Régression logistique

Julien JACQUES

07/01/2020

Régression logistique

Régression logistique binaire

On cherche à expliquer :

$$Y = (y_1, \ldots, y_n)^t \qquad \text{où } y_i \in \{0, 1\}$$

à partir de p variables explicatives, que l'on supposera quantitatives :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix}$$

Régression logistique binaire

On souhaiterait effectuer des prédictions à l'aide d'un modèle linéaire que l'on maitrise bien :

$$\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}$$

Or ce modèle n'est pas adapté à $Y \in \{0, 1\}$.

Régression logistique binaire

On souhaiterait effectuer des prédictions à l'aide d'un modèle linéaire que l'on maitrise bien :

$$\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}$$

Or ce modèle n'est pas adapté à $Y \in \{0, 1\}$. Plutôt que de prédire Y, on va chercher à prédire la probabilité que $Y = 1$, où plus exactement :

$$logit(\pi(x)) = \ln \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}$$

où

$$\pi(x) = P(Y = 1 | X = x)$$

qui prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$ est pour lequel le modèle linéaire est bien adapté

Régression logistique binaire

Le modèle de régression logistique binaire s'écrit

$$logit(\pi(x)) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j.$$

ou encore

$$\pi(x) = \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j\right)}{1 + \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j\right)}.$$

Odds-Ratio

On définit

$$\text{odds}(x) = \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}$$

qui représente le rapport entre la probabilité d'avoir $Y = 1$ sur la probabilité d'avoir $Y = 0$ lorsque $X = x$.

On définit également

$$\text{odds-ratio}(x^1, x^2) = \frac{\text{odds}(x^1)}{\text{odds}(x^2)}$$

qui représente combien de fois on a plus de chance d'avoir $Y = 1$ au lieu d'avoir $Y = 0$ lorsque $X = x^1$ au lieu de $X = x^2$.

Les **odds-ratio permettent de quantifier l'impact des variables explicatives**.

Sélection de variables

Comme en régression linéaire :

- des tests de significativité des variables sont disponibles ($H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$). On supprimera les variables non significatives.
- des algorithmes de sélection de variables sont disponibles

Régression logistique sous R

```
reglog=glm((Species=="versicolor")~.,data=iris,family=binomial)
summary(reglog)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = (Species == "versicolor") ~ ., family = binomia
##     data = iris)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.1280  -0.7668  -0.3818   0.7866   2.1202
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)    7.3785     2.4993   2.952 0.003155 **
## Sepal.Length  -0.2454     0.6496  -0.378 0.705634
## Sepal.Width   -2.7966     0.7835  -3.569 0.000358 ***
## Petal.Length   1.3136     0.6838   1.921 0.054713 .
## Petal.Width   -2.7783     1.1731  -2.368 0.017868 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '
```

Régression logistique sous R

Effectuons une sélection de variables

```r
library(MASS)
reglog2=stepAIC(reglog,trace = F)
summary(reglog2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = (Species == "versicolor") ~ Sepal.Width + Petal
##     Petal.Width, family = binomial, data = iris)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.1262  -0.7731  -0.3984   0.8063   2.1562
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)    6.9506     2.2261   3.122  0.00179 **
## Sepal.Width   -2.9565     0.6668  -4.434 9.26e-06 ***
## Petal.Length   1.1252     0.4619   2.436  0.01484 *
## Petal.Width   -2.6148     1.0815  -2.418  0.01562 *
```

Classification multi-classe : rég. log. polytomique

Cette fois $y_i \in \{1, \ldots, K\}$.

Dans cette situation, on se fixe une modalité de référence ($Y = K$ par exemple), et on réalise $K-1$ régressions logistiques de $\pi_k(x)$ versus $\pi_K(x)$:

$$\ln \frac{\pi_k(x)}{\pi_K(x)} = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{jk} x_j \qquad \forall 1 \leq k \leq K-1.$$

Classification ordinale : rég. log. ordinale

Cette fois $y_i \in \{1, \ldots, K\}$, où un ordre existe entre les modalités 1 à K.

Dans cette situation, on modélise généralement des *logits cumulatifs* :

$$\ln \frac{\pi_{k+1}(x) + \ldots + \pi_K(x)}{\pi_1(x) + \ldots + \pi_k(x)} = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{jk} x_j \qquad \forall 1 \leq k \leq K-1.$$

Ce dernier modèle comportant un grand nombre de paramètres, les β_{jk} sont souvent supposés constants par classe
$\beta_{jk} = \beta_j \quad \forall 1 \leq k \leq K-1.$

Régression logistique polytomique sous R

```r
library(VGAM)
reglog=vglm(Species~.,data=iris,family=multinomial)
summary(reglog)
```

```
##
## Call:
## vglm(formula = Species ~ ., family = multinomial, data = iris
##
## Pearson residuals:
##                          Min         1Q     Median        3Q
## log(mu[,1]/mu[,3]) -0.0003873  1.813e-10  6.194e-10 1.252e-06
## log(mu[,2]/mu[,3]) -1.9700374 -3.609e-04 -5.338e-06 4.763e-04
##
## Coefficients:
##                  Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept):1      35.490  22666.953      NA       NA
## (Intercept):2      42.638     25.708   1.659   0.0972 .
## Sepal.Length:1      9.495   6729.217      NA       NA
## Sepal.Length:2      2.465      2.394   1.030   0.3032
## Sepal.Width:1      12.300   3143.611      NA       NA
## Sepal.Width:2       6.681      4.480   1.491   0.1359
```

Régression logistique pénalisée

Comme en régression pénalisée, il est possible d'introduire des pénalités :

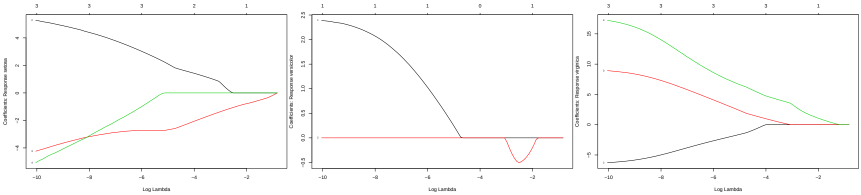
- LASSO
- ridge
- elasticnet

sur les coefficients afin de régulariser les situations en grande dimension où en présence de corrélation.

Régression logistique pénalisée

Avec pénalité LASSO

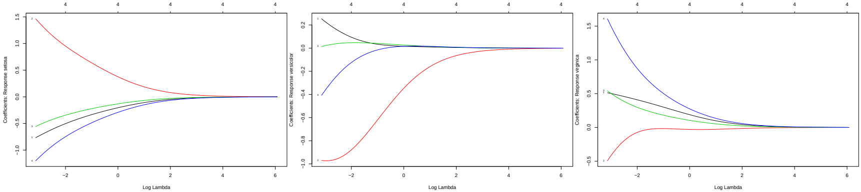
```
library(glmnet)
fit=glmnet(as.matrix(iris[,1:4]),iris[,5],alpha=1,
           family="multinomial")
plot(fit, xvar = "lambda", label = TRUE, type.coef = "coef")
```



Régression logistique pénalisée

Avec pénalité Ridge

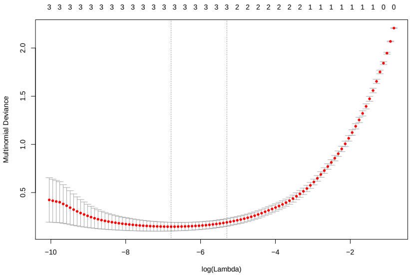
```
library(glmnet)
fit=glmnet(as.matrix(iris[,1:4]),iris[,5],alpha=0,
           family="multinomial")
plot(fit, xvar = "lambda", label = TRUE, type.coef = "coef")
```



Régression logistique pénalisée

Le paramètre de pénalisation peut-être choisi par CV

```r
require(doMC)
registerDoMC(cores=2)
cvfit=cv.glmnet(as.matrix(iris[,1:4]),iris[,5],
                    family="multinomial",parallel=TRUE)
plot(cvfit)
```



Régression logistique pénalisée

Une fonction predict permet d'effectuer des prédictions

```
p=predict(cvfit, newx = as.matrix(iris[,1:4]),
          s="lambda.min",type ="class")
table(p,iris[,5])
```

```
##
## p              setosa versicolor virginica
##   setosa           50          0         0
##   versicolor        0         48         1
##   virginica         0          2        49
```

Bilan sur la régression logistique

Avantages :

- bonnes performances en prédiction
- sélection de variables à l'aide de test statistique
- prise en compte des prédicteurs quantitatives et catégorielles
- version pénalisées disponibles pour la grande dimension