Liaison et dépendance entre deux variables quantitatives
Régression linéaire simple

Position du problème

X et Y sont deux grandeurs statistiques observées

ex: en macro-économie
PIB, Revenu des ménages, Importations…
en micro-économie
Revenu d ’un ménage, bénéfices d ’une entreprise...
en médecine ou autres sujets
taille d ’un individu, poids...

Hypothèse de base : X et Y sont des grandeurs continues, théoriquement définies dans IR. Dans la réalité on se contente du fait que la différence entre deux valeurs de X (resp. Y) ait un sens (par ex. l ’âge d ’une personne n ’est pas définie dans IR, les valeurs sont discrètes, en revanche la différence d ’âge entre deux personnes a un sens)

Dans l ’étude de la dépendance entre X et Y, on se pose trois questions fondamentales :

- ☞ **X et Y sont-ils liés, comment mesurer cette liaison ?**
- ☞ **Trouver une fonction qui permet de déterminer Y à partir de X**
- ☞ **Estimer les paramètres de cette fonction ?**

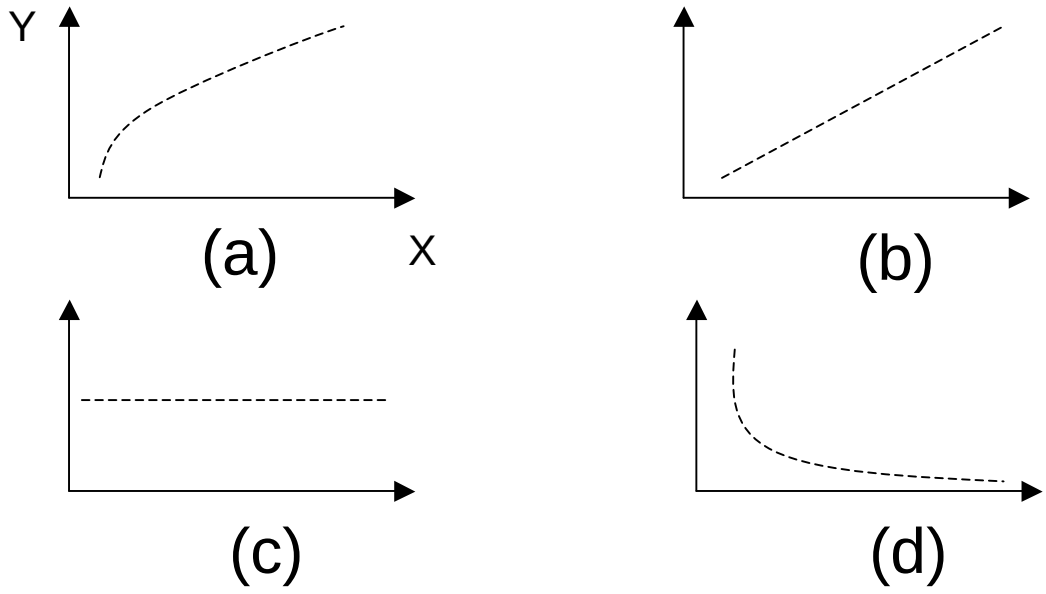
RAKOTOMALALA Ricco
Cours ***Analyse de Données***, HEC Lausanne

Etude de la corrélation

Position du problème

Evaluer la liaison entre X et Y, i.e répondre à la question X et Y ont-ils une évolution commune ?

1) Etude graphique



Plusieurs points de vue :

☞ en terme d ’évolution - quand X augmente, Y augmente (diminue) ?

☞ en terme de niveaux - quand X est faible (fort), Y est faible (fort) ?

Comment quantifier ces évaluations graphiques ?

2) Etude numérique : le coefficient de corrélation

Objectif : Quantifier la liaison entre X et Y de manière à mettre en évidence

- ☞ le **« sens »** de la liaison;
- ☞ la **« force »** de la liaison.

Le coefficient de corrélation

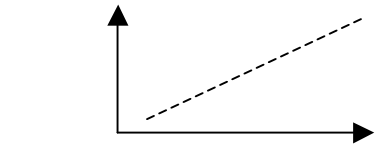
$$r = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

Tableau de données

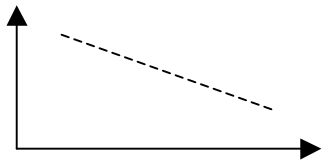
i	X	Y
…	2.5	3.5
	4.5	5.5
	3.5	4.5
	6.5	7.8
	4.6	8.5

i est le numéro d 'observation
• si i est une date, on parle de données « temporelles » ou encore « longitudinales »
• si i représente un individu statistique (un ménage, une voiture…), on parle de données transversales ou encore de coupe instantanée

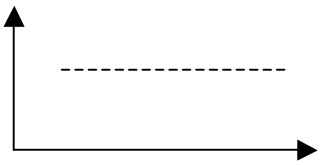
Interprétation : sens de la corrélation



r>0, corrélation positive



r<0, corrélation négative



r=0, absence de corrélation

Interprétation : force de la corrélation

| r |# 1, corrélation forte

| r |# 0, corrélation faible

3) Evaluation statistique : test d 'hypothèses

Problème :

- *on travaille souvent sur un échantillon (de taille limitée) issu de la population*
- *on veut inférer les résultats obtenus sur la population originelle*

ex: pour connaître les résultats des élections (plusieurs millions de votants en France), on pose la question à un échantillon de 1000 personnes choisis au hasard et on en extrait une conclusion sur l 'ensemble des votants

Principe du test statistique :

Concernant la population totale, une hypothèse est formulée, la question qui se pose est : **dans quelle mesure cette hypothèse est confirmée / infirmée par les données observées**

ex: « 50% des électeurs voteront pour Duchemol », ceci est-il confirmé par les données observés ?

> *Attention :*
> ☂ *on ne peut pas décider avec certitude puisque l 'on ne connaît pas la population totale*
> ☞ *mais le degré de confiance que l 'on accorde à la conclusion peut être exprimé en terme de probabilité*

Hypothèses à tester :

On oppose généralement une hypothèse dite nulle (H_0) avec une hypothèse dite alternative (H_1), les risques associés à la prise de décision sont les suivants :

Décision fondée sur les données

Etat de la nature (réalité)	Décider que H0 est vrai	Décider que H0 est faux
H0 est vrai	Décision correcte	*Risque de première espèce (α)*
H0 est faux (H1 est vrai)	*Risque de 2ème espèce (β)*	Décision correcte

Application au coefficient de corrélation :
On ne dispose pas directement de r mais de $\hat{r}$ qui est estimé sur un échantillon. On veut tester

$$H_0 : r = 0$$
$$H_1 : r \neq 0$$

Une règle de décision simple serait :

$$Accepter\ H_0\ ssi \left|\hat{r}\right| < r_\alpha$$
$$Rejeter \quad H_0\ ssi \left|\hat{r}\right| \geq r_\alpha$$

Le seuil critique du test (celle qui permet de définir la région de rejet et la région d 'acceptation de l 'hypothèse H_0) est défini par :

$$\alpha = P(Rejeter\ H_0 / H_0\ est\ vrai)$$
$$\alpha = P(\left|\hat{r}\right| > r_\alpha / r = 0)$$

Si l 'on connaît la loi de distribution statistique P, on peut calculer le seuil à partir du risque de première espèce

Dans la pratique : on ne connaît pas la loi de $\hat{r}$, on connaît en revanche la loi de distribution de

$$t = \frac{\hat{r}}{\sqrt{\frac{1-\hat{r}^2}{n-2}}} \equiv Student\,(n-2)$$

Loi de distribution de t, une loi de Student à (n-2) degrés de liberté; n est le nombre d 'observations du tableau statistique.

Règle de décision

$$Accepter\ H_0(r=0)\ \ ssi\ |t| < t_\alpha$$

$$Rejeter\quad H_0(r\neq 0)\ ssi\ |t| \geq t_\alpha$$

Attention :
Les logiciels donnent rarement la valeur de $t\alpha$ afin que l 'on puisse le comparer avec t

Ils fournissent en général directement la valeur α ' telle que

$$\alpha' = P(|Student(n-2)| \geq |t|)$$

La règle de décision devient ainsi

$$Accepter\quad H_0(r=0)\ \ ssi\ \alpha' > \alpha$$

$$Rejeter\quad H_0(r\neq 0)\ \ ssi\ \alpha' \leq \alpha$$

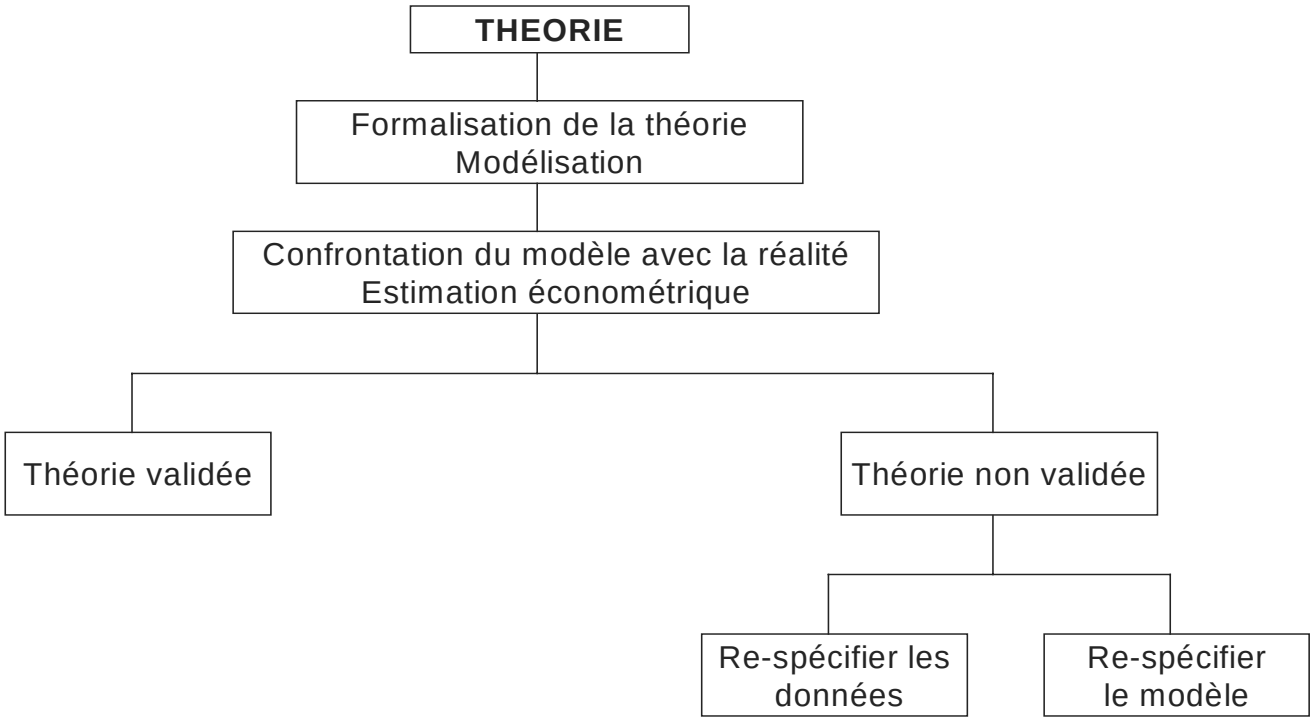
α ' est connu sous le terme « p-value » ou « significance »

Choix de la spécification permettant de déterminer Y à partir de X

Position du problème

On cherche une fonction f telle que $Y=f(X,\alpha)$
Comment spécifier cette fonction f ?

1) Généralités sur la démarche économétrique



Attention :
Seule la théorie (économique,…) doit nous guider pour la spécification du modèle, les données ne doivent servir qu'à valider ou invalider les hypothèses que l 'on émet…

Il est donc nécessaire de bien comprendre les hypothèses sous-jacentes à chacune des fonctions proposées

2) Quelques modèles de base

Modèle	Formule	Propiété fondamentale
Linéaire	$Y = aX + b$	la variationde Y est proportionnelle à la variation de X
Log-linéaire	$Y = B\ X^{a}$	le taux de variation de Y est proportionnel au taux de variation de X
Exponentiel	$Y = e^{aX+b}$	le taux de variation de Y est proportionnel à la variation de X
Logarithmique	$Y = a\ \ln(X) + b$	la variationde Y est proportionnelle au taux de variation de X

a) Propriétés du modèle linéaire

$$\frac{dy}{dx} = a$$

- simplicité
- peut être appliqué directement dans un premier temps pour vérifier l 'existence d 'une relation
- estimation directe des paramètres par la méthode des moindres carrés

b) Propriétés du modèle log-linéaire

$$\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = a$$

- favori des économistes - modèle à élasticité constante
- ex: emploi=f(production), demande=f(prix)…
- linéarisation par *ln(y)=a ln(x) + ln(b)*

c) Propriétés du modèle exponentiel (géométrique)

$$\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{}{dx}} = a$$

- surtout utilisé quand x=temps (ainsi dx=1)
- dans ce cas, la croissance (décroissance) de y est constant dans le temps
- ex : évolution du nombre de pages web dans le monde
- ce type d ’évolution ne dure pas longtemps
- linéarisation : ln(y) = a x + b

d) Propriétés du modèle logarithmique

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{}{x}} = a$$

- archétype de la croissance (décroissance) qui s ’épuise
- ex : salaire = f(ancienneté) ou vente=f(publicité)
- linéarisation : y = a ln(x) + b

3) Un modèle particulier : le modèle logistique

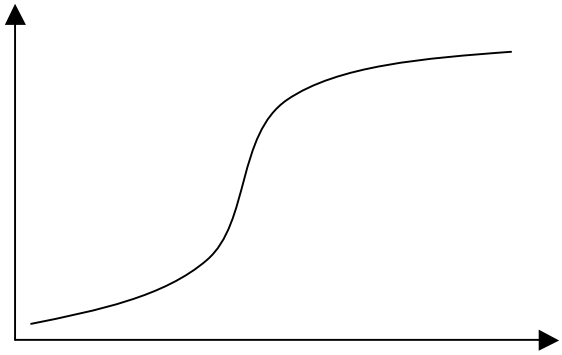
Problème :
Tous les modèles dans (2) ont une concavité constante (dérivée seconde de signe constant), on peut avoir besoin d 'un modèle à plusieurs phases

ex : lancement d 'un produit dans le temps

Décollage
- produit inconnu
- positionnement sur le marché

Croissance accélérée
- large diffusion

Freinage
- saturation du marché
- concurrence



Equation

$$y = y_{\min} + \frac{y_{\max} - y_{\min}}{1 + e^{ax+b}}$$

Linéarisation

$$\ln\left(\frac{y_{\max} - y}{y - y_{\min}}\right) = a\,x + b$$

Estimation des paramètres de la fonction spécifiée
La régression simple et multiple

Position du problème

On veut estimer les paramètres « a » et « b » de la fonction

$$y = a\,x + b$$

en utilisant les données issues de l ’échantillonage

Position du problème (2)

On se place dans un cadre plus général de l ’estimation de l ’équation de régression

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_p x_p$$

- y est la variable à prédire, dite endogène
- $x_1 \ldots x_p$ sont les variables prédictives, dites exogènes

Les estimations issues de l ’échantillon seront notés

$$\hat{a}_0,\ \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p$$

Notation matricielle et spécification statistique

On dispose de n observations, l ’écriture du modèle pour chaque observations (i=1,…,n) passe par une forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_i \\ \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & & x_{1p} \\ 1 & & & \\ 1 & x_{i1} & x_{ij} & x_{ip} \\ 1 & & & \\ 1 & x_{n1} & & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ \\ a_p \end{pmatrix}$$

$$Y = Xa$$

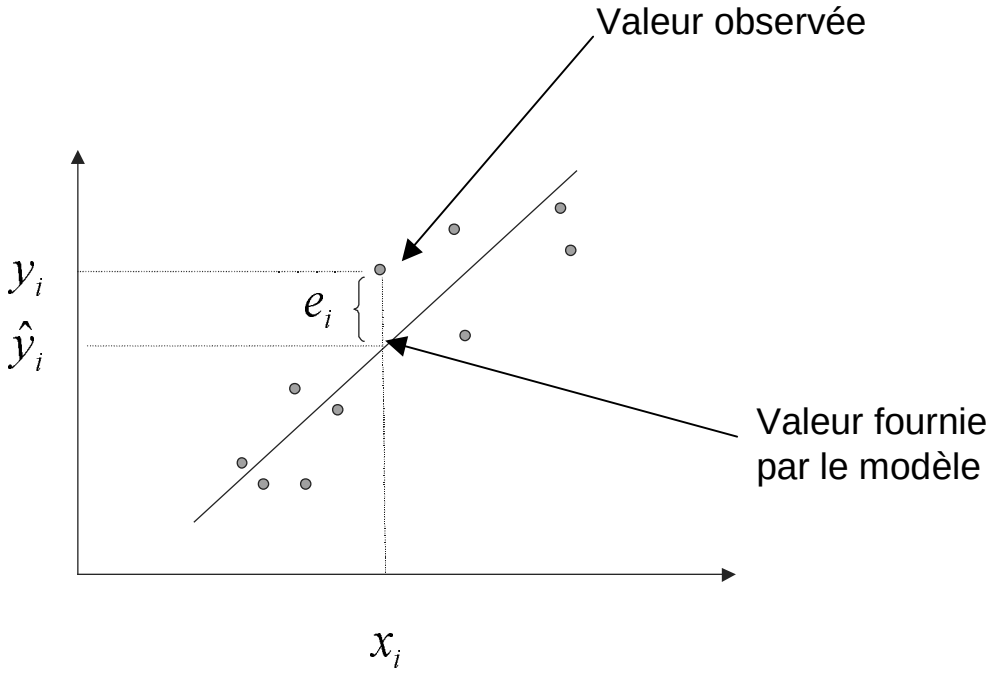
L ’estimation statistique passe par le rajout d ’un terme aléatoire ε qui tient un rôle essentiel

$$Y = Xa + \varepsilon$$

Le terme aléatoire ε cristallise toutes les « insuffisances » du modèle :
• le modèle n ’est qu’une caricature de la réalité, la spécification n ’est pas toujours rigoureusement exacte
• les erreurs de mesure sur les données
• les fluctuations liées à l ’échantillonage (si on change d ’échantillon, on peut obtenir un résultat différent)

ε quantifie les écarts entre les valeurs réellement observées et les valeurs prédites par le modèle

Méthode des moindres carrés



La méthode des moindres carrés cherche la meilleure estimation des paramètres « a » en minimisant la quantité

$$SCR = \sum_i e_i^{\,2}$$

$$avec\ e_i = Y - X\hat{a}$$

« e », l 'erreur observée est une évaluation du terme résiduel ε

RAKOTOMALALA Ricco
Cours ***Analyse de Données***, HEC Lausanne

1) Hypothèses

L ’estimation des moindres carrés et son évaluation ne prend effet que si certaines hypothèses sont respectées

Hypothèses probabilistes

- *le modèle est linéaire en X*
- *les X sont observés sans erreur*
- *$E(\varepsilon) = 0$, en moyenne le modèle est bien spécifié*
- *$E(\varepsilon^2)= \sigma^2_{\varepsilon}$ la variance de l ’erreur est constante (hétéroscédasticité)*
- *$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$, les erreurs sont non-corrélés*
- *$Cov(\varepsilon,x)=0$, l ’erreur est indépendante de la variable explicative*
- *$\varepsilon \equiv Normale(0, \sigma^2_{\varepsilon})$*

Hypothèses structurelles

- *$Rang(X\,'X)=p+1$ càd $(X\,'X)^{-1}$ existe*
- *$(X\,'X)/n$ tend vers une matrice finie non singulière*
- *$n>p+1$, le nombre d ’observations est supérieur au nombre de variables explicatives*

2) Estimation des moindres carrés

L ’estimation des moindres carrés du vecteur « a » s ’écrit

$$\hat{a} = (X'X)^{-1} X'Y$$

3) Interprétation des coefficients

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_j x_j + \cdots + a_p x_p$$

Toutes choses égales par ailleurs i.e toutes les autres variables sont constantes, alors

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = a_j$$

RAKOTOMALALA Ricco
Cours ***Analyse de Données***, HEC Lausanne

4) Evaluation globale du modèle, tableau d ’analyse de variance et coefficient de détermination

La qualité de l ’estimation est traduite par *l ’équation d ’analyse de variance*

Endogène observée — Endogène estimée

$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

SCT	SCE	SCR
Variabilité totale	Variabilité expliquée par le modèle	Variabilité non-expliquée (Variabilité résiduelle)

Les logiciels présente très souvent le tableau d ’analyse de variance

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carrés moyens
Modèle	SCE	p	SCE/p
Résidus	SCR	n-p-1	SCR/(n-p-1)
Total	SCT	n-1	

Un indicateur synthétique issu du tableau d ’analyse de variance permet d ’évaluer globalement le modèle construit : le coefficient de détermination

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

R^2#1, le modèle est intéressant
R^2#0, le modèle est mauvais

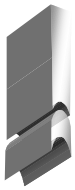
La qualité du modèle étant évaluée sur un échantillon, le R^2 calculé est soumis à une certaine variabilité.

Si on veut s 'assurer que le modèle est intéressant, on procédera au test d 'hypothèses

$$H_0 : R^2 = 0$$

$$H_1 : R^2 > 0$$

Sachant que l 'on dispose du coefficient $\hat{R}^2$ estimé sur l 'échantillon.



Pour ce faire, on a besoin du risque critique et de la loi de distribution du coefficient calculé. Comme pour le coefficient de corrélation, il est nécessaire de passer par un indicateur intermédiaire

$$F = \frac{R^2 / p}{(1-R^2) / (n-p-1)} \equiv Fischer(p, n-p-1)$$

Loi de distribution de Fischer, à p et n-p-1 degrés de liberté

On obtient la p-value par $\alpha' = P(Fischer(p, n-p-1) > F)$

Pour un risque α, la règle de décision devient
- *Accepter H0 ssi $\alpha' > \alpha$*
- *Rejeter H0 ssi $\alpha' < \alpha$*

5) Evaluation individuelle des coefficients de régression

On cherche à savoir si la variable Xj a une influence significative sur Y ?

⇒ *Test d 'hypothèses*

$$\begin{cases} H_0 : a_j = 0 \\ H_1 : a_j \neq 0 \end{cases}$$

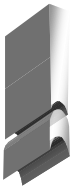
en utilisant les estimations $\hat{a}_j$

A cet effet, on a besoin de connaître la variance de ces estimations….

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{\,2}\left(X'X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{a_0} & & & & \\ & \hat{\sigma}_{a_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \hat{\sigma}_{a_p} \end{pmatrix}$$

Variance estimée de l 'erreur

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{\,2} = \frac{\sum_i e_i^{\,2}}{n - p - 1}$$



L ’indicateur que l ’on utilisera pour le test est

$$t = \frac{\hat{a}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}} \equiv Student(n - p - 1)$$

La p-value est obtenue avec $\alpha' = P(|Student(n - p - 1)| > |t|)$

Pour un risque α, la règle de décision est
- *Accepter H_0 ssi $\alpha' > \alpha$*
- *Rejeter H_0 ssi $\alpha' < \alpha$*

6) Estimation par intervalle des coefficients de régression

$\hat{a}_j$ sont entachés de variabilité: si on change d ’échantillon, l ’estimation pourrait être légèrement différente

Peut- on produire un intervalle qui, avec une certaine probabilité α, va contenir la « vraie » valeur de a_j ?

On sait que $$\frac{\hat{a}_j - a_j}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}} \equiv Student(n - p - 1)$$

RAKOTOMALALA Ricco
Cours ***Analyse de Données***, HEC Lausanne

Pour une probabilité α, on peut définir les bornes de variation de la loi de Student $t_{\alpha/2}$

$$-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{a}_j - a_j}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}} \leq +t_{\alpha/2}$$

L 'intervalle de variation du coefficient estimé s 'écrit alors

$$\hat{a}_j - t_{\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{\hat{a}_j} \leq a_j \leq \hat{a}_j + t_{\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{\hat{a}_j}$$

Un exemple simple
Effet de l ’*engrais* sur le *rendement* en maïs

Rendement (quintal)	Engrais (kilo)
16	20
18	24
23	28
24	22
28	32
29	28
26	32
31	36
32	41
34	41

$$\hat{R}^2 = 0.99$$

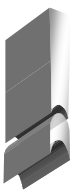
$$F = 862.509 \quad (p - value = 0.000)$$

$$Rendement = 0.851 \times Engrais$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 0.029$$

$$t = 29.36 (p - value = 0.000)$$

Pour un risque d ’erreur α =0.05, les bornes de variation de la loi de Student $t_{\alpha/2} = 2.262$ $\Rightarrow$ $0.785 \leq a \leq 0.916$



Avec un risque d ’erreur de 5% : on peut dire que dans le pire des cas, une injection supplémentaire de 1 kilo d ’engrais, fera augmenter la production de 0.785 quintaux

RAKOTOMALALA Ricco
Cours ***Analyse de Données***, HEC Lausanne

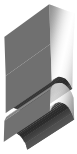
7) Comparaison et Sélection de modèles

Position du problème

On ne dispose pas de théorie précise pour guider la spécification, de fait on est face à des modèles concurrents avec 2 difficultés :
☞ *ils n 'ont pas le même nombre de variables*
☞ *ils n 'utilisent pas les mêmes variables*

A) Comparaison de deux modèles

Intuitivement, le R^2 indiquant la qualité globale du modèle, on préférera le modèle qui a le plus fort R^2



NON ! Le R^2 est un indicateur inapproprié ici car il augmente de manière mécanique avec le nombre de variable

$$R^2_{Y\times x_1,x_2} < R^2_{Y\times x_1,x_2,x_3}$$

Même si x3 est une variable qui n 'apporte aucune information

R^2 corrigé des degrés de liberté

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2)$$

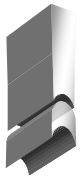
Les modèles qui introduisent beaucoup de variables seront pénalisés

B) Méthodes de sélection automatique des modèles

Principe : chercher
☞ *les variables les plus corrélées avec l ’endogène*
☞ *les moins corrélées entre elles*

C ’est notre objectif de départ

Eviter la redondance de l ’information, du fait de la colinéarité des variables peuvent être éjectés à tort par d ’autres, et les coefficients estimés sont généralement très instables



Nous sommes dans le cadre de la statistique exploratoire ici, l ’interprétation des résultats peut être très difficile, voire impossible. En revanche, pour des fins de prévision, ces techniques peuvent être très utiles.

<u>Quelques techniques :</u>

☞ tester toutes les régressions possibles et choisir celui qui a le meilleur R^2 corrigé avec tous les coefficients significatifs
☞ élimination progressive (backward elimination) : démarrer avec toutes les variables et éliminer un à un les variables dont les coefficients ne sont pas significatifs
☞ sélection progressive (forward regression) : prendre la variable la plus corrélée avec Y, puis prendre la 2ème variable la plus corrélée avec Y en éliminant l ’influence des variables déjà introduites (cf. Notion de corrélation partielle). On s ’arrête quand le t de Student d ’une variable introduite est non significatif.
☞ stepwise regression : combinaison de forward et backward

Problèmes pratiques liés à l 'utilisation du modèle linéaire général

1) La prévision

On dispose du modèle : $y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \cdots + \hat{a}_p x_p$

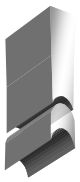
et de l 'observation numéro h
sur chacune des variables exogènes $x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hp}$

La valeur prédite sera : $\hat{y}_h = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{h1} + \cdots + \hat{a}_p x_{hp}$

Prévision ponctuelle

L 'erreur de prévision : $e_h = y_h - \hat{y}_h$

Intervalle de prévision



La prévision est entachée d 'erreur, il est plus intéressant de produire un intervalle de prévision sur laquelle nous contrôlons la probabilité d 'erreur

La variance estimée de l 'erreur de prévision s 'écrit :

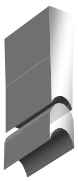
$$\hat{\sigma}_{e_h}^{\ 2} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{\ 2}\left[X'_h \left(X'X\right)^{-1} X_h + 1\right] \quad \text{avec} \quad X_h = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{h1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{hp} \end{pmatrix}$$

RAKOTOMALALA Ricco
Cours ***Analyse de Données***, HEC Lausanne

Sachant que : $$\frac{e_h}{\hat{\sigma}_{e_h}} \equiv Student(n-p-1)$$

L 'intervalle de prévision au niveau de confiance (1-α) (au risque α) s 'écrit :

$$y_h = \hat{y}_h \pm t_{\alpha/2} \times \hat{\sigma}_\varepsilon \left[X'_h \left(X'X \right)^{-1} X_h + 1 \right]^{1/2}$$



L 'intervalle de prévision sera d 'autant plus large

On prend un risque très faible

La variance résiduelle est forte (standard error of estimate)

2) Autocorrélation des résidus

(surtout pour les modèles temporelles)

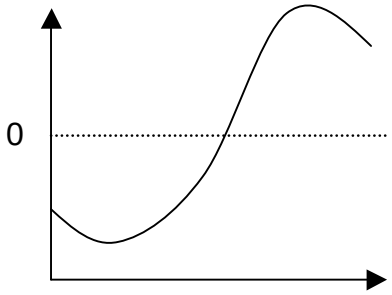
Une des hypothèses probabilistes est violée

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) \neq 0$$

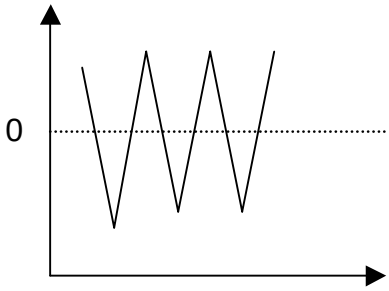
Causes probables :

- ☞ *une variable explicative manque*
- ☞ *le modèle est mal spécifié*
- ☞ *les données ont été « travaillées » au préalable*

Détection graphique



Autocorrélation positive



Autocorrélation négative

Test statistique : test de Durbin-Watson

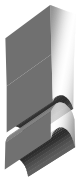
Permet de tester l 'autocorrélation d 'ordre 1, de la forme

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t \quad , \quad avec \;\; \nu_t \equiv Normale(0, \sigma_\nu{}^2)$$

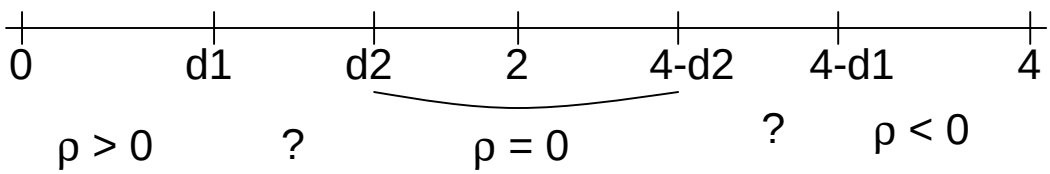
Le test porte sur $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$

L 'indicateur utilisé est

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_t{}^2}$$



On ne dispose pas de p-value ici, il faut comparer le DW calculé avec les seuils d1 et d2 fournis par la table de Durbin et Watson



Estimation

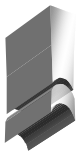
L 'estimation s 'effectue sur l 'équation en différences :

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = \hat{a}_0(1-\hat{\rho}) + \hat{a}_1(x_{t,1} - \hat{\rho} x_{t-1,1}) + \cdots + \hat{a}_p(x_{t,p} - \hat{\rho} x_{t-1,p})$$

estimation conjointe des $\hat{a}_j$ et de ρ

- *Cochrane-Orcutt (méthode d 'itérations successives)*
- *Hildreth-Lu (méthode de balayage)*

Prévision en présence d 'autocorrélation



Il faut utiliser l 'équation en différences

Ex : prévoir à la période t+1

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{\rho} y_t + \hat{a}_0(1-\hat{\rho}) + \hat{a}_1(x_{t+1,1} - \hat{\rho} x_{t,1}) + . + \hat{a}_p(x_{t+1,p} - \hat{\rho} x_{t,p})$$

3) La multicolinéarité

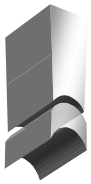
Problème

On parle de multicolinéarité quand le coefficient de corrélation entre deux variables exogènes est proche de 1

$$r_{x_i,x_j} \# 1$$

Ou de manière générale lorsque l 'on peut déduire linéairement une variable des autres

$$x_j \# \sum_{i \neq j} c_i \times x_i$$



Il y a des variables redondantes parmi les exogènes

Conséquences

Rappelons que

$$\begin{cases} \hat{a} = (X'X)^{-1} X'Y \\ \hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{\,2} (X'X)^{-1} \end{cases}$$

Si multicolinéarité parfaite (les « # » sont des « = »)
☞ det(X 'X)=0, les coefficients sont indeterminés, de même que la variance

Si multicolinéarité i.e det(X 'X)#0
☞*les coefficients sont extrêmement instables, une modification faible dans les données entraîne une forte modification de l 'estimation (en particulier, un changement d 'échantillon peut modifier du tout au tout les résultats)*
☞ *la variance est très grande, et les t de Student calculés sont sous_estimés, laissant croire que les variables incriminées ne sont pas significatives*

Détection simple : règle de KLEIN

☞ on calcule le R^2 dans l 'équation de régression
☞ on calcule les coefficients de corrélation carrés entre chaque variable

on considère que deux variables sont redondantes ssi

$$R^2 < r^2_{x_i, x_j}$$

Solutions

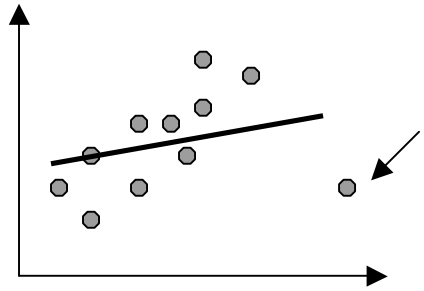
☞ supprimer les variables redondantes en respécifiant le modèle

☞ utiliser des « artifices » numériques, par ex. la régression Ridge qui consiste à ajouter une constante à la diagonale de la matrice X 'X de manière à la rendre inversible

4) Utilisation des variables indicatrices

Une variable indicatrice est une variable qui
☞ *prend ses valeurs dans l 'ensemble {0,1}*
☞ *sert à indiquer la survenance d 'un événement ou de l 'appartenance à un groupe*

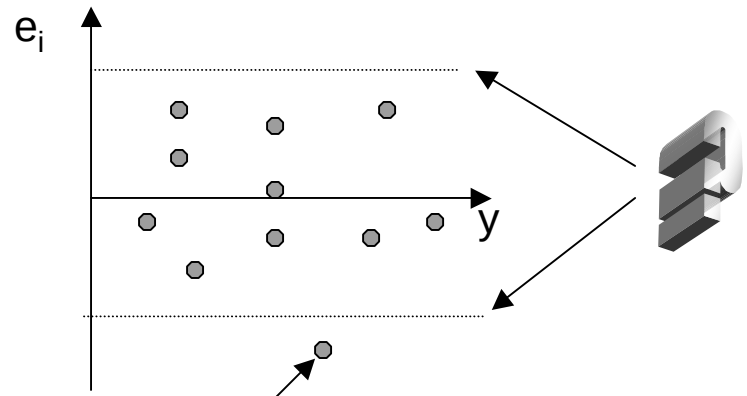
A) Traitement des données aberrantes (atypiques)



La droite de régression est « aspirée » par le point atypique

Causes probables :
☞ erreur de mesure ou de saisie
☞ événement exceptionnel
☞ l 'observation n 'appartient pas à la population étudiée

Détection : graphique des résidus



Comment spécifier ces bornes

Le point se démarque dans le graphique des résidus

On sait par hypothèse que

$$\varepsilon \equiv Normale(0, \sigma_\varepsilon^{\,2})$$

Estimé à l 'aide de $\hat{\sigma}_\varepsilon^{\,2}$

Règle des 3 sigmas : 99,9% des observations sont situés à $\pm 3\sigma$ de part et d 'autre de la moyenne

Traitement : utilisation d 'une variable indicatrice, dite variable muette (dummy variable)

Y	X	d
5	3	0
6	1	0
6.5	2.5	0
5.2	2	0
14.5	3.5	1
3	1.5	0

Afin de supprimer l 'effet levier dû à l 'observation atypique

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_2 d$$

Indique le « décalage » par rapport au modèle

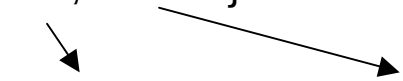
B) Régression sur variables qualitatives

Dans le modèle linéaire général, jusqu'ici tous les x_j étaient quantitatifs

Comment faire pour introduire des variables qualitatives (ex: sexe {homme, femme}, statut marital {marié, célibataire, veuf}

Traitement : codage disjonctif complet des variables qualitatives

Sexe
{Homme,Femme}



Sexe_Homme
{0,1}

Sexe_Femme
{0,1}

Attention, danger de colinéarité :

Sexe_Homme+Sexe_Femme = 1

☞ *colinéarité avec le terme constant de la régression*

Solution : omettre une des modalités des variables
(attention par la suite dans l 'interprétation des résultats)

sexe

Sexe_Homme
{0,1}

Sexe_Homme = 1 => Homme
Sexe_Homme = 0 => Femme

C) Analyse de la saisonnalité
(cadre des observations temporelles)

Certaines grandeurs économiques (ventes, affluence, trafic ferroviaire…) sont influencés par les phénomènes saisonniers

Comment introduire cette information dans les modèles

Utilisation des variables indicatrices, une pour chaque saison

Ex : données trimestrielles
☞ 4 variables indicatrices (T1,T2,T3,T4)

à cause de la colinéarité, on n ’en introduit que 3 dans la régression

$$ventes = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 pub + \hat{a}_2 T_1 + \hat{a}_3 T_2 + \hat{a}_4 T_3$$

Indique le décalage moyen
par rapport au 4ème trimestre

D) Comparaisons de moyennes
(introduction à l ’analyse de variance)

Y a-t-il des facteurs de variations systématiques pesant sur une variable d intérêt

On constitue des groupes, un pour chaque occurrence du facteur contrôlé, et on compare par la suite les moyennes respectives de la variable d ’intérêt

Ex : poids des personnes x sexe

Variable indicatrice

$$poids = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \times sexe\_homme$$

Poids moyen chez les femmes

Décalage moyen du poids de l ’homme par rapport à celui de la femme