)}_{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{4} \mathbf{R}^k = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice relationnelle collective

- Comme pour les ordres, l'ARM permet de surmonter le pb des échelles distinctes.
- Le procédé d'agrégation $\mathcal{A}$ est alors possible par simple somme des mat. rel. ind.. La **mat. rel. collective** est définie par :

$$\underbrace{\mathcal{A}(R^1, \ldots, R^4)}_{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{4} \mathbf{R}^k = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Comptage de voix** (ex. : $\mathbf{C}_{bc} = 3$ critères supportant bRc).

Règles de Condorcet et ARM

- Contrairement aux ordres, nous prendrons le **complémentaire** $\overline{R}$ pour l'"**opposé**" de la relation R (et non l'inverse $\check{R}$).

Règles de Condorcet et ARM

- Contrairement aux ordres, nous prendrons le **complémentaire** $\overline{R}$ pour l'"**opposé**" de la relation R (et non l'inverse $\check{R}$).
- La RMP s'interprète alors comme suit : a est collectivement équivalent à b s'il y a plus de critères supportant "a equiv. à b" que de critères supportant "a n'est pas équiv. à a".

Règles de Condorcet et ARM

- Contrairement aux ordres, nous prendrons le **complémentaire** $\overline{R}$ pour l'"**opposé**" de la relation R (et non l'inverse $\check{R}$).
- La RMP s'interprète alors comme suit : a est collectivement équivalent à b s'il y a plus de critères supportant "a equiv. à b" que de critères supportant "a n'est pas équiv. à a".
- Soit $\mathbf{X}$ la mat. rel. de la rel. d'équiv. collective R^*. On a alors :

$$\mathbf{X}_{ab} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \overline{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0$$

où $\overline{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\mathbf{R}}^k$.

Règles de Condorcet et ARM

- Contrairement aux ordres, nous prendrons le **complémentaire** $\overline{R}$ pour l'"**opposé**" de la relation R (et non l'inverse $\check{R}$).
- La RMP s'interprète alors comme suit : a est collectivement équivalent à b s'il y a plus de critères supportant "a equiv. à b" que de critères supportant "a n'est pas équiv. à a".
- Soit $\mathbf{X}$ la mat. rel. de la rel. d'équiv. collective R^*. On a alors :

$$\mathbf{X}_{ab} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \overline{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0$$

  où $\overline{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\mathbf{R}}^k$.
- La RMP conduit à nouveau à des **effets Condorcet** ($\mathbf{X}$ non transitive) et dans ce cas on utilise la RMGC : on contraint la solution $\mathbf{X}$ d'être une relation d'équivalence.

Règles de Condorcet et ARM

- Contrairement aux ordres, nous prendrons le **complémentaire** $\overline{R}$ pour l'"**opposé**" de la relation R (et non l'inverse $\check{R}$).
- La RMP s'interprète alors comme suit : a est collectivement équivalent à b s'il y a plus de critères supportant "a equiv. à b" que de critères supportant "a n'est pas équiv. à a".
- Soit $\mathbf{X}$ la mat. rel. de la rel. d'équiv. collective R^*. On a alors :

$$\mathbf{X}_{ab} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}_{ab} - \overline{\mathbf{C}}_{ab} \geq 0$$

où $\overline{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\mathbf{R}}^k$.

- La RMP conduit à nouveau à des **effets Condorcet** ($\mathbf{X}$ non transitive) et dans ce cas on utilise la RMGC : on contraint la solution $\mathbf{X}$ d'être une relation d'équivalence.
- C'est aussi un pb NP-complet et l'**ARM** donne une méthode de calcul exacte basée sur la **programmation linéaire en nombres binaires**.

Modèle ARM pour les relations d'équivalence

- Agrégation de rel. d'equiv. et rel. d'equiv. de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}_{ab}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{m}\overline{\mathbf{R}}_{ab}^{k}}^{\overline{\mathbf{C}}_{ab}})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} - \mathbf{X}_{ba} = 0 & \forall a \neq b & \text{(Symétrique)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

Modèle ARM pour les relations d'équivalence

- Agrégation de rel. d'equiv. et rel. d'equiv. de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}_{ab}^{k}}^{\mathbf{C}_{ab}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{m} \overline{\mathbf{R}}_{ab}^{k}}^{\overline{\mathbf{C}}_{ab}})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S}) \text{ s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} - \mathbf{X}_{ba} = 0 & \forall a \neq b & \text{(Symétrique)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

- La RMGC est formalisée en ARM par une **fonction linéaire** en $\mathbf{X}$:

$$\Delta_{\text{Cond.}}(\mathbf{C}, \overline{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) = \sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \overline{\mathbf{C}}_{ab}\right) \mathbf{X}_{ab}$$

Modèle ARM pour les relations d'équivalence

- Agrégation de rel. d'equiv. et rel. d'equiv. de consensus :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \underbrace{\sum_{a,b=1}^{n}(\overbrace{\sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{ab}}^{\mathbf{C}_{ab}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{m} \overline{\mathbf{R}}^k_{ab}}^{\overline{\mathbf{C}}_{ab}})\mathbf{X}_{ab}}_{\Delta_{\text{Cond.}}}$$

$$(\mathbb{S}) \text{ s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} - \mathbf{X}_{ba} = 0 & \forall a \neq b & \text{(Symétrique)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

- La RMGC est formalisée en ARM par une **fonction linéaire** en $\mathbf{X}$:

$$\Delta_{\text{Cond.}}(\mathbf{C}, \overline{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) = \sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \overline{\mathbf{C}}_{ab}\right) \mathbf{X}_{ab}$$

- $\mathbf{X}$ doit vérifier des **contraintes linéaires** correspondant aux propriétés d'une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

ARM et classification automatique par l'exemple

- Les matrices collectives donnent :

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ARM et classification automatique par l'exemple

- Les matrices collectives donnent :

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad ; \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- La RMGC dans le cas d'une rel. d'équiv. de consensus donne :

$$\mathbf{C} - \overline{\mathbf{C}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et donc, } \mathbf{X}^* = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cas de l'agrégation de variables qualitatives nominales "complètes" - Théorie des votes

Cas de l'agrégation de variables qualitatives nominales "complètes" - Théorie des votes

- Rappelons que la mat. rel. collective, **C**, est définie par :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{ab} = \text{Nb de RB supportant "}a\text{ est équivalent à }b\text{"}$$

Cas de l'agrégation de variables qualitatives nominales "complètes" - Théorie des votes

- Rappelons que la mat. rel. collective, $\mathbf{C}$, est définie par :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{ab} = \text{Nb de RB supportant "}a \text{ est équivalent à } b\text{"}$$

- S'il n'y a **pas de données manquantes** parmi les variables qualitatives nominales, $\Delta_{\text{Cond.}}$ s'écrit :

$$\sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2}\right) \mathbf{X}_{ab}$$

où $\frac{m}{2}$ est la majorité simple.

Cas de l'agrégation de variables qualitatives nominales "complètes" - Théorie des votes

- Rappelons que la mat. rel. collective, $\mathbf{C}$, est définie par :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}_{ab}^{k} = \text{Nb de RB supportant "}a \text{ est équivalent à } b\text{"}$$

- S'il n'y a **pas de données manquantes** parmi les variables qualitatives nominales, $\Delta_{\text{Cond.}}$ s'écrit :

$$\sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2} \right) \mathbf{X}_{ab}$$

  où $\frac{m}{2}$ est la majorité simple.
- On retrouve une interprétation de type vote du critère de Condorcet pour le pb de classification automatique de données qualitatives.

Cas de l'agrégation de variables qualitatives nominales "complètes" - Théorie des votes

- Rappelons que la mat. rel. collective, $\mathbf{C}$, est définie par :

$$\mathbf{C}_{ab} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{ab} = \text{Nb de RB supportant "}a\text{ est équivalent à }b\text{"}$$

- S'il n'y a **pas de données manquantes** parmi les variables qualitatives nominales, $\Delta_{\text{Cond.}}$ s'écrit :

$$\sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2} \right) \mathbf{X}_{ab}$$

  où $\frac{m}{2}$ est la majorité simple.
- On retrouve une interprétation de type vote du critère de Condorcet pour le pb de classification automatique de données qualitatives.
- Remarque importante : **en ARM on ne fixe pas le nb de clusters !**

Exemple des canidés

- 27 races de chien sont comparées selon 7 variables qualitatives nominales.
- $\mathbb{A}$: Beauceron, Basset, Berger All., Boxer, Bull-Dog, Bull-Mast., Caniche, Chihuahua, Cocker, Colley, Dalmatien, Dobermann, Dogue All., Epagneul Br., Epagneul Fr., Fox-Hound, Fox-Terrier, Gd Bleu de Gasc., Labrador, Lévrier, Mastiff, Pékinois, Pointer, St-Bernard, Setter, Teckel, Terre-Neuve.
- $\mathbb{B}$: taille, poids, vélocité, intelligence, affection, agressivité et fonction.

Exemple des canidés (suite)

- Modèle ARM pour les relation d'équivalence avec $\Delta_{\text{Cond.}}$:

$$
\begin{array}{rcll}
\text{maximiser} & : & \sum_{a,b=1}^{n}\left(\mathbf{C}_{ab}-\frac{m}{2}\right)\mathbf{X}_{ab} & \\
(\mathbb{S})\ \text{s.l.c} & : & \begin{cases}
\mathbf{X}_{aa}=1 & \forall a & \text{(Réflexive)}\\
\mathbf{X}_{ab}-\mathbf{X}_{ba}=0 & \forall a,b & \text{(Symétrique)}\\
\mathbf{X}_{ab}+\mathbf{X}_{bc}-\mathbf{X}_{ac}\leq 1 & \forall a,b,c & \text{(Transitive)}\\
\mathbf{X}_{ab}\in\{0,1\} & \forall a,b & \text{(Binaire)}
\end{cases} &
\end{array}
$$

Exemple des canidés (suite)

- Modèle ARM pour les relation d'équivalence avec $\Delta_{\text{Cond.}}$:

$$\text{maximiser} \quad : \quad \sum_{a,b=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{ab} - \frac{m}{2} \right) \mathbf{X}_{ab}$$

$$(\mathbb{S}) \text{ s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \mathbf{X}_{aa} = 1 & \forall a & \text{(Réflexive)} \\ \mathbf{X}_{ab} - \mathbf{X}_{ba} = 0 & \forall a, b & \text{(Symétrique)} \\ \mathbf{X}_{ab} + \mathbf{X}_{bc} - \mathbf{X}_{ac} \leq 1 & \forall a, b, c & \text{(Transitive)} \\ \mathbf{X}_{ab} \in \{0, 1\} & \forall a, b & \text{(Binaire)} \end{cases}$$

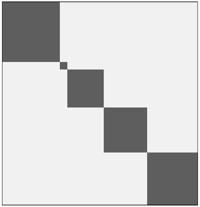
A Beauceron, Berger All., Bull-Mast., Dobermann, Dogue All., Mastiff, St-Bernard, Terre-Neuve ;

B Basset ;

C Boxer, Colley, Dalmatien, Epagneul Br., Labrador ;

D Epagneul Fr., Fox-Hound, Gd Bleu de Gasc., Lévrier, Pointer, Setter ;

E Bull-Dog, Caniche, Chihuahua, Cocker, Fox-Terrier, Pékinois, Teckel.



Rappel du Sommaire

Relations binaires sur deux ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

- Soient $\mathbb{A} = \{a, b, \ldots\}$ et $\mathbb{B} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ deux ensembles.
- Supposons que $|\mathbb{A}| = n$ et $|\mathbb{B}| = p$.

Relations binaires sur deux ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

- Soient $\mathbb{A} = \{a, b, \ldots\}$ et $\mathbb{B} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ deux ensembles.
- Supposons que $|\mathbb{A}| = n$ et $|\mathbb{B}| = p$.
- Une relation binaire R de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.

Relations binaires sur deux ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

- Soient $\mathbb{A} = \{a, b, \ldots\}$ et $\mathbb{B} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ deux ensembles.
- Supposons que $|\mathbb{A}| = n$ et $|\mathbb{B}| = p$.
- Une relation binaire R de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.
- R peut être représentée par un **graphe** orienté. Celui-ci est **biparti**.

Relations binaires sur deux ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

- Soient $\mathbb{A} = \{a, b, \ldots\}$ et $\mathbb{B} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ deux ensembles.
- Supposons que $|\mathbb{A}| = n$ et $|\mathbb{B}| = p$.
- Une relation binaire R de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.
- R peut être représentée par un **graphe** orienté. Celui-ci est **biparti**.
- R peut être représentée par une **matrice relationnelle** de taille $n \times p$:

$$\mathbf{R}_{a\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } aR\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \ \forall (a, \alpha) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

Relations binaires sur deux ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

- Soient $\mathbb{A} = \{a, b, \ldots\}$ et $\mathbb{B} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ deux ensembles.
- Supposons que $|\mathbb{A}| = n$ et $|\mathbb{B}| = p$.
- Une relation binaire R de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.
- R peut être représentée par un **graphe** orienté. Celui-ci est **biparti**.
- R peut être représentée par une **matrice relationnelle** de taille $n \times p$:

$$\mathbf{R}_{a\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } aR\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \forall (a, \alpha) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

- La **relation complémentaire** de R est notée $\overline{R}$ et définie par :

$$\forall a, \forall \alpha (a\overline{R}\alpha \Leftrightarrow \neg(aR\alpha))$$

  On a $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{1} - \mathbf{R}$.

Propriétés relationnelles

- R peut vérifier les propriétés suivantes :
  - **Existence (à gauche)** : $\forall a\,(\exists\alpha(aR\alpha))$.

Propriétés relationnelles

- R peut vérifier les propriétés suivantes :
  - **Existence (à gauche)** : $\forall a \, (\exists \alpha (aR\alpha))$.
  - **Unicité** : $\forall \alpha, \beta, \forall a \, ((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha = \beta)$.

Propriétés relationnelles

- R peut vérifier les propriétés suivantes :
  - **Existence (à gauche)** : $\forall a\,(\exists \alpha(aR\alpha))$.
  - **Unicité** : $\forall \alpha, \beta, \forall a\,((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha = \beta)$.
  - **Surjective** : $\forall \alpha\,(\exists a(aR\alpha))$ (existence à droite).

Propriétés relationnelles

- R peut vérifier les propriétés suivantes :
  - **Existence (à gauche)** : $\forall a\,(\exists \alpha (aR\alpha))$.
  - **Unicité** : $\forall \alpha, \beta, \forall a\,((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha = \beta)$.
  - **Surjective** : $\forall \alpha\,(\exists a (aR\alpha))$ (existence à droite).
  - **Injective** : $\forall a, b, \forall \alpha\,((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a = b)$.

Propriétés relationnelles

- R peut vérifier les propriétés suivantes :
  - **Existence (à gauche)** : $\forall a \left(\exists \alpha (aR\alpha)\right)$.
  - **Unicité** : $\forall \alpha, \beta, \forall a \left((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha = \beta\right)$.
  - **Surjective** : $\forall \alpha \left(\exists a (aR\alpha)\right)$ (existence à droite).
  - **Injective** : $\forall a, b, \forall \alpha \left((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a = b\right)$.

- Différents types de relations :
  - R est une **fonction** si elle vérifie l'existence (à gauche) et l'unicité,
  - R est une **surjection** si c'est une fonction surjective,
  - R est une **injection** si c'est une fonction injective,
  - R est une **bijection** si c'est une fonction surjective et injective.

Identité et indiscernabilité

- Le symbole $=$ représente la relation identité.
- $a = b$: "a et b sont le même et unique élément".

Identité et indiscernabilité

- Le symbole $=$ représente la relation identité.
- $a = b$: "a et b sont le même et unique élément".
- Nous introduisons le symbole $\sim$ qui indique la **relation d'indiscernabilité** de Leibniz.

Identité et indiscernabilité

- Le symbole $=$ représente la relation identité.
- $a = b$: "a et b sont le même et unique élément".
- Nous introduisons le symbole $\sim$ qui indique la **relation d'indiscernabilité** de Leibniz.
- $a \sim b$: "a est indiscernable de b", est définie comme suit :

$$a \sim b \Leftrightarrow \forall \alpha (aR\alpha \Leftrightarrow bR\alpha)$$

Identité et indiscernabilité

- Le symbole $=$ représente la relation identité.
- $a = b$: "a et b sont le même et unique élément".
- Nous introduisons le symbole $\sim$ qui indique la **relation d'indiscernabilité** de Leibniz.
- $a \sim b$: "a est indiscernable de b", est définie comme suit :

$$a \sim b \Leftrightarrow \forall \alpha (aR\alpha \Leftrightarrow bR\alpha)$$

- Autrement dit, a et b sont indiscernables ssi ils ont exactement le même profil vis à vis de tout élément α de $\mathbb{B}$.

Identité et indiscernabilité

- Le symbole $=$ représente la relation identité.
- $a = b$: "a et b sont le même et unique élément".
- Nous introduisons le symbole $\sim$ qui indique la **relation d'indiscernabilité** de Leibniz.
- $a \sim b$: "a est indiscernable de b", est définie comme suit :

$$a \sim b \Leftrightarrow \forall \alpha (aR\alpha \Leftrightarrow bR\alpha)$$

- Autrement dit, a et b sont indiscernables ssi ils ont exactement le même profil vis à vis de tout élément α de $\mathbb{B}$.
- Il est admis que $a = b \Rightarrow a \sim b$ (indiscerna. des identiques) mais la réciproque, $a \sim b \Rightarrow a = b$ (identité des indiscerna.), l'est bcp moins.

Identité et indiscernabilité

- Le symbole $=$ représente la relation identité.
- $a = b$: "a et b sont le même et unique élément".
- Nous introduisons le symbole $\sim$ qui indique la **relation d'indiscernabilité** de Leibniz.
- $a \sim b$: "a est indiscernable de b", est définie comme suit :

$$a \sim b \Leftrightarrow \forall \alpha (aR\alpha \Leftrightarrow bR\alpha)$$

- Autrement dit, a et b sont indiscernables ssi ils ont exactement le même profil vis à vis de tout élément α de $\mathbb{B}$.
- Il est admis que $a = b \Rightarrow a \sim b$ (indiscerna. des identiques) mais la réciproque, $a \sim b \Rightarrow a = b$ (identité des indiscerna.), l'est bcp moins.
- Nous étendons les propriétés relationnelles utilisant la relation identité en remplaçant cette dernière par la relation d'indiscernabilité.

Propriétés relationnelles

- Rappel des propriétés rel. avec la relation d'identité $=$:
  - Unicité ($=$) : $\forall \alpha, \beta, \forall a\,((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha{=}\beta)$.
  - Injective ($=$) : $\forall a, b, \forall \alpha\,((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a{=}b)$.

Propriétés relationnelles

- Rappel des propriétés rel. avec la relation d'identité $=$:
  - Unicité $(=)$: $\forall \alpha, \beta, \forall a \, ((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha{=}\beta)$.
  - Injective $(=)$: $\forall a, b, \forall \alpha \, ((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a{=}b)$.
- Propriétés rel. avec la relation d'indiscernabilité $\sim$:
  - Unicité $(\sim)$: $\forall \alpha, \beta, \forall a \, ((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha \sim \beta)$.
  - Injective $(\sim)$: $\forall a, b, \forall \alpha \, ((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a \sim b)$.

Propriétés relationnelles

- Rappel des propriétés rel. avec la relation d'identité $=$:
  - Unicité $(=)$: $\forall \alpha, \beta, \forall a\,((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha{=}\beta)$.
  - Injective $(=)$: $\forall a, b, \forall \alpha\,((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a{=}b)$.
- Propriétés rel. avec la relation d'indiscernabilité $\sim$:
  - Unicité $(\sim)$: $\forall \alpha, \beta, \forall a\,((aR\alpha \wedge aR\beta) \Rightarrow \alpha \sim \beta)$.
  - Injective $(\sim)$: $\forall a, b, \forall \alpha\,((aR\alpha \wedge bR\alpha) \Rightarrow a \sim b)$.
- Nous introduisons alors plusieurs types de bijections :
  - Bijection $(=,=)$: existence, unicité $(=)$, surjective, injective $(=)$.
  - Bijection $(=,\sim)$: existence, unicité $(=)$, surjective, injective $(\sim)$.
  - Bijection $(\sim,=)$: existence, unicité $(\sim)$, surjective, injective $(=)$.
  - Bijection $(\sim,\sim)$: existence, unicité $(\sim)$, surjective, injective $(\sim)$.

Rappel du Sommaire

Contraintes linéaires associées aux propriétés rel.

- Soit $\mathbf{R}$ la matrice relationnelle de R une RB de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$.

Existence	$\sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall a$
Unicité (=)	$\sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \leq 1,\ \forall a$
Surjective	$\sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha$
Injective (=)	$\sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \leq 1,\ \forall \alpha$
Bijection (=,=)	$\begin{cases} \sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall a \\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall \alpha \end{cases}$

Contraintes linéaires associées aux propriétés rel.

- Soit $\mathbf{R}$ la matrice relationnelle de R une RB de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$.

Existence	$\sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall a$
Unicité (=)	$\sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \leq 1,\ \forall a$
Surjective	$\sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha$
Injective (=)	$\sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \leq 1,\ \forall \alpha$
Bijection (=,=)	$\begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall \alpha \end{cases}$

- Avec la relation $\sim$ nous avons d'une part :

$$\text{Unicité } (\sim) \quad \begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases}, \ \forall \alpha, \beta, \forall a, b$$

Contraintes linéaires associées aux propriétés rel.

- Soit $\mathbf{R}$ la matrice relationnelle de R une RB de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$.

Existence	$\sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall a$
Unicité (=)	$\sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \leq 1, \ \forall a$
Surjective	$\sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall \alpha$
Injective (=)	$\sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \leq 1, \ \forall \alpha$
Bijection (=,=)	$\begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall \alpha \end{cases}$

- Avec la relation $\sim$ nous avons d'une part :

Unicité ($\sim$)	$\begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases}, \ \forall \alpha, \beta, \forall a, b$
Injective ($\sim$)	$\begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases}, \ \forall a, b, \forall \alpha, \beta$

Contraintes linéaires associées aux propriétés rel.

- ...et d'autre part :

Bijection (=,∼)
$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall a \\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha \\ \left\{\begin{array}{l} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{array}\right. , \forall a, b, \forall \alpha, \beta \end{array}\right.$$

Contraintes linéaires associées aux propriétés rel.

- ...et d'autre part :

$$\text{Bijection } (=,\sim) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall \alpha \\ \begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases}, \ \forall a, b, \forall \alpha, \beta \end{cases}$$

$$\text{Bijection } (\sim,=) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall \alpha \\ \begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases}, \ \forall \alpha, \beta, \forall a, b \end{cases}$$

Contraintes linéaires associées aux propriétés rel.

- ...et d'autre part :

Bijection (=,∼)
$$\begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall \alpha \\ \begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases} , \ \forall a, b, \forall \alpha, \beta \end{cases}$$

Bijection (∼,=)
$$\begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall \alpha \\ \begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases} , \ \forall \alpha, \beta, \forall a, b \end{cases}$$

Bijection (∼,∼)
$$\begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall \alpha \\ \begin{cases} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{cases} , \ \forall a, b, \forall \alpha, \beta \end{cases}$$

Illustrations

- Bijection (=,∼) :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall a \\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha \\ \left\{\begin{array}{l} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{array}\right. \\ \forall a, b, \forall \alpha, \beta \end{array}\right. , \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Illustrations

- Bijection (=,∼) :
$$\begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1, \ \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1, \ \forall \alpha \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Pour Bijection (=,∼) : $|\mathbb{A}| \geq |\mathbb{B}|$ nécessairement, et la contrainte injective (∼) est superflue, Bijection (=,∼) = surjection.

Illustrations

- Bijection (=,∼) :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall a \\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Pour Bijection (=,∼) : $|\mathbb{A}| \geq |\mathbb{B}|$ nécessairement, et la contrainte injective (∼) est superflue, Bijection (=,∼) = surjection.
- Bijection (∼,∼) :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall a \\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha \\ \left\{\begin{array}{l} \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{R}_{a\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2 \end{array}\right., \\ \forall a, b, \forall \alpha, \beta \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \eta \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Illustrations

- Bijection (=,∼) :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} = 1,\ \forall a\\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \gamma\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\\e\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

- Pour Bijection (=,∼) : $|\mathbb{A}| \geq |\mathbb{B}|$ nécessairement, et la contrainte injective (∼) est superflue, Bijection (=,∼) = surjection.
- Bijection (∼,∼) :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{\alpha\in\mathbb{B}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall a\\ \sum_{a\in\mathbb{A}} \mathbf{R}_{a\alpha} \geq 1,\ \forall \alpha\\ \left\{\begin{array}{l}\mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} - \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2\\ \mathbf{R}_{a\alpha} + \mathbf{R}_{a\beta} - \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2\\ \mathbf{R}_{a\alpha} - \mathbf{R}_{a\beta} + \mathbf{R}_{b\alpha} + \mathbf{R}_{b\beta} \leq 2\end{array}\right. ,\\ \forall a, b, \forall \alpha, \beta\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta & \eta\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

- Ces contraintes sont également appelées : “triade impossible”.

Applications

- Ces différents bijections sont les RB sous-jacentes aux pbs suivants :
  - Bijection $(=,=)$:
    - Problèmes d'affection an RO,
    - $|\mathbb{A}| = |\mathbb{B}|$.
    - Chaque élément de $\mathbb{A}$ est affecté à un seul élément de $\mathbb{B}$.

Applications

- Ces différents bijections sont les RB sous-jacentes aux pbs suivants :
  - Bijection $(=,=)$:
    - Problèmes d'affection an RO,
    - $|\mathbb{A}| = |\mathbb{B}|$.
    - Chaque élément de $\mathbb{A}$ est affecté à un seul élément de $\mathbb{B}$.
  - Bijection $(=,\sim)$ (surjection) :
    - Problèmes de clustering,
    - $\mathbb{A}$: ensemble des observations et $\mathbb{B}$: ensemble des clusters,
    - $|\mathbb{A}| \geq |\mathbb{B}|$,
    - Chaque observation de $\mathbb{A}$ est affectée à un seul cluster de $\mathbb{B}$.

Applications

- Ces différents bijections sont les RB sous-jacentes aux pbs suivants :
  - Bijection $(=,=)$:
    - Problèmes d'affection an RO,
    - $|\mathbb{A}| = |\mathbb{B}|$.
    - Chaque élément de $\mathbb{A}$ est affecté à un seul élément de $\mathbb{B}$.
  - Bijection $(=,\sim)$ (surjection) :
    - Problèmes de clustering,
    - $\mathbb{A}$: ensemble des observations et $\mathbb{B}$: ensemble des clusters,
    - $|\mathbb{A}| \geq |\mathbb{B}|$,
    - Chaque observation de $\mathbb{A}$ est affectée à un seul cluster de $\mathbb{B}$.
  - Bijection $(\sim,\sim)$:
    - Problèmes de co-clustering,
    - $|\mathbb{A}|$: ensemble des observations et $\mathbb{B}$: ensemble des variables,
    - Chaque observation de $\mathbb{A}$ et chaque variable de $\mathbb{B}$ sont affectés à un seul co-cluster.

Cas du co-clustering d'un tableau disjonctive complet

- Soit **K** le tableau disjonctif d'un ensemble de n observations décrites par q variables regroupant au total p modalités.

Cas du co-clustering d'un tableau disjonctive complet

- Soit **K** le tableau disjonctif d'un ensemble de n observations décrites par q variables regroupant au total p modalités.
- Le co-clustering (ou sériation ou classif. croisée) de **K** consiste à détecter automatiquement des groupes formés chacun d'un cluster d'observations et d'un cluster de modalités.

Cas du co-clustering d'un tableau disjonctive complet

- Soit **K** le tableau disjonctif d'un ensemble de n observations décrites par q variables regroupant au total p modalités.
- Le co-clustering (ou sériation ou classif. croisée) de **K** consiste à détecter automatiquement des groupes formés chacun d'un cluster d'observations et d'un cluster de modalités.
- Modèle ARM pour ce problème de co-clustering :

$$\text{maximiser} \quad : \quad \sum_{a=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\mathbf{K}_{a\alpha} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{X}_{a\alpha}$$

$$(\mathbb{S}) \text{ s.l.c} \quad : \quad \begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}} \mathbf{X}_{a\alpha} \geq 1 & \forall a \\ \sum_{a \in \mathbb{A}} \mathbf{X}_{a\alpha} \geq 1 & \forall \alpha \\ \begin{cases} \mathbf{X}_{a\alpha} + \mathbf{X}_{a\beta} + \mathbf{X}_{b\alpha} - \mathbf{X}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{X}_{a\alpha} + \mathbf{X}_{a\beta} - \mathbf{X}_{b\alpha} + \mathbf{X}_{b\beta} \leq 2 \\ \mathbf{X}_{a\alpha} - \mathbf{X}_{a\beta} + \mathbf{X}_{b\alpha} + \mathbf{X}_{b\beta} \leq 2 \end{cases} & \forall a, b, \forall \alpha, \beta \\ \mathbf{X}_{a\alpha} \in \{0, 1\} & \forall a, \forall \alpha \end{cases}$$

Exemple des canidés

- Résultat du modèle précédent sur l'exemple des canidés :

a Bull-Mast., Mastiff, St-Bernard, Terre-Neuve | Taille++, Poids++, Vélocité-, Affection-, Utilité ;

b Caniche | Vélocité+, Intelligence++ ;

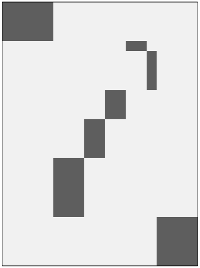
c Beauceron, Berger All., Colley, Dobermann | Vélocité++ ;

d Boxer, Cocker, Dalmatien | Taille+, Intelligence+ ;

e Basset, Dogue All., Fox-Hound, Gd Bleu de Gasc. | Intelligence-, Agressivité+ ;

f Epagneul Br., Epagneul Fr., Labrador, Lévrier, Pointer, Setter | Poids+, Agressivité-, Chasse ;

g Bull-Dog, Chihuahua, Fox-Terrier, Pékinois, Teckel. | Taille-, Poids-, Affection+, Compagnie.



Merci de votre attention !

Des questions ?